สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม ม.5 เล่ม 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลาง พุทธศักราช 2551
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

สำนักพิมพ์ พ.ศ.พัฒนา

จะเฉียบคมและถูกทาง **ต้องอ่าน** เล่มนี้เท่านั้น

เนื้อหา
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
- เรขาคณิตวิเคราะห์

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เรียบเรียงโดย
ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง
วศ.บ. (ไฟฟ้า จุฬาฯ)
ค.ม. (การจัดการคุณภาพ มรภ.สวนสุนันทา)
ศษ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)
นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทย์ และเทคโนโลยีการศึกษา

02 279 6222 www.porsor.com @pspattana

สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม ม.5 เล่ม 1

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

สำนักพิมพ์ พ.ศ.พัฒนา

จะเฉียบคมและถูกทาง
ต้องอ่าน เล่มนี้เท่านั้น

เนื้อหา
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- เมทริกซ์
- เวกเตอร์

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เรียบเรียงโดย
ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง
วศ.บ. (ไฟฟ้า จุฬาฯ)
ค.ม. (การจัดการคุณภาพ มรภ.สวนสุนันทา)
ศษ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)
นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทย์ การจัดการคุณภาพ และเทคโนโลยีการศึกษา

สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

ม.5 เล่ม 1 (เพิ่มเติม)

ผู้เรียบเรียง : *ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง*

กองบรรณาธิการ : *อรศรี โรจน์พจนรัตน์, ณัฏฐ์ธนิน ลูกเสือถิรา, อมรศักดิ์ บุญเรือง, สถาพร พู่ศิริถิรพร, พิรุณณิชา ใบสุวรรณ, มนชญา กมลวานนท์, ยุภาภรณ์ แตงมณี*

จัดพิมพ์โดย : บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด

12 หม่อมแผ้ว แยก 3 ถนนพระราม 6 (ซอย 41) แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กรุงเทพฯ 10400

โทร 02-279-6222 (อัตโนมัติ 15 คู่สาย) โทรสาร 02-279-6203-4

พิมพ์ที่ : *บริษัท ธนธัชการพิมพ์ จำกัด*

43/100 หมู่ที่ 5 ซ.เทอดพระเกียรติ 1 ถ.เทอดพระเกียรติ ต.วัดชลอ อ.บางกรวย จ.นนทบุรี 11130

ผู้พิมพ์ - ผู้โฆษณา

นางนงลักษณ์ ธนกุลโรจน์

คำนำ

หนังสือ **คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 (เพิ่มเติม)** เล่มนี้ เป็นหนังสือที่มีเนื้อหาตรงตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และยังได้สอดแทรกเนื้อหาที่เกินหลักสูตรพร้อมทั้งเทคนิคคิดลัดต่าง ๆ ตามที่ผู้เขียนเห็นว่าสำคัญ เนื่องจากผู้เขียนเห็นว่าการที่จะศึกษาคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้นั้น ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้พื้นฐานในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี และจะต้องมีเทคนิคคิดลัดต่าง ๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถแก้ไขปัญหาโจทย์และแข่งขันกับเวลาได้อย่างรวดเร็ว

1. การอธิบายเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้จะใช้ภาษาเดียวกับภาษาที่ผู้เขียนใช้สอน ดังนั้น จึงอ่านง่ายและเพลิดเพลินไปกับบทเรียน ทำให้ผู้อ่านมีความรู้สึกเหมือนกับว่าผู้เขียนมาสอนให้เองเลย
2. ครอบคลุมเนื้อหาพื้นฐานที่สำคัญโดยจะมีการแบ่งเนื้อหาให้เป็นระบบเพื่อจะได้ศึกษาได้ง่าย
3. โจทย์ในหนังสือเล่มนี้จะมีมากมายเพียงพอที่ผู้ศึกษาจะฝึกทำเพื่อเสริมสร้างทักษะและประสบการณ์ในการทำโจทย์
4. หนังสือเล่มนี้จะเน้นถึงเทคนิคและการวิเคราะห์โจทย์ต่าง ๆ อย่างเป็นระบบ
5. มีเทคนิคคิดลัดต่าง ๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาทำข้อสอบแข่งขันได้อย่างรวดเร็ว
6. แนวข้อสอบเตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัย ระบบ TCAS

สุดท้ายนี้ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะให้ประโยชน์แก่ผู้อ่าน และขอขอบคุณ บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด ที่ให้โอกาสแก่ผู้เขียนได้เขียนหนังสือที่อยากเขียน สำหรับคุณงามความดีที่พึงมีจากหนังสือเล่มนี้ ขอมอบให้แด่ พ่อแม่ครูอาจารย์ คือ พระราชสังวรญาณ (พุธ ฐานิโย) บุพการี คือ ผอ.ประเสริฐ วรรณโพธิ์กลาง และนางสนาน วรรณโพธิ์กลาง พร้อมทั้งครูอาจารย์ผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาแก่ผู้เขียน

ด้วยความปรารถนาดี

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

(ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง)

สารบัญ

บทที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สารบัญ

สารบัญ

สารบัญ

ใช้แผนภาพต่อไปนี้ ช่วยในการจำสูตร

ต้อง÷2 $\rightarrow \frac{A+B}{2}$ $\quad \frac{A-B}{2}$

$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \leftarrow$ s+s $\rightleftharpoons$ 2sc $\rightarrow \sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \leftarrow$ s-s $\rightleftharpoons$ 2cs $\rightarrow \sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \leftarrow$ c+c $\rightleftharpoons$ 2cc $\rightarrow \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$-2\sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B) \leftarrow$ c-c $\rightleftharpoons$ 2ss $\rightarrow \cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

A+B $\quad$ A-B $\leftarrow$ ไม่ต้อง÷2

<u>จากแผนภาพ</u>

1. ฝั่งซ้ายมือของแผนภาพจะได้สูตรผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$
$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$
$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$
$$-2\sin A\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

2. ฝั่งขวามือของแผนภาพจะได้สูตรผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ บทที่ 1

เทคนิค 1

▪ ตรีโกณมิติ

หลักการ *ตรีโกณมิติ (Trigonometry)* หมายถึง ระบบวิชาความรู้ที่ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้าน และมุมของรูปสามเหลี่ยม

🔈 <u>สิ่งที่ควรทราบ</u>

1. ตรีโกณมิติมักถูกนำไปใช้ในการหาระยะทาง มุม พื้นที่ และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง
2. ในอดีตจะกล่าวถึงตรีโกณมิติในมุมมองของความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม

แต่ในปัจจุบันตรีโกณมิติได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลายสาขาวิชา เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา การสำรวจ การเดินเรือ ดาราศาสตร์ ดนตรี วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น

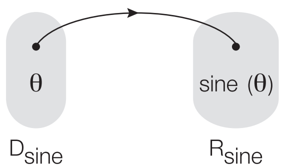
เทคนิค 2

▪ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

หลักการ

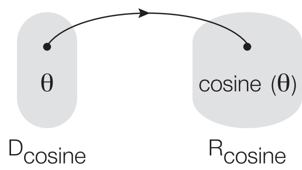
1. ฟังก์ชันไซน์ (Sine Function)

คือ เซตของคู่อันดับ (θ, sine (θ))
ดังแผนภาพต่อไปนี้



2. ฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine Function)

คือ เซตของคู่อันดับ (θ, cosine (θ))
ดังแผนภาพต่อไปนี้



🔈 <u>ขั้นตอนการเรียนรู้</u>

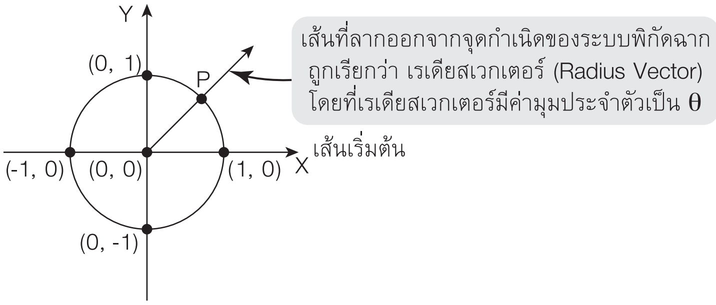
เพื่อให้เกิดความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์อย่างเป็นระบบ ผู้เขียนจะแบ่งการอธิบายเป็นเทคนิคย่อยๆ คือ วงกลมหนึ่งหน่วย การบอกตำแหน่งของจุดใดๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วย และเผยโฉมฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

♦• เทคนิคย่อย 2.1 *วงกลมหนึ่งหน่วย (The Unit Circle)*

<u>*หลักการ*</u>

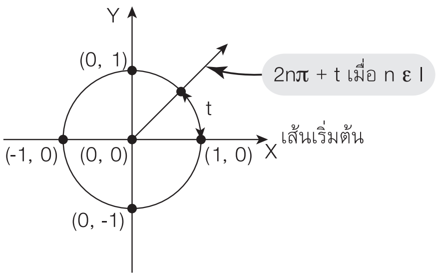
ผู้เขียนจะขอเริ่มกล่าวถึง ฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก โดยที่วงกลมนี้จะถูกเรียกว่า **วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle)**

☉ <u>**สิ่งที่ควรพิจารณา**</u> ต่อไปนี้ ถ้าผู้เขียนกล่าวถึง **วงกลมหนึ่งหน่วย** ให้ผู้ศึกษาเข้าใจได้เลยนะว่า ผู้เขียนหมายถึง **วงกลมรัศมี 1 หน่วย ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก** วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ดังนี้

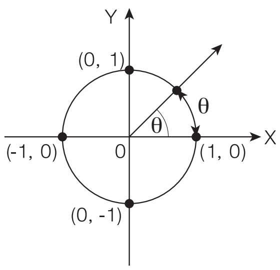


<u>*จากรูปพบว่า*</u>

1. จุด P เป็นจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ กับเรเดียสเวกเตอร์ (Radius Vector)
2. เรเดียสเวกเตอร์ (Radius Vector) มีค่ามุม θ มากมายจริงไหม
3. ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก สามารถแทนค่ามุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน (Radian) ได้เลย เพราะเส้นรอบวงยาว = $2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$ เหมือนมุมรอบวง
4. การวัดความยาวของส่วนโค้งของวงกลมให้เริ่มวัดออกจากจุด (1, 0) และค่าที่ได้จะเป็นจำนวนบวก หรือจำนวนลบจะมีหลักเหมือนกับการวัดมุมนั่นเอง



5. ในวงกลมหนึ่งหน่วย ความยาวของส่วนโค้งรองรับมุมจะเป็นอย่างเดียวกับค่ามุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน
6. ในวงกลมหนึ่งหน่วย θ ของเรเดียสเวกเตอร์สามารถบอกเราได้ 2 อย่างคือ



6.1 ความยาวของส่วนโค้งรองรับมุมที่จุดศูนย์กลาง

6.2 ค่ามุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

7. พบว่า

วงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นกราฟของความสัมพันธ์

$\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$ จะมี $-1 \le x \le 1$

$-1 \le y \le 1$

♦• เทคนิคย่อย 2.2 *การบอกตำแหน่งของจุดใดๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วย*

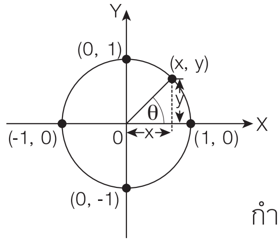
<u>*หลักการ*</u> *การบอกตำแหน่งของจุดใด ๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยสามารถบอกได้ 2 แบบดังนี้*

1. การบอกตำแหน่งของจุดใด ๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบ XY โดยใช้พิกัด x และ y
2. การบอกตำแหน่งของจุดใด ๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบ XY โดยใช้พิกัด cos θ และ sin θ

สิ่งที่ต้องขุดคุ้ย

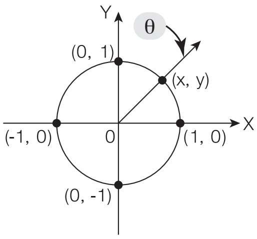
การบอกตำแหน่งของจุดใดๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยสามารถบอกได้ 2 แบบดังนี้

1. การบอกตำแหน่งของจุดใด ๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบ XY โดยใช้พิกัด x และ y ทำได้ดังรูป



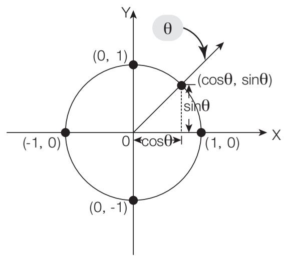
2. การบอกตำแหน่งของจุดใด ๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบ XY โดยใช้พิกัด cos θ และ sin θ ทำได้ดังนี้

กำหนดให้จุด (x, y) จะถูกเรียกว่า **จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย** โดยที่จุด (x, y) คือ จุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ กับเรเดียสเวกเตอร์ที่มีมุมประจำตัวเป็น θ นั่นเอง



ข้อตกลง จุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ กับเรเดียสเวกเตอร์ที่มีมุมประจำตัวเป็น θ มีคู่อันดับเป็น (cosine (θ), sine (θ)) อนุโลมให้เขียนสั้นๆ เป็น (cos θ, sin θ) ได้

ดังนั้น การบอกตำแหน่งของจุดใดๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบ X โดยใช้พิกัด cos θ และ sin θ ทำได้ดังรูป



จากรูปพบว่า

1) จุด (cos θ, sin θ) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยนั่นเอง

2) จำได้ไหมว่าจุด (x, y) จะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อจุด (x, y) คือจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ กับเรเดียสเวกเตอร์ที่มีมุมประจำตัวเป็น θ

3) แสดงว่าข้อกำหนดตั้งใจบอกเราว่า ถ้าเกิดวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ตัดกับเรเดียสเวกเตอร์ที่มีมุมประจำตัวเป็น θ จะได้จุดตัด (x, y) โดยที่นักคณิตศาสตร์กำหนดกันดื้อๆ เลยว่า ให้ **x เป็น cosine (θ) และ y เป็น sine (θ)**

นั่นคือ x = cosine (θ)

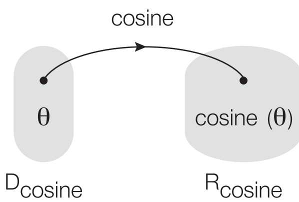
และ y = sine (θ)

♦• เทคนิคย่อย 2.3 *เผยโฉมฟังก์ชันไซน์และโคไซน์*

หลักการ

กำหนดให้ (cosine (θ), sine (θ)) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

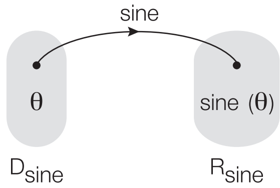
1. **ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)** คือ เซตของคู่อันดับ (θ, cosine (θ)) ดังแผนภาพ



ข้อตกลง

1. อนุโลมให้เขียน cosine (θ) สั้นๆ ได้เป็น cos θ
2. cosine เป็นตัวโยงจาก D_{cosine} ไป R_{cosine} ซึ่งทำตัวเหมือนกับตัวโยง f ในเรื่องฟังก์ชันนั่นเอง

2. **ฟังก์ชันไซน์ (sine)** คือเซตของคู่อันดับ (θ, sine (θ)) ดังแผนภาพ



<u>ข้อตกลง</u>

1. อนุโลมให้เขียน sine (θ) สั้นๆ ได้เป็น sin θ
2. sine เป็นตัวโยงจาก D_{sine} ไป R_{sine} ซึ่งทำตัวเหมือนกับตัวโยง f ในเรื่องฟังก์ชันนั่นเอง

<u>สิ่งที่ควรวิเคราะห์</u>

1. **เราทราบนะ** ว่าจุด (x, y) กับ (cos θ, sin θ) จะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยและเป็นจุดเดียวกันด้วยเมื่อจุดทั้งสองจะเป็นจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ กับเรเดียสเวกเตอร์ที่มีมุมประจำตัว θ ดังนั้น

x = cos θ ถูกอ่านออกเสียงว่า **เอกซ์** เท่ากับ **คอสทีตา**

y = sin θ ถูกอ่านออกเสียงว่า **วาย** เท่ากับ **ไซน์ทีตา**

เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\{x, y\} \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

จะได้ $-1 \le x \le 1$ จึงสรุปได้ว่า $1 \le \cos\theta \le$

และ $-1 \le y \le 1$ จึงสรุปได้ว่า $-1 \le \sin\theta \le 1$

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เมื่อ $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ และ θ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ นิยมเขียนเป็น $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

<u>หมายเหตุ</u> 1. $\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta)(\cos\theta)$

2. $\cos\theta^2$ หมายถึง cos ของจำนวนจริง θ^2 นั่นเอง

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ก็จะใช้รูปแบบนี้เช่นเดียวกัน

2. **สิ่งเป็นจริงที่น่าสนใจ** คือ ถ้า $\theta \pm \alpha = N\pi$ เมื่อ $N \in I$

จะทำให้ $\sin^2\theta + \cos^2\alpha = 1$ ด้วย

เช่น $\sin^2 120^\circ + \cos2\ 60^\circ = 1$

$\sin^2 30^\circ + \cos^2 150^\circ = 1$

<u>ขอย้ำอีกครั้งว่า</u> $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

หรือ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

หรือ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

แต่อย่ายึดติดกับตัวแปร x และ y นะ ผู้เขียนอาจจะอยากเปลี่ยนเป็น

m = cos θ มันคือ ค่าสมาชิกตัวแรกของจุดตัดวงกลมหนึ่งหน่วยกับเรเดียสเวกเตอร์

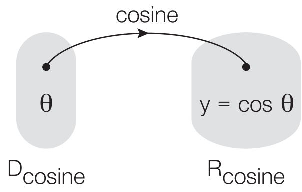
n = sin θ มันคือ ค่าสมาชิกตัวหลังของจุดตัดวงกลมหนึ่งหน่วยกับเรเดียสเวกเตอร์

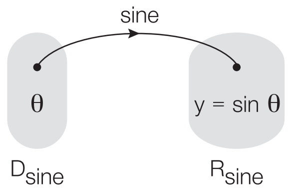
สำหรับในเรื่องฟังก์ชันมักชอบโยงไปที่ค่า y ดังนั้นผู้เขียนสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

y = cos θ มันยังเป็นสมาชิกตัวแรกของจุดตัดวงกลมหนึ่งหน่วยกับเรเดียสเวกเตอร์

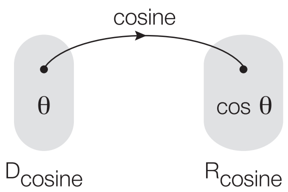
y = sin θ มันยังเป็นสมาชิกตัวหลังของจุดตัดวงกลมหนึ่งหน่วยกับเรเดียสเวกเตอร์

สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้





3. สนใจวิเคราะห์เฉพาะ cosine จากข้อกำหนด



3.1 เนื่องจาก ค่ามุม θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น $D_{cosine} = R$

3.2 เนื่องจาก $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

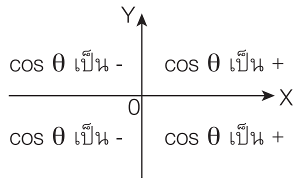
ดังนั้น $R_{cosine} = [-1, 1]$

3.3 cosine เป็น many to one function

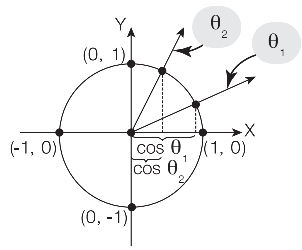
3.4 cosine เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง [-1, 1]

3.5 $(\cos\theta)_{max} = 1$ และ $(\cos\theta)_{min} = -1$

3.6 ถ้าเรเดียสเวกเตอร์อยู่ใน Quadrant ที่ 1 หรือ 4 แล้ว cosine จะโยง θ ไปยังค่า cos θ ที่เป็นค่า +
ถ้าเรเดียสเวกเตอร์อยู่ใน Quadrant ที่ 2 หรือ 3 แล้ว cosine จะโยง θ ไปยังค่า cos θ ที่เป็นค่า -



3.7 ถ้าเราสนใจเฉพาะ Quadrant ที่ 1

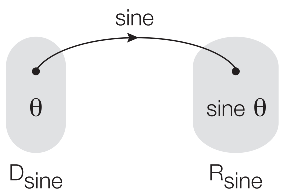


จากรูป จะเห็นได้ว่า $\cos\theta_1 > \cos\theta_2$ เมื่อ $\theta_1 < \theta_2$

ดังนั้น ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว cosine เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function)

<u>หมายเหตุ</u> จะแสดงฟังก์ชัน cosine ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือลดในควอดรันต์ต่าง ๆ ในเรื่องกราฟของฟังก์ชัน cosine โปรดติดตามอีกครั้งในตอนนั้นนะ

4. สนใจ วิเคราะห์เฉพาะ sine จากข้อกำหนด



4.1 เนื่องจาก ค่ามุม θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น $D_{sine} = R$

4.2 เนื่องจาก $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

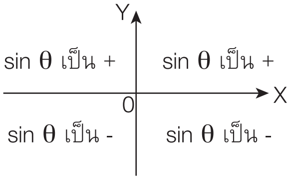
ดังนั้น $R_{sine} = [-1, 1]$

4.3 sine เป็น many to one function

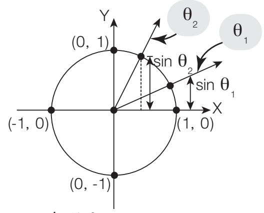
4.4 sine เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง [-1, 1]

4.5 $(\sin\theta)_{max} = 1$ และ $(\cos\theta)_{min} = -1$

4.6 ถ้าเรเดียสเวกเตอร์อยู่ใน Quadrant ที่ 1 หรือ 2 แล้ว sine จะโยง θ ไปยังค่า sin θ ที่เป็นค่า +
ถ้าเรเดียสเวกเตอร์อยู่ใน Quadrant ที่ 3 หรือ 4 แล้ว sine จะโยง θ ไปยังค่า sin θ ที่เป็นค่า -



4.7 ถ้าเราสนใจเฉพาะ Quadrant ที่ 1



จากรูป จะเห็นได้ว่า $\sin\theta_2 < \sin\theta_2$ เมื่อ $\theta_2 < \theta_2$

ดังนั้น ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว sine เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)

หมายเหตุ จะแสดงฟังก์ชัน sine ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือลดในควอดรันต์ต่างๆ อีกครั้งในเรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติครับ

เทคนิค 3

■ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

หลักการ

1. นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่ได้ศึกษาไปก่อนหน้านี้แล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังนี้

1.1 ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent Function) ซึ่งเขียนแทนแบบสั้นๆ ได้ด้วย tan ถูกอ่านออกเสียงว่า *แทน*

1.2 ฟังก์ชันเซแคนต์ (Secant Function) ซึ่งเขียนแทนแบบสั้นๆ ได้ด้วย sec ถูกอ่านออกเสียงว่า เซก

1.3 ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (Cosecant Function) ซึ่งเขียนแทนแบบสั้นๆ ได้ด้วย cosec หรือ csc ถูกอ่านออกเสียงว่า โคเซก

1.4 ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent Function) ซึ่งเขียนแทนแบบสั้นๆ ได้ด้วย cot ถูกอ่านออกเสียงว่า *คอต*

2. สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

2.1 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

2.2 $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

2.3 $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

2.4 $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

สิ่งที่ควรทราบ

1. **โคฟังก์ชัน (co - function) ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

ฟังก์ชัน sine กับฟังก์ชัน cosine เป็นโคฟังก์ชันซึ่งกันและกัน
ฟังก์ชัน tangent กับฟังก์ชัน cotangent เป็นโคฟังก์ชันซึ่งกันและกัน
ฟังก์ชัน secant กับฟังก์ชัน cosecant เป็นโคฟังก์ชันซึ่งกันและกัน

ข้อสังเกต เห็นไหมครับ มี co เติมเข้าหรือดึงออกจากฟังก์ชันตรีโกณมิติเดิม ตอนนี้ให้จำรูปแบบไปเลยนะ และผู้เขียนจะอธิบายเรื่องโคฟังก์ชันเพิ่มเติมในหัวข้อเทคนิคการยุบมุม เมื่อมุมของเรเดียสเวกเตอร์คู่ใดๆ บวกกันหรือลบกันได้มุมของแกนดิ่ง

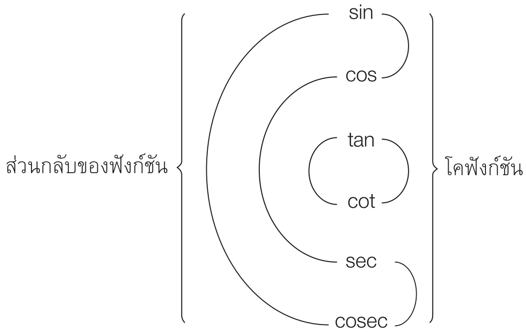
2. ส่วนกลับของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชัน sine กับฟังก์ชัน cosecant เป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน

ฟังก์ชัน cosine กับฟังก์ชัน secant เป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน

ฟังก์ชัน tangent กับฟังก์ชัน cotangent เป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน

สามารถเขียนส่วนกลับและโคฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ข้อสังเกต

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]} = \frac{1}{\tan\theta}$$

ดังนั้น $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$

3. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.1 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน tan

3.1.1 โดเมนของฟังก์ชัน tan คือ $D_{tan} = R - \{x \mid x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ เมื่อ $n \in I\}$

หรือ $D_{tan} = \{x \mid x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$ เมื่อ $n \in I\}$

3.1.2 เรนจ์ของฟังก์ชัน tan คือ $R_{tan} = R$

3.2 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน sec

3.2.1 โดเมนของฟังก์ชัน sec คือ $D_{sec} = R - \left\{x \mid x = \frac{(2n+1)\pi}{2}\right.$ เมื่อ $\left. n \in I\right\}$

หรือ $D_{sec} = \left\{x \mid x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}\right.$ เมื่อ $\left. n \in I\right\}$

3.2.2 เรนจ์ของฟังก์ชัน sec คือ $R_{sec} = R - \{x \mid -1 < x < 1\}$

หรือ $R_{sec} = \{x \mid x \leq -1$ หรือ $x \geq 1\}$

3.3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน cosec

3.3.1 โดเมนของฟังก์ชัน cosec คือ $D_{cosec} = R - \{x \mid x = n\pi$ เมื่อ $n \in I\}$

หรือ $D_{cosec} = \{x \mid x \neq n\pi$ เมื่อ $n \in I\}$

3.3.2 เรนจ์ของฟังก์ชัน cosec คือ $R_{cosec} = R - \{x \mid -1 < x < 1\}$

หรือ $R_{cosec} = \{x \mid x \leq -1$ หรือ $x \geq 1\}$

3.4 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน cot

3.4.1 โดเมนของฟังก์ชัน cot คือ $D_{cot} = R - \{x \mid x = n\pi$ เมื่อ $n \in I\}$

หรือ $D_{cot} = \{x \mid x \neq n\pi$ เมื่อ $n \in I\}$

3.4.2 เรนจ์ของฟังก์ชัน cot คือ $R_{cot} = R$

เทคนิค 4

- **ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างๆ**

หลักการ

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{เมื่อ } \tan\theta \neq 0$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

$$\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1 \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

$$\cos\theta \sec\theta = 1 \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\tan\theta \cot\theta = 1 \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0 \text{ และ } \cos\theta \neq 0$$

พิสูจน์ 1. จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เมื่อ $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ และ θ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

หรือ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

2. จงแสดงให้เห็นว่า $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ เมื่อ $\tan\theta \neq 0$

เนื่องจาก $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{1}{\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]}$$

ดังนั้น $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ เมื่อ $\tan \neq 0$

3. จงแสดงให้เห็นว่า $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

วิธีที่ 1 พบว่า $1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

ดังนั้น $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

ดังนั้น $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

4. จงแสดงให้เห็นว่า $\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

วิธีที่ 1 *พบว่า* $\cot^2\theta + 1 = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

ดังนั้น $\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

วิธีที่ 2 *เนื่องจาก* $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

ดังนั้น $\cot^2\theta + 1 = 1$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

5. จงแสดงให้เห็นว่า $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

พบว่า $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = \sin\theta\left[\frac{1}{\sin\theta}\right]$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

ดังนั้น $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

6. จงแสดงให้เห็นว่า $\cos\theta \sec\theta = 1$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

พบว่า $\cos\theta \sec\theta = \cos\theta\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

ดังนั้น $\cos\theta \sec\theta = 1$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

7. จงแสดงให้เห็นว่า $\tan\theta \cot\theta = 1$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$

พบว่า $\tan\theta \cot\theta = \left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$

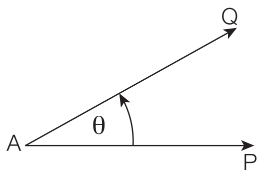
ดังนั้น $\tan\theta \cot\theta = 1$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$

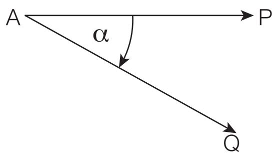
เทคนิค 5

■ มุมและการวัดมุม

หลักการ

1. พิจารณารูปต่อไปนี้





ข้อตกลง

ถ้าหมุนเส้นตรง AP รอบจุด A ไปอยู่ในแนวของเส้นตรง AQ สิ่งที่เกิดขึ้นถูกเรียกว่า **มุม**

2. ข้อตกลงเกี่ยวกับมุมที่ควรทราบ มีดังนี้

2.1 ใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่เป็นจุดยอด (Vertex) ของมุม *เช่น* A, B, C, ..., Z

2.2 จุดยอดของมุมสามารถใช้เป็นชื่อของมุมเลยนะ

2.3 ใช้ตัวอักษรกรีกแทนขนาดของมุม *เช่น* θ, α, β, γ

2.4 เรียกเส้นตรง AP ว่า *เส้นเริ่มต้น* (Initial Line) ของมุม หรือ *ด้านเริ่มต้น* (Initial Side) ของมุม

2.5 เรียกเส้นตรง AQ ว่า *เส้นสิ้นสุด* (Terminal Line) ของมุม หรือ *ด้านสิ้นสุด* (Terminal Side) ของมุม

3. หน่วยที่นิยมใช้วัดมุมมี 2 ชนิด คือ

3.1 มุมที่ถูกวัดออกมาเป็นองศา (°)

3.1.1 มุมที่เกิดจากการหมุนเส้นตรงไปครบรอบมีขนาด 360 องศา (360°)

3.1.2 มุมขนาด 1 องศา คือ 1 ใน 360 ส่วน ของมุมรอบจุด

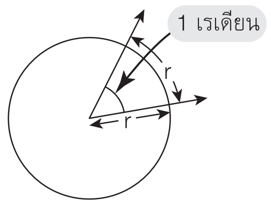
3.1.3 มุมขนาด 1 ลิปดา ($1'$) คือ 1 ใน 60 ส่วน ของมุม 1 องศา

3.1.4 มุมขนาด 1 ฟิลิปดา ($1''$) คือ 1 ใน 60 ส่วน ของมุม 1 ลิปดา

แสดงว่า $1^\circ = 60'$

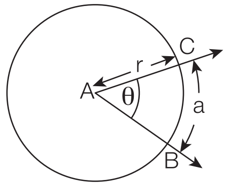
$1' = 60''$

3.2 มุมที่ถูกวัดออกมาเป็นเรเดียน (Radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ถูกรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน ซึ่งสามารถแสดงมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน ได้ดังรูป

4. กำหนดให้ A เป็นจุดยอดของมุมใด ๆ โดยที่จุดยอดของมุมอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วย ซึ่ง θ เป็นขนาดของมุม A และ a เป็นความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม A ดังรูป



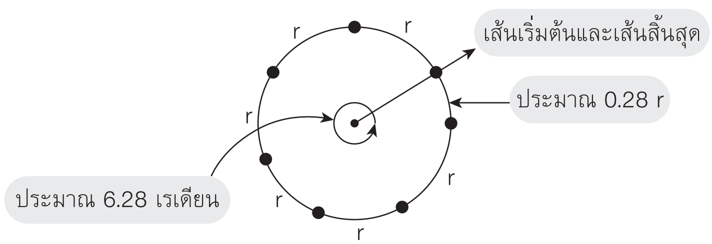
จะได้ ขนาดของมุม A $= \dfrac{\text{ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม A}}{\text{รัศมีของวงกลม}}$ เรเดียน

ดังนั้น ขนาดของมุม A $= \dfrac{a}{r}$ เรเดียน

♦• เทคนิคย่อย 5.1 *การวิเคราะห์เพิ่มเติมเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม*

หลักการ

ลองเป็นคนอยากรู้ซิว่า เส้นรอบวงของวงกลมรัศมี r หน่วย มีขนาดเป็นกี่เท่าของรัศมี เขียนรูปดูนะ



จากรูป เส้นรอบวงยาวประมาณ 6.28 r

มุมรอบวง $= \dfrac{\text{เส้นรอบวง (ประมาณ 6.28r)}}{\text{รัศมีของวงกลม (r)}}$

จะได้ มุมรอบวงประมาณ 6.28 เรเดียน ... (1)

<u>*เราทราบนะว่า ถ้ามีวงกลมวงหนึ่งที่มีรัศมี r หน่วย*</u> เส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย

$$\text{มุมรอบวง} = \frac{\text{เส้นรอบวง } (2\pi r)}{\text{รัศมีของวงกลม } (r)}$$

จะได้ $\quad \text{มุมรอบวง} = 2\pi r \qquad \ldots (2)$

จาก (1) และ (2) ทำให้ทราบว่า 2π ประมาณ 6.28 เรเดียน

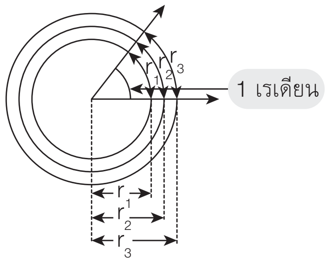
และ เป็นจริงด้วยว่า π ประมาณ 3.14 เรเดียน

<u>สิ่งที่ควรทราบ</u>

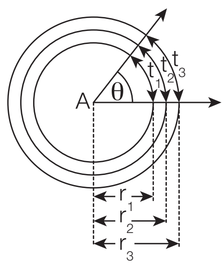
1. มุมรอบวงเป็น 360 องศา หรือ 2π เรเดียน (ประมาณ 6.28 เรเดียน) และยังเป็นจริงแน่ๆ ว่า 180 องศา สามารถเปรียบเทียบได้กับ π เรเดียน (ประมาณ 3.14 เรเดียน)

<u>จุดเห็น</u> ความจริงนี้ควรคุ้นเคยให้มากๆ นะ เพราะจะใช้ในการเปลี่ยนกลับไปกลับมาระหว่างระบบองศากับเรเดียน

2. มุมขนาด 1 เรเดียน จะมีค่าคงที่เสมอ ไม่ว่าวงกลมนั้นจะมีขนาดเท่าไรก็ตาม ดังรูป

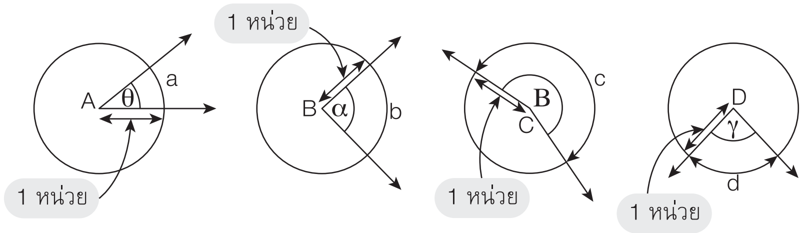


3. เรายังเขียนรูปให้เห็นได้อีก ดังนี้



จาก ขนาดของมุม $A = \theta = \frac{t_1}{r_1} = \frac{t_2}{r_2} = \frac{t_3}{r_3}$ ไม่ขึ้นกับขนาดของวงกลมเช่นกันนะ

4. ถ้าวงกลมมีรัศมียาว 1 หน่วย มีจุดเด่นที่น่าทึ่งแฝงอยู่ ดังนี้



จากรูป

$$\text{ขนาดของมุม A} = \theta = \frac{\text{ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม A}}{\text{รัศมีของวงกลม}} = \frac{a}{1} = a \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ขนาดของมุม B} = \alpha = \frac{\text{ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม B}}{\text{รัศมีของวงกลม}} = \frac{b}{1} = b \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ขนาดของมุม C} = \beta = \frac{\text{ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม C}}{\text{รัศมีของวงกลม}} = \frac{c}{1} = c \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ขนาดของมุม D} = \gamma = \frac{\text{ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม D}}{\text{รัศมีของวงกลม}} = \frac{d}{1} = d \text{ เรเดียน}$$

<u>สิ่งที่ควรเห็น</u> สำหรับวงกลมรัศมี 1 หน่วย มุมที่จุดศูนย์กลางถูกรองรับด้วยส่วนโค้งยาว t หน่วย จะมีค่าเป็น t เรเดียนเลยนะ

5. มิติของมุมเป็นเรเดียน คือ $\frac{\text{หน่วยของความยาว}}{\text{หน่วยของความยาว}}$

หน่วยของความยาวตัดกันหมดไป โดยทั่วไปการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนมักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ เป็นข้อตกลงกันนะว่า ถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ แล้วให้ถือว่ามุมนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน

♦• เทคนิคย่อย 5.2 *การเปลี่ยนหน่วยวัดขนาดของมุมระหว่างหน่วยองศากับหน่วยเรเดียนกันไปมา*

หลักการ

180 องศา = π เรเดียน

360 องศา = 2π เรเดียน

สิ่งที่ควรพิจารณา

1. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนเรเดียนเวกเตอร์ไป 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน ดังนั้น

360 องศา = 2π เรเดียน

180 องศา = π เรเดียน

1 องศา = $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

1 เรเดียน = $\frac{180}{\pi}$ องศา

ข้อตกลง การเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน มักไม่เขียนหน่วยกำกับเอาไว้

ดังนั้น ถ้ามีใครกล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ แล้วให้ถือเลยนะว่ามุมนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน

2. จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียนในข้อ 1. ทำให้เราทราบว่า

ถ้ามีใครให้ขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่ง แล้วเราสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้ โดยใช้บัญญัติไตรยางศ์ เช่น

2.1 จงเปลี่ยน $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน ให้เป็นองศา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

จะได้ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{\pi}{2} \times \frac{180}{\pi}$ องศา

ดังนั้น $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน เท่ากับ 90 องศา

2.2 จงเปลี่ยน 60 องศา ให้เป็นเรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

จะได้ 60 องศา เท่ากับ $60 \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

ดังนั้น 60 องศา เท่ากับ $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน

◉◎ **ตัวอย่าง 1** จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้ให้เป็นหน่วยเรเดียน

1. 270° 2. 60°
3. -315° 4. -120°

วิธีทำ 1. เนื่องจาก 180 องศา $= \pi$ เรเดียน

จะได้ 270 องศา $= 270 \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

ดังนั้น มุม 270 องศา $= \frac{3\pi}{2}$ เรเดียน

2. เนื่องจาก 180 องศา $= \pi$ เรเดียน

จะได้ 60 องศา $= 60 \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

ดังนั้น มุม 60 องศา $= \frac{\pi}{3}$ เรเดียน

3. เนื่องจาก 180 องศา $= \pi$ เรเดียน

จะได้ -315 องศา $= (-315) \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

ดังนั้น มุม -315 องศา $= -\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน

4. เนื่องจาก 180 องศา $= \pi$ เรเดียน

จะได้ -120 องศา $= (-120) \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

ดังนั้น มุม -120 องศา $= -\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน

◉◎ **ตัวอย่าง 2** จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้ ให้เป็นหน่วยองศา

1. $\frac{5\pi}{6}$ 2. $-\frac{3\pi}{2}$
3. $\frac{2\pi}{3}$ 4. $\frac{7\pi}{4}$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก π เรเดียน $= 180$ องศา

จะได้ $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน $= \frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi}$ องศา

ดังนั้น มุม $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน $= 150^\circ$

2. เนื่องจาก π เรเดียน $= 180$ องศา

จะได้ $-\frac{3\pi}{2}$ เรเดียน $= \left[-\frac{3\pi}{3}\right] \times \frac{180}{\pi}$

ดังนั้น มุม $-\frac{3\pi}{2}$ องศา $= -270^\circ$ เรเดียน

3. เนื่องจาก π เรเดียน $= 180$ องศา

จะได้ $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน $= \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$

ดังนั้น มุม $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน $= 120^\circ$

4. เนื่องจาก π เรเดียน $= 180$ องศา

จะได้ $\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน $= \frac{7\pi}{4} \times \frac{180}{\pi}$

ดังนั้น มุม $\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน $= 315^\circ$

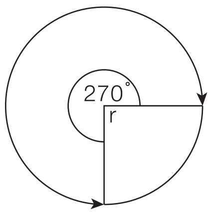
♦• เทคนิคย่อย 5.3 *การหาขนาดของมุม เมื่อกำหนดความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม และรัศมีของวงกลม*

หลักการ

$$\text{ขนาดของมุม } (\theta) = \frac{\text{ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม}}{\text{รัศมีของวงกลม}}$$

◉⊙ ตัวอย่าง 1 มีม้าตัวหนึ่งถูกผูกเชือกไว้กับเสา ถ้าม้าเดินไปเป็นระยะทาง $\frac{15\pi}{6r}$ เมตร โดยที่เชือกตึง และเชือกกวาดมุมไป $\frac{3\pi}{2}$ เรเดียน จงหาว่าเชือกที่ใช้ผูกม้าไว้กับเสามีความยาวเท่าไร

วิธีทำ *จากโจทย์* มุม $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$



จาก ขนาดของมุม $= \frac{\text{ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม}}{\text{รัศมีของวงกลม}}$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{15\pi}{6r}$$

$$r = \frac{30\pi}{18\pi}$$

$$r = \frac{5}{3}$$

ดังนั้น เชือกที่ใช้ผูกม้าไว้กับเสามีความยาว $= \frac{5}{3}$ เมตร

◉⊙ ตัวอย่าง 2 นาฬิกาเรือนหนึ่ง เดินไปเป็นเวลา 2 ชั่วโมง จงหามุมที่เข็มนาฬิกาที่จะกวาดไปได้ เมื่อเทียบกับตำแหน่งเริ่มต้น

วิธีทำ ในเวลา 60 นาที เข็มนาที จะกวาดมุมไปได้ $= -2\pi$ เรเดียน

ถ้าเวลา 120 นาที เข็มนาที จะกวาดมุมไปได้ $= 120 \times \left[\frac{-2\pi}{60}\right]$ เรเดียน

$= -4\pi$ เรเดียน

ดังนั้น นาฬิกาเดินไปเป็นเวลา 2 ชั่วโมง จะกวาดมุมไปได้ $= -4\pi$ เรเดียน

ข้อสังเกต *ถ้าวัดมุมไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา แล้วค่ามุมจะเป็นจำนวนบวก และถ้าวัดมุมไปในทิศตามเข็มนาฬิกา แล้วค่ามุมจะเป็นจำนวนลบ*

♦• เทคนิคย่อย 5.4 *การหาพื้นที่สามเหลี่ยมฐานโค้ง*

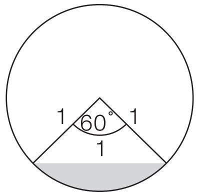
หลักการ

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยมฐานโค้ง} = \left[\frac{\theta}{360^\circ}\right] \times (\pi r^2)$$

◉⊙ ตัวอย่าง 1 พื้นที่ภายในวงกลมรัศมียาว 1 เมตร ถูกแบ่งเป็น 2 ส่วนด้วยคอร์ดยาว 1 เมตร พื้นที่ส่วนน้อยของวงกลมเท่ากับข้อใดดังต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ ตร.เมตร
2. $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตร.เมตร
3. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ ตร.เมตร
4. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตร.เมตร

วิธีทำ *เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ ดังนี้*



จากรูป

พื้นที่แรเงา = พื้นที่ฐานโค้ง - พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

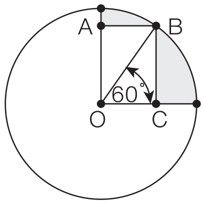
$= \left[\left[\frac{\theta}{360^\circ}\right] \times \pi r^2\right] - \left[\frac{\sqrt{3}}{4}(\text{ด้าน})^2\right]$

$= \left[\left[\frac{\theta}{360^\circ}\right] \times \pi(1)^2\right] - \left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2\right]$

จะได้ พื้นที่แรเงา = $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

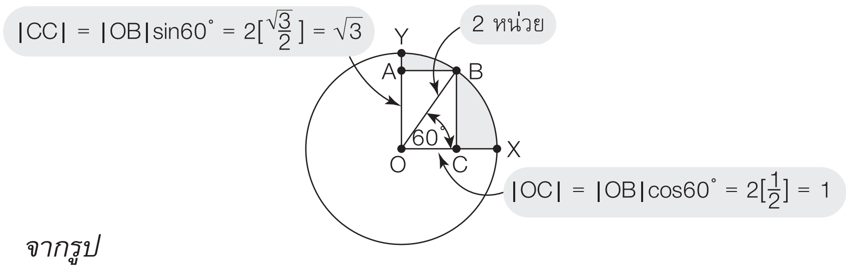
ดังนั้น พื้นที่ส่วนน้อยของวงกลมเท่ากับ $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตร.เมตร **ตอบ** ตัวเลือก 4

◉◎ **ตัวอย่าง 2** จากรูป กำหนดให้รัศมีของวงกลมเท่ากับ 2 หน่วย และ OABC เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า พื้นที่ของรูปส่วนที่แรเงาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. $\pi - \sqrt{3}$ ตารางหน่วย
2. $\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย
3. $\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตารางหน่วย
4. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

วิธีทำ *เขียนรูปตามโจทย์ดังนี้*



จากรูป

1. พื้นที่สามเหลี่ยมฐานโค้ง OXY เท่ากับ $\left[\frac{90^\circ}{360^\circ}\right] \times [\pi(2)^2] = \frac{1}{4}(4\pi) = \pi$ ตารางหน่วย

   จะได้ พื้นที่สามเหลี่ยมฐานโค้ง OXY เท่ากับ π ตารางหน่วย

2. พื้นที่สี่เหลี่ยม OABC เท่ากับ $|OC||CB| = (1)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ตารางหน่วย

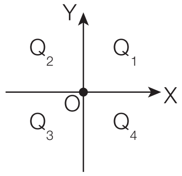
ดังนั้น พื้นที่ของรูปส่วนที่แรเงาเท่ากับ $\pi - \sqrt{3}$ ตารางหน่วย **ตอบ** ตัวเลือก 1

♦• เทคนิคย่อย 5.5 *มุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน (Angles in Standard Position)*

หลักการ

1. **ระนาบ** คือ บริเวณพื้นราบที่เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกันและตั้งฉากกัน

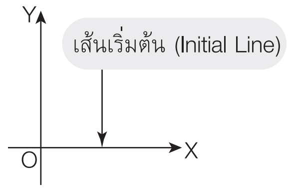
2. **ระบบแกนมุมฉาก** เกิดจากเส้นจำนวน 2 เส้น ลากบนพื้นราบโดยให้เส้นหนึ่งเป็นแนวราบ และอีกเส้นหนึ่งเป็นแนวดิ่ง และให้จุดกำเนิด (Origin) อยู่ที่จุดตัดตรงกลางของเส้นจำนวนทั้งสอง และแต่ละบริเวณที่ถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วน ด้วยแกนราบกับแกนดิ่งถูกเรียกว่า ควอดรันต์ (Quadrant : Q) ที่ 1, 2, 3 และ 4 โดยที่ควอดรันต์ที่ 1 เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยแกนราบที่เป็นบวกกับแกนดิ่งที่เป็นบวกและเรียงตามทิศทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ ดังรูป



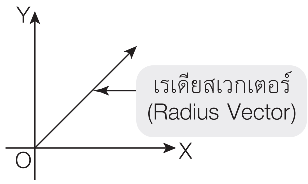
จุด O คือ จุด origin
แกนราบ คือ แกน X
แกนดิ่ง คือ แกน Y

3. กำหนดให้มุมใดๆ จะเป็นมุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานจะต้องประกอบไปด้วยเงื่อนไขดังนี้

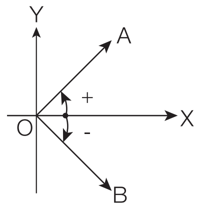
3.1 แกน X ที่เป็นบวกของระบบพิกัดฉาก ถูกเรียกว่า **เส้นเริ่มต้น (Initial Line)**



3.2 เส้นที่ลากออกมาจากจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก ถูกเรียกว่า **เรเดียสเวกเตอร์ (Radius Vector) หลักสูตรไม่ได้กล่าวไว้นะ** แต่ผู้เขียนจำเป็นต้องกล่าวในบทเรียนนี้ เพราะจะช่วยให้ผู้ศึกษาได้เข้าใจมากขึ้น



3.3 มุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน (Angle in Standard Position) ให้เริ่มวัดมุมออกจากเส้นเริ่มต้น (Initial Line) ไปสิ้นสุดยังเรเดียสเวกเตอร์ (Radius Vector)



จากรูป ถ้าวัดมุมไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา แล้วค่ามุมจะเป็นจำนวนบวก
และ ถ้าวัดมุมไปในทิศตามเข็มนาฬิกา แล้วค่ามุมจะเป็นจำนวนลบ

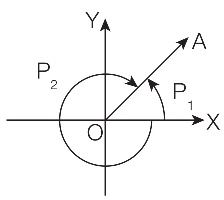
3.4 ค่ามุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานที่วัดได้ถือว่าเป็นค่ามุมประจำตัวของเรเดียสเวกเตอร์ (Radius Vector) เลยนะ

3.5 ค่ามุมที่เริ่มวัดออกจากเส้นเริ่มต้น (Initial Line) ไปสิ้นสุดยังเรเดียสเวกเตอร์ (Radius Vector) ครั้งแรกโดยไม่เลยผ่าน ถูกเรียกว่า **ค่ามุมหลัก (Principle Angle)** โดยทั่วไปใช้สัญลักษณ์เป็น P

3.6 เซตของค่ามุมทั้งหมดของเรเดียสเวกเตอร์ (Radius Vector) ใดๆ ถูกเรียกว่า **มุมทั่วไป (General Angle)**

สิ่งที่ควรทราบ

1. *ค่ามุมหลัก (Principle Angle)* ของเรเดียสเวกเตอร์เส้นหนึ่งจะต้องมี 2 ค่า เสมอดังรูป

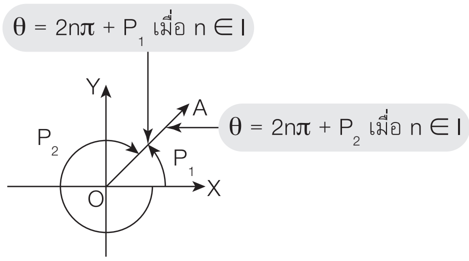


P_1 จะเป็นจำนวนบวก
P_2 จะเป็นจำนวนลบ

2. ข้อกำหนดไม่ได้บอกเราว่า **การวัดค่ามุม** จะต้องสิ้นสุดอย่างไร แสดงว่าค่ามุมที่เริ่มวัดออกจากเส้นเริ่มต้น ไปสิ้นสุดยังเรเดียสเวกเตอร์ อาจจะสิ้นสุดครั้งแรกโดยไม่เลยผ่าน หรือเลยผ่านไปกี่รอบก็ได้ แล้วคอยสิ้นสุดที่เรเดียสเวกเตอร์ก็ไม่ผิดกติกา

แสดงว่า เรเดียสเวกเตอร์ เส้นหนึ่งจะมีค่ามุมได้มากมาย ดังนี้

กำหนดให้ θ เป็นค่ามุมทั่วไป (General Angle)



θ = ± (จำนวนรอบ) · $(360^\circ) + P$

$\theta = n(360^\circ) + P$ เมื่อ $n \in I$

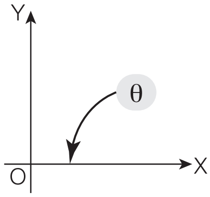
$\theta = n(2\pi) + P$ เมื่อ $n \in I$

$\theta = 2n\pi + P$ เมื่อ $n \in I$

$\theta = 2n\pi$ + (ค่ามุมหลัก) เมื่อ $n \in I$

ดังนั้น การที่เราจะประกาศมุมทั่วไป (General Angle) จะต้องหาค่ามุมหลัก (Principle Angle) ออกมาให้ได้ก่อนจะเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบก็ได้

◉◎ **ตัวอย่าง 1** จงหาค่ามุมทั่วไป (θ) ของเรเดียสเวกเตอร์ ตามรูป

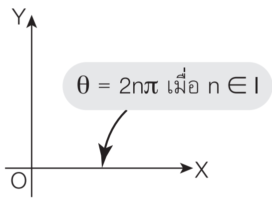


วิธีทำ *จากโจทย์* $\theta = 2n\pi + P$ เมื่อ $n \in I$

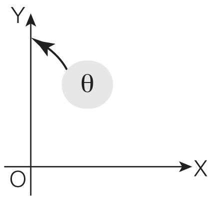
ค่ามุมหลัก (P) = 0 เรเดียน

จะได้ $\theta = 2n\pi + 0$ เมื่อ $n \in I$

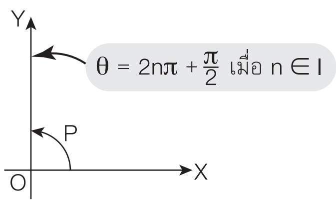
ดังนั้น $\theta = 2n\pi$ เมื่อ $n \in I$ ดังรูป



◉◎ **ตัวอย่าง 2** จงหาค่ามุมทั่วไป (θ) ของเรเดียสเวกเตอร์ ตามรูป



วิธีทำ *จากโจทย์* $\theta = 2n\pi + P$ เมื่อ $n \in I$



ค่ามุมหลัก (P) = $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน

เป็นจำนวนบวก เพราะวัดทวนเข็มนาฬิกา

ดังนั้น $P = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $n \in I$