

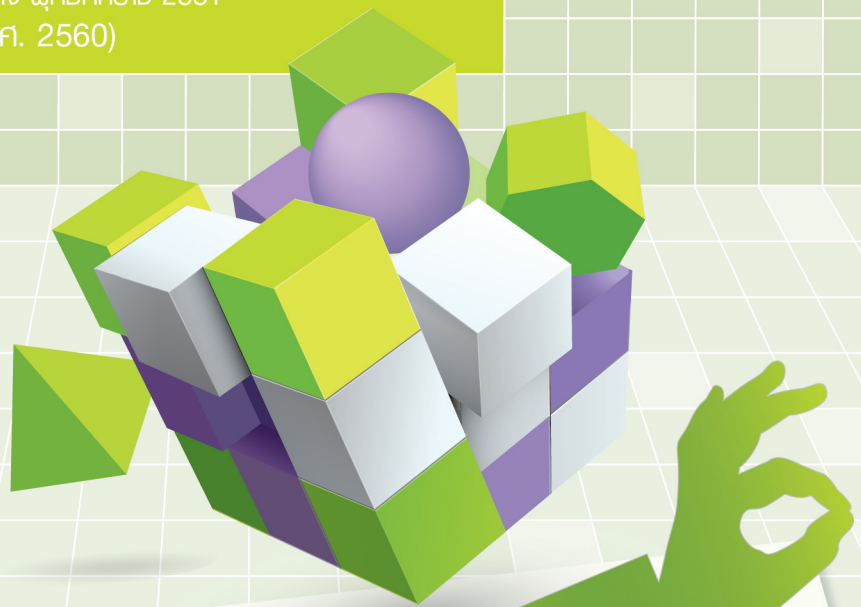
สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม

ม.4 เล่ม 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลาง พุทธศักราช 2551
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)



จะเขียนคัมและกฎทาง
ต้องอ่าน เล่มนี้เท่านั้น

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เนื้อหา

- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม
- เรขาคณิตวิเคราะห์

เรียบเรียงโดย

ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

วศ.บ. (ไฟฟ้า ภูเขา)
ค.ม. (การจัดการคุณภาพ มรท.สวนสุนันทา)
ศษ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)
นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทยา และเทคโนโลยีการศึกษา

สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม

ม.4 เล่ม 2

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551



จะเขียนคณและจากทาง
ต้องอ่าน เล่มนี้ไ้เท่านั้น

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เนื้อหา

- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
- และฟังก์ชันลอการิทึม
- เรขาคณิตวิเคราะห์

เรียบเรียงโดย

ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

วศ.บ. (ไฟฟ้า วิทยา)

ค.บ. (การจัดการคุณภาพ มรณ.สวนสุนันทา)

ศษ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)

นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทยา การจัดการคุณภาพ และเทคโนโลยีการศึกษา

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. ๒๕๕๘

สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

U.4 เล่ม 2 (เพิ่มเติม)

ผู้เรียบเรียง : **ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง**

กองบรรณาธิการ : อรศรี โรจน์พจนรัตน์, อมรศักดิ์ บุญเรือง, ณัฏฐ์ธินัน ลูกเสือธรา, สถาพร พุทธิศิริพร,
พิรุณณิชา ใบสุวรรณ, มนชญา กมลวานนท์, ยุภาภรณ์ แดงมณี

จัดพิมพ์โดย : บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด

12 หม่อมแฝ้ว แยก 3 ถนนพระราม 6 (ซอย 41) แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กรุงเทพฯ 10400
โทร 02-279-6222 (อัตโนมัติ 15 คู่สาย) โทรสาร 02-279-6203-4

พิมพ์ที่ : บริษัท เรืองแสงการพิมพ์ (2002) จำกัด
48/1722 หมู่ 7 ซ.หมู่บ้าน ดี.เค. ถนนกาญจนาภิเษก แขวงบางบอน เขตบางบอน กรุงเทพฯ 10150

ผู้พิมพ์ - ผู้โฆษณา
นายมานิตย์ พิภพวิทยุ

หนังสือ **คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 (เพิ่มเติม)** เล่มนี้ เป็นหนังสือที่มีเนื้อหาตรงตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ และยังได้สอดแทรกเนื้อหาที่เกินหลักสูตรพร้อมทั้งเทคนิคคิดลัดต่าง ๆ ตามที่ผู้เขียนเห็นว่าสำคัญ เนื่องจากผู้เขียนเห็นว่าการศึกษาคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้นั้น ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้พื้นฐานในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี และจะต้องมีเทคนิคคิดลัดต่าง ๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถแก้ไขปัญหาโจทย์และแข่งขันกับเวลาได้อย่างรวดเร็ว

1. การอธิบายเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้จะใช้ภาษาเดียวกับภาษาที่ผู้เขียนใช้สอน ดังนั้นจึงอ่านง่ายและเพลิดเพลินไปกับบทเรียน ทำให้ผู้อ่านมีความรู้สึกเหมือนกับว่าผู้เขียนมาสอนให้เองเลย
2. ครอบคลุมเนื้อหาพื้นฐานที่สำคัญโดยจะมีการแบ่งเนื้อหาให้เป็นระบบเพื่อจะได้ศึกษาได้ง่าย
3. โจทย์ในหนังสือเล่มนี้จะมีมากมายเพียงพอที่ผู้ศึกษาจะฝึกทำเพื่อเสริมสร้างทักษะและประสบการณ์ในการทำโจทย์
4. หนังสือเล่มนี้จะเน้นถึงเทคนิคและการวิเคราะห์โจทย์ต่าง ๆ อย่างเป็นระบบ
5. มีเทคนิคคิดลัดต่าง ๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาทำข้อสอบแข่งขันได้อย่างรวดเร็ว
6. แนวข้อสอบเตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัย ระบบ TCAS

สุดท้ายนี้ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะให้ประโยชน์แก่ผู้อ่าน และขอขอบคุณ บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด ที่ให้โอกาสแก่ผู้เขียนได้เขียนหนังสือที่อยากเขียน สำหรับคุณงามความดีที่พึงมีจากหนังสือเล่มนี้ ขอมอบให้แก่ พ่อแม่ครูอาจารย์ คือ พระราชสังวรญาณ (พุธ ฐานิโย) บุปผารี คือ ผอ.ประเสริฐ วรรณโพธิ์กลาง และนางสนาน วรรณโพธิ์กลาง พร้อมทั้งครูอาจารย์ผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาแก่ผู้เขียน

ด้วยความปรารถนาดี
จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง
(ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง)

บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์	1
คู่อันดับ	1
ผลคูณคาร์ทีเซียน	2
ความสัมพันธ์และการเขียนความสัมพันธ์	10
ลักษณะของความสัมพันธ์	13
โดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์	14
ตัวผกผันของความสัมพันธ์	20
ฟังก์ชัน	22
การเขียนฟังก์ชัน	23
การตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่	26
โดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน	28
การจำแนกฟังก์ชัน	40
ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	44
ชนิดของฟังก์ชันเบื้องต้นที่ควรทราบ	46
การเขียนกราฟ โดยอาศัยการเลื่อนกราฟ	51
การหาค่าฟังก์ชัน	53

ฟังก์ชันผกผัน	55
การดำเนินการของฟังก์ชัน	65
ฟังก์ชันประกอบ	68
◎ แบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลย	81

บทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

เลขยกกำลัง	87
เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม	87
รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์	92
เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	104
การทำโจทย์เลขยกกำลังที่มีเลขยกกำลังเป็นตัวแปร	105
การแก้สมการที่เกี่ยวข้องกับเลขยกกำลัง	108
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	116
การเปรียบเทียบค่าของเอกซ์โพเนนเชียล	121
สมการและการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล	124
อสมการและการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล	126
กราฟต่างๆ ที่มีรูปแบบคล้ายฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	129

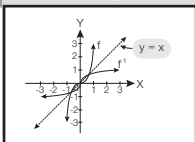
ฟังก์ชันลอการิทึม	139
การเปรียบเทียบค่าลอการิทึม	153
การทำโจทย์เกี่ยวกับความจริงของลอการิทึม	155
สมการและการแก้สมการลอการิทึม	159
อสมการและการแก้สมการลอการิทึม	169
กราฟต่าง ๆ ที่มีรูปร่างคล้ายฟังก์ชันลอการิทึม	172
ลอการิทึมสามัญ	179
แอนติลอการิทึม	182
ลอการิทึมธรรมชาติ	183
การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	185
◎ แบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลย	192

บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	198
ระบบพิกัดฉาก	198
โพเจกชันของจุด	199
โพเจกชันของส่วนของเส้นตรง	200

ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	201
จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	203
พิกัดของจุดแบ่งจุดเดียวของเส้นตรง	205
พิกัดของจุดแบ่งหลายจุดของเส้นตรง	206
จุดตัดของเส้นมีนัยฐาน	207
การคำนวณหาพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม	209
ความชันของเส้นตรง	211
เส้นขนาน	217
เส้นตั้งฉาก	220
มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นตัดกัน	222
ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง	223
รูปแบบทั่วไปของสมการเส้นตรง	233
เส้นตรงกับโปรเจกชันของจุด	236
ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด	236
ระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน	238
การหาสมการเส้นแบ่งครึ่งมุมที่เส้นตรงตัดกัน	239

ภาคตัดกรวย	239
การเลื่อนแกนทางขนาน	241
วงกลม	242
วงรี	261
พาราโบลา	285
ไฮเพอร์โบลา	313
การหาสมการของเส้นโค้งที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของจุด	335
การตรวจสอบสมการ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$	338
สมการทั่วไปของภาคตัดกรวย	341
◎ แบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลย	342



เทคนิค

1

ความสัมพันธ์

หลักการ ผู้เขียนจะแสดงถึงความสัมพันธ์โดยจะเรียงเนื้อหาจากคู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียนไปจนถึงความสัมพันธ์ดังนี้

■ เทคนิคย่อย 1.1 คู่อันดับ (Ordered Pairs)

หลักการ ในคณิตศาสตร์ คู่อันดับ จะถูกเขียนอยู่ในรูป (a, b) โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง

ทำให้ทราบว่า 1. คู่อันดับจะถือว่าตำแหน่งของสมาชิกตัวหน้า และสมาชิกตัวหลังเป็นสำคัญ
2. ถ้าเราสลับสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับแล้วจะเกิดคู่อันดับใหม่

และเป็นจริงด้วยว่า 1. $(a, b) \neq (b, a)$ ยกเว้นในกรณีที่ $a = b$ เท่านั้น
เช่น $(2, 3) \neq (3, 2)$
2. $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$



ตัวอย่าง 1

ถ้ากำหนดให้ $(x, y) = (3, 2x - 5)$

จงหาค่าของ x กับ y

วิธีทำ จากความจริงที่ว่า $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

$$\text{จะได้ } x = 3 \quad \dots (1)$$

$$y = 2x - 5 \quad \dots (2)$$

แก้สมการ (1) กับ (2) จะได้ $x = 3$ และ $y = 1$



ตัวอย่าง 2

ถ้ากำหนดให้ $(x - \frac{1}{x}, x^2 + \frac{1}{x^2}) = (4, 2y)$ แล้วจงหาค่า y

วิธีทำ จากความจริงที่ว่า $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

$$\text{จะได้ } x - \frac{1}{x} = 4 \quad \dots (1)$$

$$\text{และ } x^2 + \frac{1}{x^2} = 2y \quad \dots (2)$$

นำสมการ (1) มายกกำลังสอง

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad x^2 - 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} &= 16 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= 16 + 2 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= 18 \quad \dots (3) \\ \text{แก้สมการ (2) กับ (3) จะได้} \quad 18 &= 2y \\ \text{ดังนั้น} \quad y &= 9\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 3\}$

วิธีทำ

1. จงสร้างคู่อันดับทุกคู่โดยสมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ A และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ B

ได้แก่ $(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3), (3, 0), (3, 3)$

2. จงสร้างคู่อันดับทุกคู่ โดยสมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ B และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ A

ได้แก่ $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$

เทคนิคย่อย 1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

บทนิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

ข้อตกลง ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$

และ

มีภาษาคณิตศาสตร์เป็น $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

▼ คำแปลจากบทนิยาม

1. ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับเซต B คือ เซตของคู่อันดับทุกคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้ามาจากเซต A และสมาชิกตัวหลังมาจากเซต B
2. ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับเซต B คือเซตใหม่โดยมีสมาชิก (x, y) ทุกตัว เกิดจากการจับคู่อย่างเต็มเหนี่ยวสุดขีดจากสมาชิก x ของเซต A และมีสมาชิก y ของเซต B
3. สามารถเขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ โดยที่ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับเซต B มีสัญลักษณ์ $A \times B$ ถูกอ่านออกเสียงว่า “A CROSS B”

4. ถ้ามีใครกำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{m, n\}$ แล้วเราสามารถจะเขียนแผนภาพและแจกแจงสมาชิกของ $A \times B$ กับ $B \times A$ ได้ทันทีดังนี้



จากแผนภาพ เช่น A กับเซต B เกิดการจับคู่อย่างเต็มเหนี่ยวสุดขีด จะได้

$$A \times B = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n)\}$$

$$B \times A = \{(m, a), (m, b), (m, c), (n, a), (n, b), (n, c)\}$$

ข้อสังเกต

1. $A \times B \neq B \times A$

2. กำหนดให้ $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A

$n(B)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต B

เนื่องจาก $n(A \times B)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$

จะได้ $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

◆ เทคนิคย่อย 1.2.1 การหาค่าความจริงรอบๆ บทนิยามผลคูณคาร์ทีเซียน

หลักการ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

และ

มีภาษาคณิตศาสตร์เป็น $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

◆ ความจริงของผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนดให้ A, B, C เป็นเซตใดๆ

1. $A \times B \neq B \times A$

2. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

3. $A \times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$

4. ถ้า A, B, C เป็นเซตที่มีสมาชิกแบบเดียวกัน พบว่า

4.1 $A \cap (B \times C) = \emptyset$

4.2 $A \cup (B \times C) \neq \emptyset$ เป็นเซตที่มีสมาชิกแบบเดิมผสมกับคู่ลำดับ

5. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

6. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

7. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
8. $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$
9. $A \cap (B \times C) \neq (A \cap B) \times (A \cap C)$
10. $A - (B \times C) \neq (A - B) \times (A - C)$
11. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
12. $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$
13. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
14. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$
15. ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \times C \subset B \times D$

◆ เทคนิคย่อย 1.2.2 การหาจำนวนสับเซตทั้งหมดของผลคูณคาร์ทีเซียน

หลักการ กำหนดให้ $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A

$n(B)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต B

$n(A \times B)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$

จะได้ $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

และ จำนวนสับเซตทั้งหมดของ $A \times B$ คือ $2^{n(A \times B)} = 2^{n(A) \times n(B)}$

หมายเหตุ เราอาจหาจำนวนสับเซตทั้งหมดของผลคูณคาร์ทีเซียนจากแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) ซึ่งจะแสดงให้เห็นตัวอย่าง 2

📌 ตัวอย่าง 1

กำหนดให้ $A = \{0, 2\}$ และ $B = \{1, 3\}$

จงหาสับเซตทั้งหมดของ $A \times B$ และ $B \times A$ ว่าจะมีกี่สับเซตและเป็นอะไรบ้าง

วิธีทำ จาก $A \times B = \{0, 2\} \times \{1, 3\}$

จะได้ $A \times B = \{(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3)\}$

พบว่า สับเซตของ $A \times B$ คือ $\emptyset, \{(0, 1)\}, \{(0, 3)\}, \{(2, 1)\}, \{(2, 3)\},$

$\{(0, 1), (0, 3)\}, \{(0, 1), (2, 1)\}, \{(0, 1), (2, 3)\}, \{(0, 3), (2, 1)\}, \{(0, 3), (2, 3)\},$

$\{(2, 1), (2, 3)\}, \{(0, 1), (0, 3), (2, 1)\}, \{(0, 1), (0, 3), (2, 3)\}, \{0, 1, (2, 1), (2, 3)\},$

$\{(0, 3), (2, 1), (2, 3)\}, \{(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3)\}$

ดังนั้น จำนวนสับเซตของ $A \times B$ มีอยู่ทั้งหมด 16 สับเซต

จาก $B \times A = \{1, 3\} \times \{0, 2\}$

จะได้ $B \times A = \{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2)\}$

พบว่า สับเซตของ $B \times A$ คือ $\emptyset, \{(1, 0)\}, \{(1, 2)\}, \{(3, 0)\}, \{(3, 2)\}, \{(1, 0), (1, 2)\},$

$\{(1, 0), (3, 0)\}, \{(1, 0), (3, 2)\}, \{(1, 2), (3, 0)\}, \{(1, 2), (3, 2)\}, \{(3, 0), (3, 2)\},$

$\{(1, 0), (1, 2), (3, 0)\}, \{(1, 0), (1, 2), (3, 2)\}, \{(1, 0), (3, 0), (3, 2)\}, \{(1, 2), (3, 0), (3, 2)\},$

$\{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2)\}$

ดังนั้น จำนวนสับเซตของ $B \times A$ มีอยู่ทั้งหมด 16 สับเซต

ข้อสังเกต เนื่องจากจำนวนสับเซต $A \times B$ หาได้จาก $2^{n(A \times B)} = 2^{n(A) \times n(B)}$

$$= 2^{(2 \times 2)} = 2^4$$

ดังนั้น จำนวนสับเซตของ $A \times B$ หาได้จาก $2^{n(A \times B)} = 16$ สับเซต
 เนื่องจากจำนวนสับเซต $B \times A$ หาได้จาก $2^{n(B \times A)} = 2^{n(B) \times n(A)}$
 $= 2^{(2 \times 2)} = 2^4$
 ดังนั้น จำนวนสับเซตของ $B \times A$ หาได้จาก $2^{n(B \times A)} = 16$ สับเซต

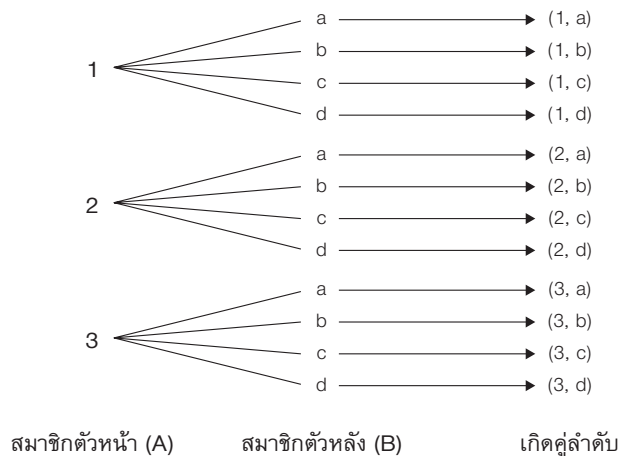


ตัวอย่าง 2

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ จงหา

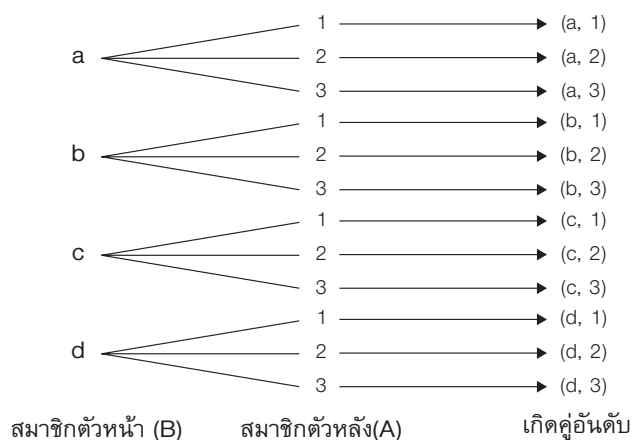
- $A \times B$
- $B \times A$ โดยใช้แผนภาพต้นไม้

วิธีทำ 1. พิจารณา $A \times B$ ดังนี้



ดังนั้น $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$

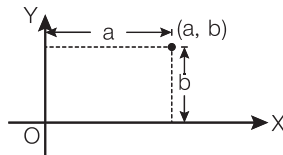
2. พิจารณา $B \times A$ ดังนี้



ดังนั้น $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$

♦ เทคนิคย่อย 1.2.3 ผลคูณคาร์ทีเซียนกับจุดบนระนาบ XY

หลักการ 1. ถ้าเรามี (a, b) เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงจะสามารถแทนมันด้วย จุดในระนาบ XY โดยห่างจากแกน X เป็นระยะ b และห่างจากแกน Y เป็นระยะ a ดังรูป

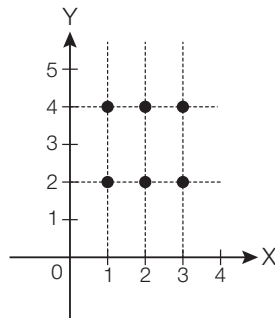


2. เซตของจุด $A \times B$ ได้จากการเขียนสมาชิกของ A ไว้บนแกนราบ และเขียนสมาชิกของ B ไว้บนแกนตั้ง แล้วลากเส้นตรงตั้งฉากจากแกนราบกับแกนตั้งตัดกัน ซึ่งจุดตัดกันดังกล่าวก็คือเซตของจุด $A \times B$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 1

วิธีทำ

กำหนดให้ $a = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 4\}$ หาเซตของจุดในระนาบ XY ของ $A \times B$
เซตของจุด $A \times B$ ในระนาบ XY หาได้จากกราฟ



ดังนั้น $A \times B$ คือเซตของจุดตัด ดังรูป

ตัวอย่าง 2

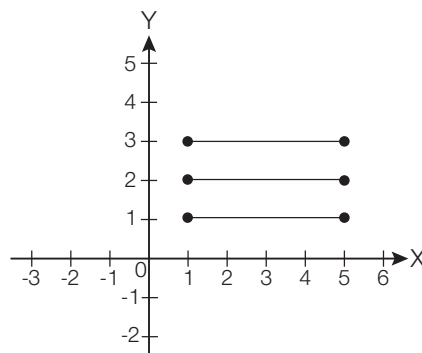
วิธีทำ

กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$
จงหาเซตของในระนาบ XY ของ $A \times B$

$A = [1, 5]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

$B = \{1, 2, 3\}$ เป็นเซตแบบไม่ต่อเนื่อง

เซตของจุด $[1, 5] \times \{1, 2, 3\}$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 3

กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\}$

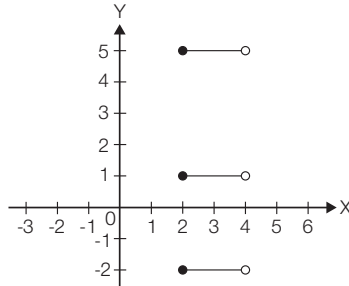
และ $B = \{-2, 1, 5\}$ จงหาเซตของ $A \times B$ ในระนาบ XY

วิธีทำ

จากโจทย์ $A = [2, 4)$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

และ $B = \{-2, 1, 5\}$ เป็นเซตแบบไม่ต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $[2, 4) \times \{-2, 1, 5\}$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 4

กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$

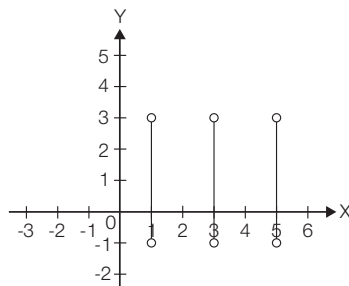
และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$ จงหาเซตของ $A \times B$ ในระนาบ XY

วิธีทำ

จากโจทย์ $A = \{1, 3, 5\}$ เป็นเซตแบบไม่ต่อเนื่อง

และ $B = (-1, 3)$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $\{1, 3, 5\} \times (-1, 3)$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 5

กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

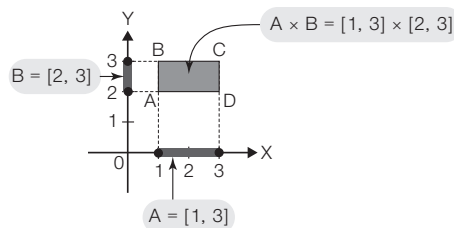
และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ จงหา $A \times B$

วิธีทำ

จากโจทย์ $A = [1, 3]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

และ $B = [2, 3]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $A \times B = [1, 3] \times [2, 3]$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 6

กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

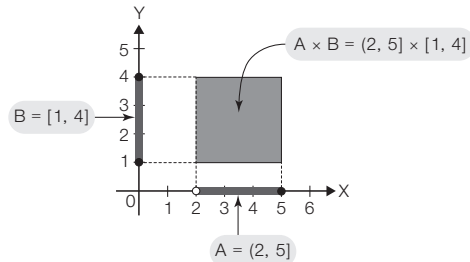
และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ จงหา $A \times B$

วิธีทำ

จากโจทย์ $A = (2, 5]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

และ $B = [1, 4]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $A \times B = (2, 5] \times [1, 4]$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 7

กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$

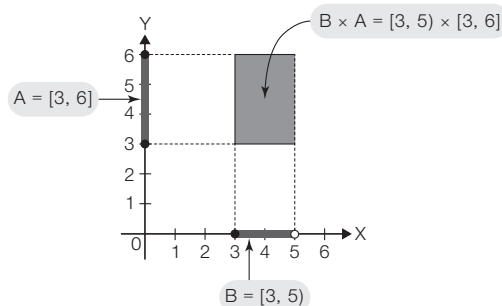
และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$ จงหา $B \times A$

วิธีทำ

จากโจทย์ $A = [3, 6]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

และ $B = [3, 5)$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $B \times A = [3, 5) \times [3, 6]$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 8

กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$

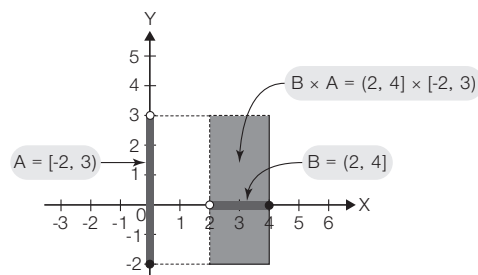
และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$ จงหา $B \times A$

วิธีทำ

จากโจทย์ $A = [-2, 3)$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

และ $B = (2, 4]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $B \times A = (2, 4] \times [-2, 3)$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 9

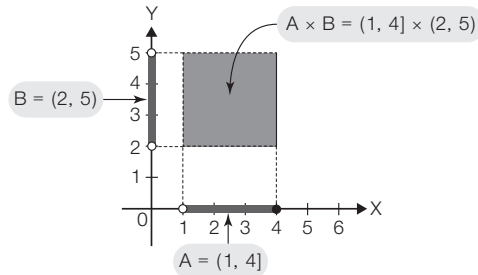
กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$

และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ จงหา $A \times B$

วิธีทำ จากโจทย์ $A = (1, 4]$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

และ $B = (2, 5)$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $A \times B = (1, 4] \times (2, 5)$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 10

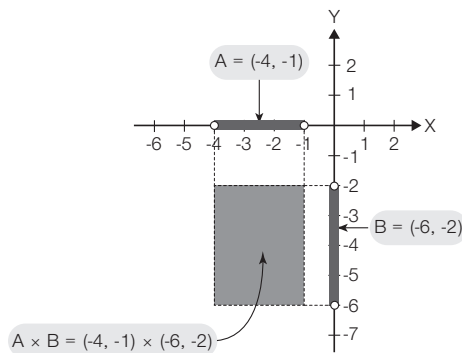
กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1\}$

และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < -2\}$ จงหา $A \times B$

วิธีทำ จากโจทย์ $A = (-4, -1)$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

และ $B = (-6, -2)$ เป็นเซตที่สมาชิกติดกันแบบต่อเนื่อง

จะได้ เซตของจุด $A \times B = (-4, -1) \times (-6, -2)$ ในระนาบ XY คือ



ตัวอย่าง 11

จงหาเซตของจุดในระนาบ XY ของ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

วิธีทำ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ เป็นเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ XY คือ



ต้องทราบเองทันทีที่ว่า

1. เซตของจุดบนแกนราบ = $\mathbb{R} \times \{0\}$

และ

2. เซตของจุดบนแกนตั้ง = $\{0\} \times \mathbb{R}$

■ เทคนิคย่อย 1.3 ความสัมพันธ์ (Relation)

หลักการ ความสัมพันธ์ เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต

▼ สิ่งที่ต้องทราบ

1. r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$
2. ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset A \times B$ แล้ว r ถูกเรียกว่า “ความสัมพันธ์จาก A ไป B ”
3. ถ้า r แทนความสัมพันธ์ที่ $r \subset A \times A$ แล้ว r ถูกเรียกว่า “ความสัมพันธ์ใน A ”
4. เนื่องจาก $\emptyset$ เป็นสับเซตของทุกเซต จะได้ $\emptyset \subset A \times B$ แสดงว่า $\emptyset$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ด้วย
5. เนื่องจาก $A \times B \subset A \times B$ แสดงว่า $A \times B$ ก็เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ด้วยเช่นกัน

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$

และ $B = \{3\}$ จงแสดงความสัมพันธ์ต่างๆ ที่ได้จาก $A \times B$

วิธีทำ $A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\}$

จากข้อกำหนดที่ว่า r จะเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$
หมายความว่า เซตอะไรที่เป็นสับเซตของ $A \times B$ จะถือว่าเป็นความสัมพันธ์ทั้งสิ้น
แสดงว่า จึงสามารถเขียนความสัมพันธ์จาก A ไป B แบบแจกแจงได้ ดังนี้

$r_1 = \emptyset$ เพราะ $\emptyset$ เป็นสับเซตของทุกเซตจะได้ $\emptyset \subset A \times B$ ด้วย

$r_2 = \{(1, 3)\}$

$r_3 = \{(2, 3)\}$

$r_4 = \{(1, 3), (2, 3)\} = A \times B$

ข้อสังเกต จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดที่เกิดจาก $A \times B = 2^{n(A \times B)}$
 $= 2^{n(A) \times n(B)}$

จากตัวอย่าง $n(A) = 2$

และ $n(B) = 1$

ดังนั้น จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดที่เกิดจาก $A \times B = 2^{2 \times 1} = 4$ ความสัมพันธ์

■ เทคนิคย่อย 1.4 การเขียนความสัมพันธ์

- หลักการ**
1. แบบแจกแจงสมาชิกเป็นเซต
 2. แบบเงื่อนไข
 3. แบบเขียนกราฟ

หมายเหตุ การเขียนความสัมพันธ์อาจมีมากกว่านี้ในระดับอื่น แต่ในระดับนี้เอาแค่นี้ก่อน

▼ การเขียนความสัมพันธ์ที่ควรทราบ

1. แบบแจกแจงสมาชิก คือ เขียนแสดงถึงสมาชิกคู่อันดับทั้งหมดที่เกิดขึ้น มี 3 แบบ คือ

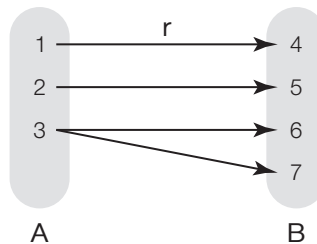
1.1 แจกแจงสมาชิกเป็นเซต

เช่น $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

1.2 แจกแจงสมาชิกแบบตาราง เช่น

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1.3 แจกแจงสมาชิกเป็นแผนภาพแสดงการจับคู่ เช่น



2. แบบบอกเงื่อนไข

2.1 บอกเงื่อนไขเป็นคำกล่าว เช่น จงสร้างความสัมพันธ์ (r) มากกว่า จาก A ไป B

2.2 สามารถเขียน y ในแบบบอกเงื่อนไขเป็น $r(x)$ ได้ดังนี้

$$r = \{(x, r(x)) \in A \times B \mid r(x) = x^2\}$$

2.3 ในกรณีที่ $(x, r(x)) \in R \times R$

เราสามารถเขียน $r = \{(x, r(x)) \in R \times R \mid r(x) = \text{เทอมของ } x\}$ ในรูปแบบสั้นๆ ได้เป็น

$$r(x) = \text{เทอมของ } x$$

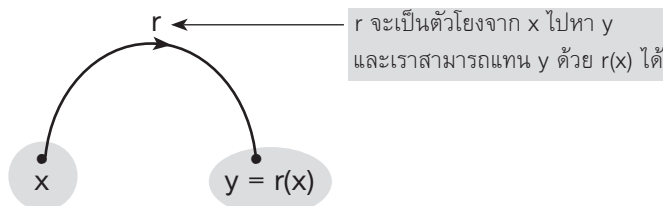
เช่น

1. $R = \{(x, r(x)) \in R \times R \mid r(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2\}$ สามารถเขียนสั้นๆ ได้ด้วย
 $r(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

2. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x + 1\}$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น
 $r = \{(x, r(x)) \in R \times R \mid r(x) = x + 1\}$ และสามารถเขียนแทนสั้นๆ ได้ด้วย
 $r(x) = x + 1$

3. $r(x)$ หมายถึง ค่าของความสัมพันธ์ r ที่ x

เนื่องจาก $y = r(x)$ จึงสามารถแสดงแผนภาพการโยงของ r ได้ดังนี้



▼ สิ่งที่เราทราบ

สำหรับ $y = r(x)$

ถ้าเราเจอ	หมายถึง
$r(x)$	ค่าของความสัมพันธ์ r ที่ x
$r(1)$	ค่าของความสัมพันธ์ r ที่ $x = 1$
$r(-3)$	ค่าของความสัมพันธ์ r ที่ $x = -3$

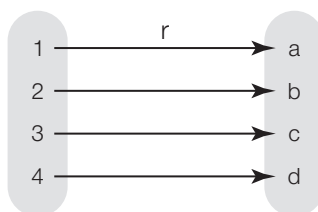
▼ สิ่งที่เราเห็น

สำหรับ $y = r(x)$

อย่าลืมนะว่าค่าของความสัมพันธ์ r ที่ x หมายถึง $r(x)$ ซึ่งเราทราบอยู่แล้วนะว่า $r(x)$ มันคือค่า y นั้นเอง ดังนั้นจึงจริงด้วยว่า

ถ้าเราเจอ	หมายถึง
$r(a)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว	ค่า y ที่ $x = a$
$r(1)$	ค่า y ที่ $x = 1$
$r(-3)$	ค่า y ที่ $x = -3$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ สามารถเขียนเป็นแผนภาพได้เป็น

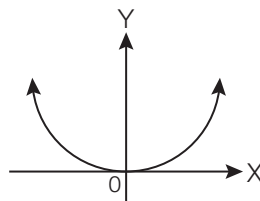
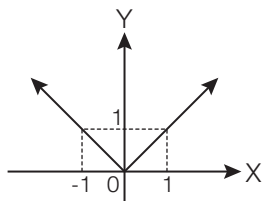


เราสามารถบอกใครๆ ได้ว่า $r(1) = a, r(2) = b, r(3) = c, r(4) = d$ นั้นเอง

3. แบบเขียนกราฟ

เช่น $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$ | $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

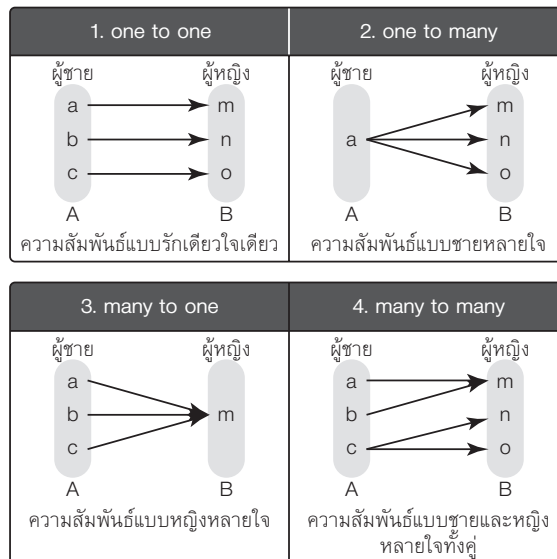
สามารถเขียนกราฟได้ ดังนี้



เทคนิคย่อยชุดที่ 1.5 ลักษณะของความสัมพันธ์

หลักการ ลักษณะของความสัมพันธ์มี 4 ลักษณะ

ผู้เขียนขอสมมติให้ เซต A เป็นผู้ชาย และ เซต B เป็นผู้หญิงเพื่อประโยชน์ในการจำเท่านั้นครับ



ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $a = \{1, 2\}$ และ $B = \{2\}$ จงหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. ความสัมพันธ์ (r_1) “มากกว่า” จาก A ไป B
2. ความสัมพันธ์ (r_2) “น้อยกว่า” จาก A ไป B
3. ความสัมพันธ์ (r_3) “หารลงตัว” จาก A ไป B
4. ความสัมพันธ์ (r_4) “มากกว่าหรือเท่ากับ” จาก A ไป B
5. ความสัมพันธ์ (r_5) “น้อยกว่าหรือเท่ากับ” จาก A ไป B

- วิธีทำ**
1. ความสัมพันธ์ (r_1) “มากกว่า” จาก A ไป B ไม่มีสมาชิกตัวใดเลยใน A ที่มากกว่าสมาชิกใน B
ดังนั้น $r_1 = \emptyset$
 2. ความสัมพันธ์ (r_2) “น้อยกว่า” จาก A ไป B มีสมาชิกใน A คือ 1 ที่มีค่าน้อยกว่าสมาชิกใน B
ดังนั้น $r_2 = \{(1, 2)\}$
 3. ความสัมพันธ์ (r_3) “หารลงตัว” จาก A ไป B มีสมาชิกใน A นำไปหารสมาชิกใน B ลงตัว
ดังนั้น $r_3 = \{(1, 2), (2, 2)\}$
 4. ความสัมพันธ์ (r_4) “มากกว่าหรือเท่ากับ” จาก A ไป B
ดังนั้น $r_4 = \{(2, 2)\}$
 5. ความสัมพันธ์ (r_5) “น้อยกว่าหรือเท่ากับ” จาก A ไป B
ดังนั้น $r_5 = \{(1, 2), (2, 2)\}$

ตัวอย่าง 2

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 4\}$ และ $B = \{3, 5\}$

จงแสดงความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ เป็นแบบแจกแจงสมาชิก

1. $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$
2. $r_2 = \{(x, y) \in B \times A \mid x > y\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y > 8\}$
4. $r_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y \leq 5\}$
5. $r_5 = \{(x, y) \in B \times A \mid x \geq y^2\}$

วิธีทำ

1. $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$
 $(x, y) \in A \times B$ มีความหมายว่า $x \in A$ และ $y \in B$
ดังนั้น $r_1 = \{(4, 3)\}$
2. $r_2 = \{(x, y) \in B \times A \mid x > y\}$
 $(x, y) \in B \times A$ มีความหมายว่า $x \in B$ และ $y \in A$
ดังนั้น $r_2 = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y > 8\}$
ดังนั้น $r_3 = \{(4, 5)\}$
4. $r_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y \leq 5\}$
ดังนั้น $r_4 = \{(1, 2), (2, 3)\}$
5. $r_5 = \{(x, y) \in B \times A \mid x \geq y^2\}$
ดังนั้น $r_5 = \{(3, 1), (5, 1), (5, 2)\}$

เทคนิคย่อย 1.6 โดเมน (Domain) และ เรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์

บทนิยาม กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

$$D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ของ r คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

$$R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

ข้อตกลง

1. $(x, y) \in r$ อาจเขียนแทนได้ด้วย $x r y$ ถูกอ่านออกเสียงว่า *เอกซ์ มีความสัมพันธ์ อาร์ กับ วาย*
2. $(x, y) \notin r$ อาจเขียนแทนได้ด้วย $x \not r y$ ถูกอ่านออกเสียงว่า *เอกซ์ ไม่มีความสัมพันธ์ อาร์ กับ วาย*

◆ เทคนิคย่อย 16.1 การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่เป็นแบบแจกแจงสมาชิกง่ายๆ

หลักการ การหาโดเมน

1. พิจารณาสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทุกคู่ของความสัมพันธ์
2. โดเมน คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทุกคู่ของความสัมพันธ์

การหาเรนจ์

1. พิจารณาสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทุกคู่ของความสัมพันธ์
2. เรนจ์ คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทุกคู่ของความสัมพันธ์

**ตัวอย่าง 1**กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ (r) “น้อยกว่า” จาก A ไป B วิธีทำ

$$r = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6)\}$$

จะได้

$$D_r = \{1, 3, 5\} \text{ และ } R_r = \{4, 5, 6\}$$

**ตัวอย่าง 2**กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 = 4\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ (r) วิธีทำ

$$r = \{(-2, 0), (0, -2), (0, 2), (2, 0)\}$$

จะได้

$$D_r = \{-2, 0, 2\} \text{ และ } R_r = \{-2, 0, 2\}$$

**ตัวอย่าง 3**กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I^0 \times I \mid x^2 + y^2 = 4\}$ จงหา D_r และ R_r วิธีทำ

$$r = \{(0, -2)\}$$

จะได้

$$D_r = \{0\} \text{ และ } R_r = \{-2\}$$

**ตัวอย่าง 4**กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I^+ \times I^0 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ วิธีทำ

$$r = \{(2, 0)\}$$

จะได้

$$D_r = \{2\} \text{ และ } R_r = \{0\}$$

◆ เทคนิคย่อย 1.6.2 การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่เป็นแบบบอกเงื่อนไข

- หลักการ การหาโดเมน**
1. พยายามเขียนเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ให้อยู่ในรูป $y =$ เทอมของ x ให้ได้
 2. พิจารณาค่า x ใดบ้างที่ทำให้ y หาค่าได้
 3. โดเมน คือ เซตของค่า x ทั้งหมดที่ทำให้ y หาค่าได้

- การหาเรนจ์**
1. พยายามเขียนเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ให้อยู่ในรูป $x =$ เทอมของ y ให้ได้
 2. พิจารณาค่า y ใดบ้างที่ทำให้ x หาค่าได้
 3. เรนจ์ คือ เซตของค่า y ทั้งหมดที่ทำให้ x หาค่าได้

▼ สิ่งที่ต้องทราบ เพื่อประกอบการพิจารณาในการหาโดเมนและเรนจ์

1. $\frac{\triangle}{\square}$ จะได้ว่า $\square \neq 0$
2. $\triangle = \frac{c}{\square}$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ จะได้ว่า $\triangle \neq 0$ และ $\square \neq 0$ แน่
3. $\sqrt{\square}$ จะได้ว่า $\square \geq 0$
4. $\square^2 \geq 0$, $\sqrt{\square} \geq 0$ และ $|\square| \geq 0$ เสมอ

**ตัวอย่าง 1**กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy - x - 3y + 1 = 0\}$ จงหา D_r และ R_r วิธีทำการหาโดเมน 1) พยายามเขียนเงื่อนไขที่กำหนดให้มาอยู่ในรูป $y =$ เทอมของ x

จากเงื่อนไข (สมการ) $xy - x - 3y + 1 = 0$

$$(x - 3)y - (x - 1) = 0$$

สามารถจัดได้ $y = \frac{x - 1}{x - 3}$

2) พิจารณาค่า x ใดบ้างที่ทำให้ y หาค่าได้ จะพบว่าถ้าเรานำเอา x ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ มาแทนค่าในสมการจะทำให้ y หาค่าได้ ยกเว้น $x = 3$ 3) ดังนั้น $D_r = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } x \neq 3\}$

หรือ $D_r = \{x \mid x \neq 3\}$

หรือ $D_r = \{y \mid y \neq 3\}$

หรือ $D_r = \{m \mid m \neq 3\}$

หรือ $D_r = \mathbb{R} - \{3\}$

ข้อสังเกต ตัวแปรจะใช้อะไรก็ได้ที่จะประกาศ D_r อย่ายึดติดกับ D_r ต้องใช้ตัวแปร x อาจใช้ $y, m, n, \dots$ ได้การหาเรนจ์ 1) พยายามเขียนเงื่อนไขที่กำหนดให้มาอยู่ในรูป $x =$ เทอมของ y

จากเงื่อนไข (สมการ) $xy - x - 3y + 1 = 0$

สามารถจัดได้ $x = \frac{3y - 1}{y - 1}$

2) พิจารณาค่า y ใดบ้างที่ทำให้ x หาค่าได้ จะพบว่าถ้าเรานำเอา y ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ มาแทนค่าในสมการ จะทำให้หาค่าได้ ยกเว้น $y = 1$ 3) ดังนั้น $R_r = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ และ } y \neq 1\}$

หรือ $R_r = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } x \neq 1\}$

หรือ $R_r = \{m \mid m \neq 1\}$

หรือ $R_r = \mathbb{R} - \{1\}$

ข้อสังเกต ตัวแปรจะใช้อะไรก็ได้ เช่น $y, x, m, k, \dots$ **ตัวอย่าง 2**กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x + 2}{x + 1}\}$ จงหา D_r และ R_r วิธีทำการหาโดเมน 1. จัดสมการให้อยู่ในรูป $y =$ เทอมของ x

สามารถจัดได้ $y = \frac{x + 2}{x + 1}$

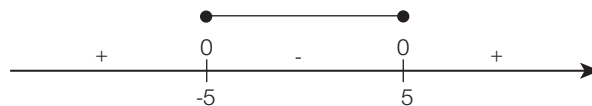
2. x เป็นจำนวนจริงใดๆ ยกเว้น $x = -1$ 3. ดังนั้น $D_r = \{x \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- การหาเรนจ์ 1. จัดสมการให้อยู่ในรูป $x =$ เทอมของ y
- $$y = \frac{x+2}{x+1}$$
- $$y(x+1) = x+2$$
- $$yx+y = x+2$$
- $$(y-1)x = 2-y$$
- สามารถจัดได้ $x = \frac{2-y}{y-1}$
2. y เป็นจำนวนจริงใดๆ ยกเว้น $y = 1$
3. ดังนั้น $R_f = \{y \mid y \neq 1\} = R - \{1\}$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$
 จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ

- การหาโดเมน 1. พยายามเขียนเงื่อนไขให้อยู่ในรูป $y =$ เทอมของ x
- $$y = \sqrt{25 - x^2}$$
2. พิจารณาค่า x ไบบ้างที่ทำให้ y หาค่าได้
- $$\text{หาค่า } y \text{ ได้ก็ต่อเมื่อ } 25 - x^2 \geq 0$$
- $$x^2 - 25 \leq 0$$
- $$(x - 5)(x + 5) \leq 0$$



แก้สมการจะได้ $-5 \leq x \leq 5$

3. ดังนั้น $D_r = [-5, 5]$

- การหาเรนจ์ 1. พยายามเขียนเงื่อนไขให้อยู่ในรูป $x =$ เทอมของ y
- จาก $y = \sqrt{25 - x^2}$
- $$y^2 = 25 - x^2$$
- $$x = \pm \sqrt{25 - y^2}$$

2. พิจารณาค่า y ไบบ้างที่ทำให้ x หาค่าได้จะต้องพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้
- กรณีที่ 1 พิจารณาค่า y ก่อนที่จะจัดให้ $x =$ เทอมของ y
- จาก $y = \sqrt{25 - x^2}$
- เนื่องจาก $\sqrt{25 - x^2} \geq 0$
- ดังนั้น $y \geq 0 \quad \dots (1)$

กรณีที่ 2 พิจารณาค่า y หลังจัดให้ $x =$ เทอมของ y แล้ว
 จาก $x = \pm \sqrt{25 - y^2}$
 x จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $25 - y^2 \geq 0$
 แก้อสมการจะได้ $-5 \leq y \leq 5 \quad \dots (2)$

3. นำเอา (1) $\cap$ (2) จะได้เรนจ์
 ดังนั้น $R_f = [0, 5]$

 ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{5x^2 + 9}\}$
 จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ

- การหาโดเมน 1. พยายามเขียนเงื่อนไขให้อยู่ในรูป $y =$ เทอมของ x
 $y = \sqrt{5x^2 + 9}$
 2. พิจารณาค่า x ใดบ้างที่ทำให้ y หาค่าได้
 จะพบว่าถ้าเรานำเอา x ทุกตัวใน R แทนค่าในสมการจะทำให้ y หาค่าได้เสมอ
 3. ดังนั้น $D_r = R$

- การหาเรนจ์ 1. พยายามเขียนเงื่อนไขให้อยู่ในรูป $x =$ เทอมของ y
 จาก $y = \sqrt{5x^2 + 9}$
 $y^2 = 5x^2 + 9$
 $x^2 = \frac{y^2 - 9}{5}$
 $x = \pm \sqrt{\frac{y^2 - 9}{5}}$
 2. พิจารณาค่า y ใดบ้างที่ทำให้ x หาค่าได้จะต้องพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 พิจารณาค่า y ก่อนที่จะจัดให้ $x =$ เทอมของ y
 จาก $y = \sqrt{5x^2 + 9}$
 เนื่องจาก $\sqrt{5x^2 + 9} \geq 0$
 ดังนั้น $y \geq 0 \quad \dots (1)$

กรณีที่ 2 พิจารณาค่า y หลังจัดให้ $x =$ เทอมของ y แล้ว
 จาก $x = \pm \sqrt{\frac{y^2 - 9}{5}}$
 x จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $\frac{y^2 - 9}{5} \geq 0$
 แก้อสมการจะได้ $y \leq -3$ หรือ $y \geq 3 \quad \dots (2)$

3. นำเอา (1) $\cap$ (2) จะได้เรนจ์
 ดังนั้น $R_r = \{y \mid y \geq 3\} = [3, \infty)$

**ตัวอย่าง 5**

กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 2|x|\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ

- การหาโดเมน**
- พยายามหาเงื่อนไขให้อยู่ในรูป $y =$ เทอมของ x

$$y = x^2 - 2|x|$$
 - พิจารณาค่า x ใดบ้างที่ทำให้ y หาค่าได้
 จะพบว่าถ้านำเอา x ทุกตัวใน $\mathbb{R}$ แทนค่าในสมการจะทำให้ y หาค่าได้เสมอ
 - ดังนั้น $D_r = \mathbb{R}$
- การหาเรนจ์**
- พยายามเขียนเงื่อนไขให้อยู่ในรูป $x =$ เทอมของ y
 จาก $y = x^2 - 2|x|$

$$y = (\sqrt{x^2})^2 - 2|x|$$

$$y = |x|^2 - 2|x|$$

 $|x|^2 - 2|x| - y = 0$ มองให้อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$
 ใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-y)}}{2(1)}$$
 - พิจารณาค่า y ใดบ้างที่ทำให้ x หาค่าได้ $4 - 4(1)(-y) \geq 0$

$$4 + 4y \geq 0$$

$$y \geq -1$$
 - ดังนั้น $R_r = \{y \mid y \geq -1\} = [-1, \infty)$

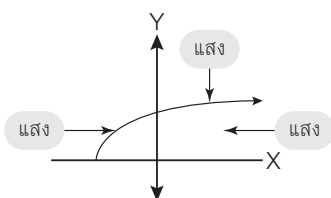
◆ เทคนิคย่อยชุดที่ 1.6.3 การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่เป็นแบบกราฟ

- หลักการ การหาโดเมน**
- พิจารณาเงาของกราฟบนแกน X
 - โดเมนของความสัมพันธ์ คือ เงาของกราฟที่แผ่บนแกน X
- การหาเรนจ์**
- พิจารณาเงาของกราฟบนแกน Y
 - เรนจ์ของความสัมพันธ์ คือ เงาของกราฟที่แผ่บนแกน Y

**ตัวอย่าง 1**

กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x+1}\}$ จงหา D_r และ R_r โดยใช้กราฟ

วิธีทำ สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จากรูปจะเห็นว่าเงาของกราฟที่แผ่บนแกน X มีค่า $x \geq -1$

ดังนั้น $D_r = [-1, \infty)$

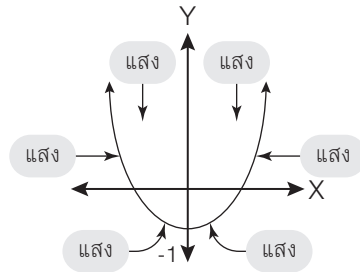
เงาของกราฟที่แผ่บนแกน Y มีค่า $y \geq 0$

ดังนั้น $R_r = [0, \infty)$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\}$

จงหา D_r และ R_r

วิธีทำ สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จากรูป จะเห็นได้ว่า เงาของกราฟที่แผ่เต็มแกน X

ดังนั้น $D_r = \mathbb{R}$

และ เงาของกราฟที่แผ่บนแกน Y มีค่า $y \geq -1$

ดังนั้น $R_r = [-1, \infty)$

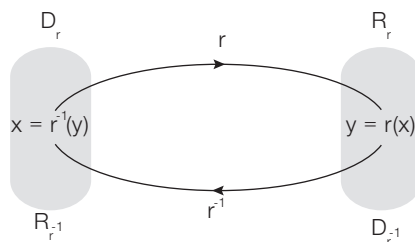
เทคนิคย่อย 1.7 ตัวผกผันของความสัมพันธ์

บทนิยาม ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้า และสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

ข้อตกลง ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

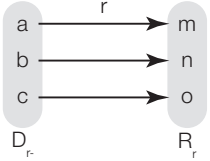
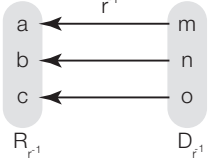
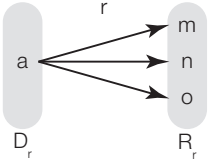
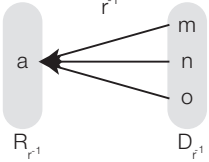
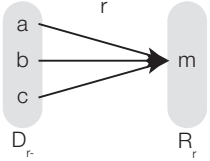
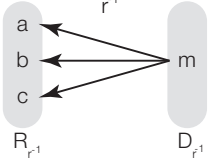
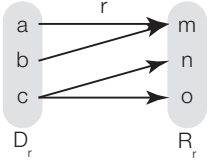
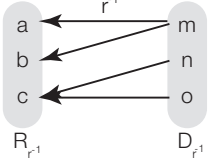
▼ คำแปลจากบทนิยาม

1. ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r
2. ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r ถูกเขียนแทนด้วย r^{-1}
3. มีภาษาคณิตศาสตร์เป็น $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$
4. แสดงแผนภาพการโยงของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



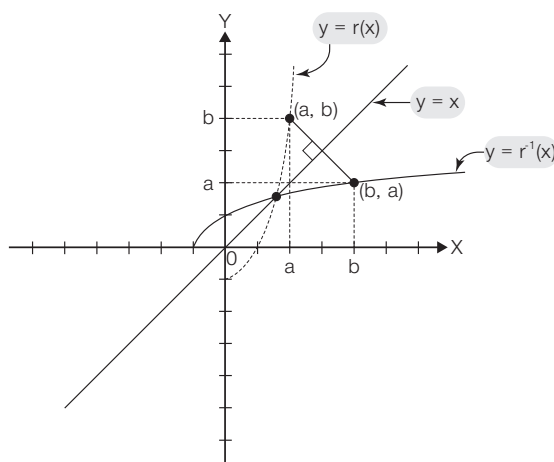
5. พบว่า $D_{r^{-1}} = R_r$
และ $R_{r^{-1}} = D_r$

6. ลักษณะของตัวผกผันของความสัมพันธ์

ลักษณะ		ข้อสังเกต
ความสัมพันธ์	ตัวผกผันของความสัมพันธ์	
1. one to one 	1. ยังคงเป็น one to one 	$D_{r^{-1}} = R_r$ $R_{r^{-1}} = D_r$
2. one to many 	2. กลายเป็น many to one 	$D_{r^{-1}} = R_r$ $R_{r^{-1}} = D_r$
3. many to one 	3. กลายเป็น one to many 	$D_{r^{-1}} = R_r$ $R_{r^{-1}} = D_r$
4. many to many 	4. ยังคงเป็น many to many 	$D_{r^{-1}} = R_r$ $R_{r^{-1}} = D_r$

7. ลักษณะของกราฟ r และ r^{-1}

ลองพิจารณากราฟของ $r(x)$ และ $r^{-1}(x)$ ดังนี้



จากกราฟ $r(x)$ และ $r^{-1}(x)$ พบว่า

7.1 กราฟของ r กับ r^{-1} ใดๆ จะมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

7.2 ถ้าพับเส้นตรง $y = x$ แล้ว กราฟของ r กับ r^{-1} จะทับกันสนิทพอดี

7.3 ถ้าลากเส้นตรงจากจุด (a, b) ใดๆ ของ r ไปยังจุด (b, a) ของ r^{-1} แล้วจะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ เสมอ

7.4 จุด (a, b) กับจุด (b, a) จะอยู่ห่างจากเส้นตรง $y = x$ เป็นระยะเท่ากันเสมอ

7.5 กราฟ $y = x$ เป็นแกนสมมาตรของจุด (a, b) กับจุด (b, a) ใดๆ

เทคนิค

2

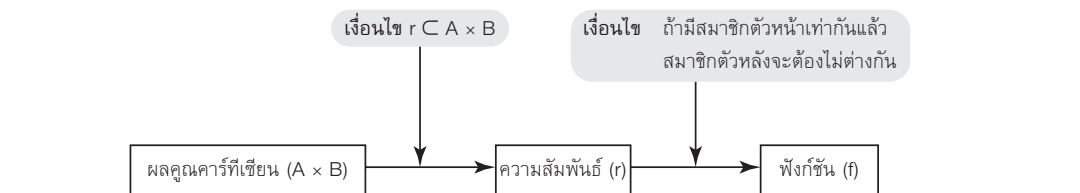
ฟังก์ชัน (Function)

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขว่า ในสองคู่อันดับใดๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน แล้วสมาชิกตัวหลังจะต้องไม่ต่างกัน

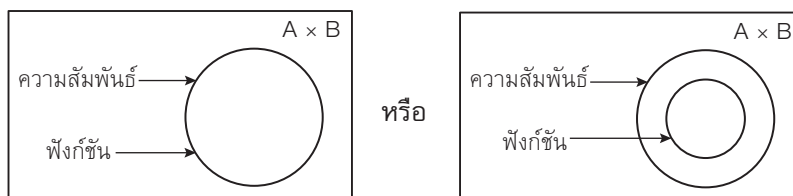
สามารถเขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แล้ว $y = z$

จากบทนิยาม จะพบว่าฟังก์ชันก็คือ ความสัมพันธ์นั่นเอง แต่จะต้องมีเงื่อนไขที่ว่า ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน แล้วสมาชิกตัวหลังจะต้องไม่ต่างกัน บีบเพื่อให้ความสัมพันธ์กลายเป็นฟังก์ชัน ดังแผนภาพ



พบว่า $r \subset A \times B$ และ $f \subset A \times B$ ดังนั้น เราสามารถแสดงเป็นแผนภาพเวนน - ออยเลอร์ได้ดังนี้



เช่น จงบอกชี้ว่าแผนภาพของความสัมพันธ์ r_1 และ r_2 ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

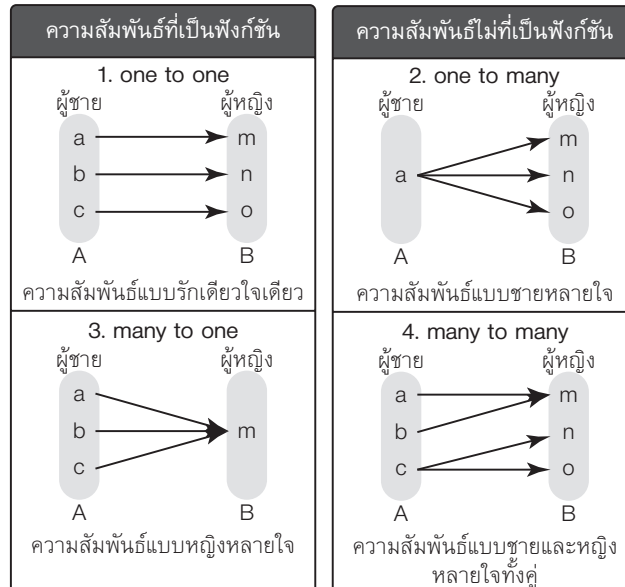


r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน คือ $(2, 5)$ กับ $(2, 7)$ และ $(3, 4)$ กับ $(3, 7)$

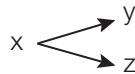
r_2 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดเลยที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน

▼ ลักษณะของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน

ผู้เขียนขอสมมติให้เซต A เป็นผู้ชาย และเซต B เป็นผู้หญิงเพื่อประโยชน์ในการจำเท่านั้น



- ข้อสังเกต
 1. ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่ชายไม่หลายใจนั่นเองจริงไหม
 2. ความสัมพันธ์แบบ one to one และ many to one เป็นฟังก์ชัน
 3. ความสัมพันธ์แบบ one to many และ many to many ไม่เป็นฟังก์ชัน
 4. ลองพิจารณากรณีที่มีความสัมพันธ์ r มีบางคู่ที่จับคู่ดังนี้



ถ้าพบว่า $y = z$ แล้วความสัมพันธ์นี้จะเป็ฟังก์ชัน

ถ้าพบว่า $y \neq z$ แล้วความสัมพันธ์นี้จะไม่เป็นฟังก์ชัน

เน้น ความสัมพันธ์ในกรณีนี้จะไม่เป็นฟังก์ชัน ยกเว้น อยู่กรณีเดียวคือ $y = z$

5. เนื่องจาก ฟังก์ชันคือ ความสัมพันธ์ที่ชายไม่หลายใจ ทำให้ความสัมพันธ์แบบหญิงหลายใจก็เป็นฟังก์ชันด้วย เพราะยังคงเป็นความสัมพันธ์ที่ชายไม่หลายใจอยู่

■ เทคนิคย่อย 2.1 การเขียนฟังก์ชัน

- หลักการ
1. แบบแจกแจงสมาชิกเป็นเซต
 2. แบบมีเงื่อนไข
 3. แบบเขียนกราฟ

▼ หมายเหตุ การเขียนฟังก์ชันอาจมีมากกว่านี้ แต่ในระดับนี้เอาแค่นี้ก่อน

▼ การเขียนฟังก์ชันที่ควรทราบ

1. แบบแจกแจงสมาชิก คือ เขียนแสดงถึงสมาชิกคู่อันดับทั้งหมดที่เกิดขึ้นมี 3 แบบคือ

1.1 แจกแจงสมาชิกเป็นเซต

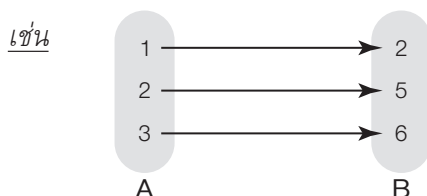
เช่น $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

1.2 แจกแจงสมาชิกแบบตาราง

เช่น

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	2	4	6	8	10	12	14

1.3 แจกแจงสมาชิกเป็นแผนภาพแสดงการจับคู่



2. แบบบอกเงื่อนไข

2.1 สามารถเขียน y ในแบบบอกเงื่อนไขเป็น $f(x)$ ได้ดังนี้

$f = \{(x, f(x)) \in A \times B \mid f(x) = x^2\}$ โดยนิยมอ่านออกเสียงของ $f(x)$ ว่า “เอฟของเอกซ์ (f of x)”

2.2 ในกรณีที่ $(x, f(x)) \in R \times R$

เราสามารถเขียน $f = \{(x, f(x)) \in R \times R \mid f(x) = \text{เทอมของ } x\}$ ในรูปแบบสั้นๆ ได้เป็น **$f(x) = \text{เทอมของ } x$**

เช่น 1. $f = \{(x, f(x)) \in R \times R \mid f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2\}$ สามารถเขียนแทนสั้นๆ ได้ด้วย $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

2. $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x + 1\}$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น $f = \{(x, f(x)) \in R \times R \mid f(x) = x + 1\}$ และสามารถเขียนแทนสั้นๆ ได้ด้วย $f(x) = x + 1$

2.3 $f(x)$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

เนื่องจาก $y = f(x)$ จึงสามารถแสดงแผนภาพการโยงของ f ได้ดังนี้



☞ สิ่งที่ต้องทราบ สำหรับ $y = f(x)$

ถ้าเราเจอ	หมายถึง
$f(x)$	ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x
$f(1)$	ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 1$
$f(-3)$	ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = -3$

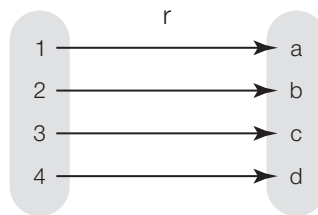
สิ่งที่ควรเน้น สำหรับ $y = f(x)$

อย่าลืมนะ ว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่ x หมายถึง $f(x)$ ซึ่งเราทราบอยู่แล้วนะว่า $f(x)$ มันคือค่า y นั้นเอง ดังนั้นจึงจริงด้วยว่า

ถ้าเราเจอ	หมายถึง
$f(a)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว	ค่า y ที่ $x = a$
$f(1)$	ค่า y ที่ $x = 1$
$f(-3)$	ค่า y ที่ $x = -3$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

สามารถเขียนเป็นแผนภาพได้เป็น

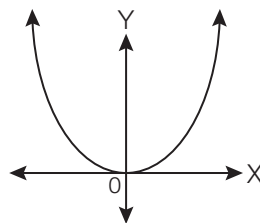


เราสามารถบอกใครๆ ได้ว่า $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$ นั้นเอง

3. แบบเขียนกราฟ

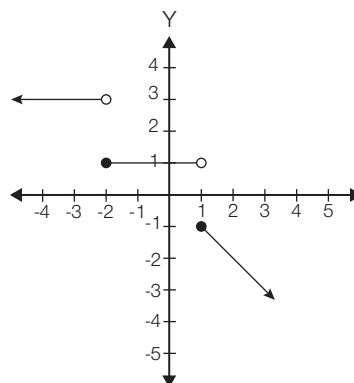
เช่น 1. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



$$2. f(x) = \begin{cases} 3 & \text{เมื่อ } x < -2 \\ 1 & \text{เมื่อ } -2 \leq x < 1 \\ -x & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



■ เทคนิคย่อย 2.2 การตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

หลักการ ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขว่า ในสองคู่อันดับใดๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังจะต้องไม่ต่างกัน

◆ เทคนิคย่อย 2.2.1 ถ้าความสัมพันธ์ที่กำหนดมาให้เป็นแบบแจกแจงสมาชิกง่ายๆ

หลักการ ให้ดูที่สมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับ ไม่สนใจสมาชิกตัวหลัง

1. ถ้าสมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับไม่เหมือนกันเลย แล้วสามารถบอกใครๆ ได้เลย ว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันแน่
2. ถ้าสมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับมีตัวที่เหมือนกันอย่างน้อย 1 คู่ แล้วสามารถตัดสินใจได้เลยว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชันแน่

ตัวอย่าง ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1. $f_1 = \{(1, 6), (2, 5), (1, 7), (3, 8)\}$
2. $f_2 = \{(1, 5), (3, 6), (2, 5), (4, 7)\}$
3. $f_3 = \{(3, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 5), (4, 9)\}$
4. $r_4 = \{(7, 1), (6, 3), (8, 2), (5, 3)\}$

วิธีทำ

1. จาก $r_1 = \{(1, 6), (2, 5), (1, 7), (3, 8)\}$

r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังต่างกันคือ $(1, 6)$ กับ $(1, 7)$

2. จาก $r_2 = \{(1, 5), (3, 6), (2, 5), (4, 7)\}$

r_2 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดเลยที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน

3. จาก $r_3 = \{(3, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 5), (4, 9)\}$

คงจำเรื่องเซตได้ล่ะว่า ถ้าเซตใดมีสมาชิกซ้ำกันให้เขียนสมาชิกตัวนั้นเพียงตัวเดียวเท่านั้นก็พอ จากความสัมพันธ์ r_3 จะมีสมาชิกซ้ำกันคือ $(3, 5)$

$$r_3 = \{(3, 5), (1, 7), (2, 8), (4, 9)\}$$

r_3 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดเลยที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน

4. จาก $r_4 = \{(7, 1), (6, 3), (8, 2), (5, 3)\}$

r_4 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดเลยที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน