คู่มือเรียนรายวิชา กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์
เพิ่มเติม ตามหลักสูตรแกนกลาง พ.ศ. 2551
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ฟิสิกส์

เรียบเรียงโดย
นิรันดร์ สุวรัตน์
กศ.บ. (ฟิสิกส์), ค.ม. (ฟิสิกส์)

ม.4 เล่ม 2

สำนักพิมพ์ พ.ศ.พัฒนา

สรุปเนื้อหาสำคัญ
- สมดุลกล
- งานและพลังงาน
- โมเมนตัมและการชน
- การเคลื่อนที่แนวโค้ง

แบบทดสอบท้ายบท
ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย
พร้อมเฉลยครบถ้วน

หนังสือเล่มนี้พิมพ์จากกระดาษดับเบิ้ล เอ
กระดาษจากต้นนา ช่วยแก้ปัญหาโลกร้อน
กระดาษจากต้นนา
02 279 6222 www.porsor.com @pspattana

คู่มือเรียนรายวิชา กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลาง พ.ศ. 2551
เพิ่มเติม (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ฟิสิกส์

สำนักพิมพ์ พ.ศ.พัฒนา

เรียบเรียงโดย
นิรันดร์ สุวรัตน์
กศ.บ. (ฟิสิกส์), ค.ม. (ฟิสิกส์)

ม.4 เล่ม 2

สรุปเนื้อหาสำคัญ
- สมดุลกล
- งานและพลังงาน
- โมเมนตัมและการชน
- การเคลื่อนที่แนวโค้ง

แบบทดสอบท้ายบท
ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย
พร้อมเฉลยครบถ้วน

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

คู่มือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

ฟิสิกส์ ม.4 เล่ม 2

ผู้เรียบเรียง **นิรันดร์ สุวรัตน์**

บรรณาธิการ	:	อรศรี โรจน์พจนรัตน์
ผู้ช่วยบรรณาธิการ (วิชาการ)	:	ณัฏฐ์ธนิน ลูกเสือถิรา
ผู้ช่วยบรรณาธิการ (ศิลปกรรม)	:	อมรศักดิ์ บุญเรือง
หัวหน้าฝ่ายศิลป์	:	อุไรพรรณ บุญเรือง
เรียงพิมพ์	:	ยุภาภรณ์ แตงมณี
รูปเล่ม	:	อุไรพรรณ บุญเรือง
พิสูจน์อักษร	:	พิรุณณิชา ใบสุวรรณ
ศิลปกรรม	:	สิทธินนท์ สกุลชัยสิริวิช
ปก	:	อมรศักดิ์ บุญเรือง

จัดพิมพ์ : **บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด**
12 หม่อมแผ้ว แยก 3 ถนนพระราม 6 ซอย 41
แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กรุงเทพมหานคร 10400
โทร. 02-279-6222 (อัตโนมัติ 15 คู่สาย) โทรสาร 02-279-6203-4

พิมพ์ที่ : **โรงพิมพ์เพิ่มทรัพย์การพิมพ์**
117/22 หมู่ 5 ซอยบางไผ่พัฒนา ถนนนครอินทร์ ตำบลบางไผ่ อำเภอเมือง จังหวัดนนทบุรี 11000
ผู้พิมพ์/ผู้โฆษณา : นายธนพัฒน์ สุขมงคลกุล

คำนำ

เนื่องด้วยในปี พ.ศ. 2551 กระทรวงศึกษาธิการได้ประกาศให้ใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน โดยวิชาฟิสิกส์จัดอยู่ในกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ และในปี พ.ศ. 2560 ได้มีการปรับปรุงวิชาฟิสิกส์โดยจัดเรียงเนื้อหา สาระใหม่ โดยในรายวิชาเพิ่มเติม ฟิสิกส์ เล่ม 2 เพื่อใช้ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นการศึกษาเกี่ยวกับสมดุลกล, งานและพลังงาน, โมเมนตัมและการชน, การเคลื่อนที่แนวโค้ง โดยละเอียด ประกอบด้วย

1. เนื้อหาครบสมบูรณ์ครอบคลุม
2. มีตัวอย่างต่อจากทฤษฎีทุกทฤษฎี
3. มีข้อสรุปที่สำคัญเป็นระยะ ๆ
4. มีการวิเคราะห์โจทย์ตัวอย่าง เพื่อฝึกหัดการวิเคราะห์โจทย์ของนักเรียน ให้มีความเข้าใจอย่างถ่องแท้
5. แบบทดสอบตามบทเรียน เพื่อช่วยทบทวนและประเมินตนเอง
6. เฉลยแบบทดสอบอย่างละเอียด
7. ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัยปี 2518 - ปีปัจจุบัน เพื่อให้นักเรียนเห็นแนวข้อสอบ
8. เฉลยข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัยอย่างละเอียด

ผู้เขียนได้อาศัยประสบการณ์จากการสอนฟิสิกส์มากกว่า 30 ปี ทำการเรียบเรียงหนังสือคู่มือ ฟิสิกส์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 เล่มนี้ขึ้นมาเพื่อช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาครบตามหลักสูตร และเป็นพื้นฐานในการศึกษาขั้นสูงต่อ ๆ ไป หวังว่านักเรียนที่ได้อ่านและศึกษาจากคู่มือเล่มนี้จะประสบความสำเร็จในการเรียนวิชาฟิสิกส์ต่อ ๆ ไป

ด้วยความปรารถนาดี

(นิรันดร์ สุวรัตน์)

สารบัญ

หน้า

บทที่ 4 สมดุลกล **1**

4.1 สมดุลกล 1

4.2 สมดุลต่อการเคลื่อนที่ 2

4.2.1 เงื่อนไขของการสมดุลของแรงสองแรง 2

4.2.2 เงื่อนไขของการสมดุลของแรงสามแรง 6

4.2.3 ทฤษฎีของลาร์มี 10

4.2.4 ทฤษฎีสามเหลี่ยมแทนแรง 11

4.3 จุดศูนย์กลางของมวล (C.M.) และจุดศูนย์ถ่วง (C.G.) 30

4.3.1 จุดศูนย์กลางของมวล 30

4.3.2 จุดศูนย์ถ่วง 30

4.3.3 การหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล 31

4.4 โมเมนต์ของแรงหรือทอร์ก 34

4.5 สมดุลต่อการหมุน 39

4.6 การคำนวณเกี่ยวกับแรงปฏิกิริยาที่บานพับของประตูหรือหน้าต่าง 52

4.7 แรงขนาน 54

4.8 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ 55

4.9 การคำนวณเกี่ยวกับแรงกระทำต่อกล่องบนพื้นขรุขระ 57

4.10 เสถียรภาพของสมดุล 63

4.11 การนำหลักสมดุลไปประยุกต์ 64

★ **แบบทดสอบ บทที่ 4 สมดุลกล** **67**

☆ เฉลยแบบทดสอบ บทที่ 4 สมดุลกล 79

★ **ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย บทที่ 4 สมดุลกล** **99**

☆ เฉลยข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย บทที่ 4 สมดุลกล 105

บทที่ 5 งานและพลังงาน **121**

5.1 แรงและงาน 121

สารบัญ

หน้า

5.1.1 งานของแรงที่ทำมุมกับแนวการเคลื่อนที่ 122

5.1.2 การหางานที่เกิดจากแรงกระทำหลายแรงหรือวัตถุมีการเปลี่ยนทิศทาง 126

5.1.3 งานที่เกิดกับวัตถุที่มีรูปร่างไม่แน่นอน 132

5.1.4 การหางานจากพื้นที่ใต้กราฟ 134

5.2 กำลัง 138

5.3 พลังงาน 142

5.3.1 พลังงานจลน์ 143

5.3.2 พลังงานศักย์ 148

5.4 กฎการอนุรักษ์พลังงานกล 158

5.5 เครื่องกล 169

5.5.1 หลักการของงานกับเครื่องกล 169

5.5.2 การได้เปรียบเชิงกล 169

5.5.3 ประสิทธิภาพ 170

★ **แบบทดสอบ บทที่ 5 งานและพลังงาน** **181**

☆ เฉลยแบบทดสอบ บทที่ 5 งานและพลังงาน 190

★ **ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย บทที่ 5 งานและพลังงาน** **205**

☆ เฉลยข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย บทที่ 5 งานและพลังงาน 213

บทที่ 6 โมเมนตัมและการชน **234**

6.1 โมเมนตัม 234

6.2 แรงและการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม 235

6.3 การดลและแรงดล 241

6.3.1 การหาการดลและโมเมนตัมที่เปลี่ยนไปจากกราฟระหว่าง F กับ t 242

6.3.2 การหาการดลจากการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม 243

6.4 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม 252

6.5 การชน 253

สารบัญ

หน้า

6.5.1 การชนกันแบบยืดหยุ่น 253

6.5.2 การชนแบบไม่ยืดหยุ่น 262

6.5.3 การดีดตัวของวัตถุหรือการระเบิด 268

6.5.4 โจทย์คำนวณที่เกี่ยวข้องกันระหว่างโมเมนตัมและพลังงาน 275

6.6 การชนใน 2 มิติ 287

6.6.1 การชน แบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ 288

6.6.2 การชน แบบไม่ยืดหยุ่น 293

6.6.3 การระเบิดหรือการดีดตัว 294

6.7 การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล 295

★ **แบบทดสอบ บทที่ 6 โมเมนตัมและการชน** **298**

☆ เฉลยแบบทดสอบ บทที่ 6 โมเมนตัมและการชน 308

★ **ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย บทที่ 6 โมเมนตัมและการชน** **326**

☆ เฉลยข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัยบ ทที่ 6 โมเมนตัมและการชน 333

บทที่ 7 การเคลื่อนที่แนวโค้ง **352**

7.1 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 352

7.1.1 การเคลื่อนที่ในแนวระดับของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 353

7.1.2 การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 353

7.1.3 การหาการกระจัด และความเร็ว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 354

7.1.4 ลักษณะการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 355

7.2 การเคลื่อนที่แบบวงกลม 378

7.2.1 ความเร่งสู่ศูนย์กลาง 379

7.2.2 การหาแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบวงกลม 380

7.2.3 อัตราเร็วเชิงมุม 380

7.2.4 การเคลื่อนที่บนทางโค้ง 388

สารบัญ

หน้า

7.2.5 การเคลื่อนที่ในแนววงกลมในระนาบดิ่ง 394

7.2.6 การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์, ดาวเทียม 399

7.3 การประยุกต์กฎการอนุรักษ์พลังงานกล 404

★ **แบบทดสอบ บทที่ 7 การเคลื่อนที่แนวโค้ง** **410**

☆ เฉลยแบบทดสอบ บทที่ 7 การเคลื่อนที่แนวโค้ง 422

★ **ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย บทที่ 7 การเคลื่อนที่แนวโค้ง** **442**

☆ เฉลยข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย บทที่ 7 การเคลื่อนที่แนวโค้ง 446

★★★

บทที่ 4 สมดุลกล

จากความรู้เกี่ยวกับปริมาณเวกเตอร์ การหาเวกเตอร์ลัพธ์ มวล แรง และกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน การนำกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันทั้งสามข้อไปอธิบายการเปลี่ยนแปลงสภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง ในบทเรียนนี้จะศึกษาถึงการนำกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันไปอธิบายในเรื่องสมดุลของวัตถุโมเมนต์ของแรงหรือทอร์กกับการหมุนการนำหลักการสมดุลไปใช้หาแรงกระทำต่อส่วนต่าง ๆ ในโครงสร้างของสิ่งก่อสร้างหรือเครื่องมือกลบางชนิด

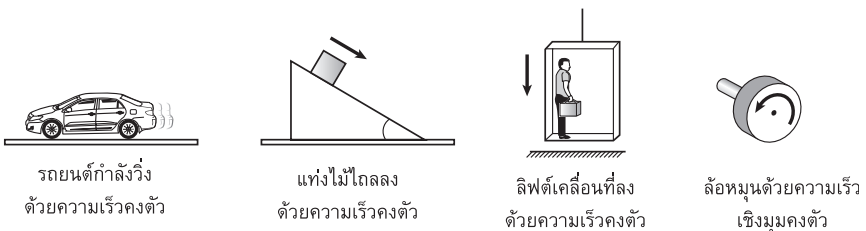
4.1 สมดุลกล (mechanical equilibrium)

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน ทำให้ทราบว่า ถ้าแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ วัตถุจะคงสภาพอยู่นิ่งหรือสภาพการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว ซึ่งเรียกว่า **วัตถุไม่เปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่**หรือในสภาพเช่นนี้เราเรียกว่าวัตถุอยู่ในสภาพ **สมดุลกล** หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **สมดุล (equilibrium)** ซึ่งสามารถจำแนกได้ 2 ลักษณะ คือ

1. **สมดุลสถิต (static equilibrium)** เป็นสมดุลของวัตถุที่อยู่นิ่ง เช่น วัตถุวางอยู่นิ่ง ๆ บนพื้น เสาไฟฟ้า ป้ายโฆษณา ที่ติดตั้งให้คงสภาพอยู่นิ่งโดยไม่ล้ม หรือ พังลงมา เป็นต้น

2. **สมดุลจลน์ (dynamic equilibrium)** เป็นสมดุลของวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว เช่น วัตถุไถลไปตามพื้นด้วยความเร็วคงตัว รถยนต์แล่นไปตามถนนตรงด้วยความเร็วคงตัว ลิฟต์เคลื่อนที่ขึ้นหรือลงด้วยความเร็วคงตัว เป็นต้น นอกจากนี้ยังรวมถึงสมดุลของวัตถุที่เคลื่อนที่โดยไม่เปลี่ยนสภาพการหมุนด้วย เช่น ล้อ รอก กว้านที่หมุนรอบแกน ซึ่งวางตัวในแนวเดิมด้วยอัตราการหมุนคงตัว สมดุลที่ไม่เปลี่ยนสภาพการหมุนนี้เป็นสมดุลที่เกี่ยวข้องกับการหมุนของวัตถุไม่สามารถอธิบายได้ด้วยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเพียงอย่างเดียวต้องใช้ความรู้ที่มีรายละเอียดมากกว่าในชั้นนี้

รูป 4.1 *วัตถุอยู่ในสมดุลสถิต*



รูป 4.2 *วัตถุอยู่ในสมดุลจลน์*

ในการพิจารณาการที่วัตถุคงสภาพการเคลื่อนที่เดิมอาจแยกได้ 2 ลักษณะ คือ

(1) วัตถุอยู่นิ่ง หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว เราเรียกสภาพของวัตถุขณะนี้ว่า**สมดุลต่อการเลื่อนที่** (translational equilibrium) จะเกิดได้เมื่อ แรงลัพธ์ที่มากระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นวัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลต่อการเลื่อนที่ได้เมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \text{.....(4.1)}$$

โดย $\vec{F}_i$ แทนแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อวัตถุ ($i = 1, 2, 3, ..., n$)

(2) วัตถุไม่หมุน หรือหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงตัว เราเรียกสภาพวัตถุขณะนี้ว่า **สมดุลต่อการหมุน** (rotational equilibrium) จะเกิดได้เมื่อทอร์กหรือโมเมนต์ของแรงที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ดังนั้นวัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลต่อการหมุนได้เมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = 0 \quad \text{หรือ} \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0 \qquad \text{.....(4.2)}$$

โดย τ_i แทนทอร์กต่าง ๆ ที่กระทำต่อวัตถุ ($i = 1, 2, 3, ..., n$)

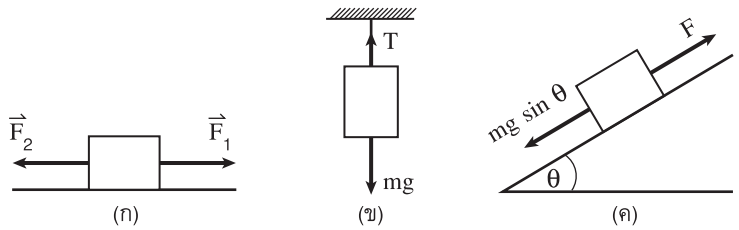
โดย M_i แทนโมเมนต์ของแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อวัตถุ ($i = 1, 2, 3, ..., n$)

4.2 สมดุลต่อการเลื่อนที่

จากความหมายของสมดุลต่อการเลื่อนที่ คือสภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน เมื่อพิจารณาแรงลัพธ์ที่มากระทำต่อวัตถุต้องมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นในการพิจารณาความสัมพันธ์ของแรงที่กระทำต่อวัตถุอาจแยกได้ดังนี้

4.2.1 เงื่อนไขของการสมดุลของแรงสองแรง

เมื่อมีแรงกระทำต่อวัตถุ 2 แรงแล้ววัตถุสมดุลต่อการเคลื่อนที่ (อยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วย ความเร็วคงตัว) ดังรูป 4.3

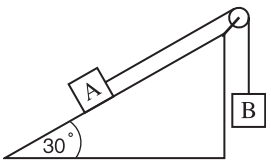


รูป 4.3 *แสดงสมดุลเนื่องจากแรงสองแรง*

จากรูป 4.3 ได้ว่าแรงทั้งสองต้องมีความสัมพันธ์กันดังนี้

1. แรงทั้งสองต้องมีขนาดเท่ากัน จากรูป (ก) $F_1 = F_2$ รูป (ข) $T = mg$ และรูป (ค) $F = mg \sin\theta$
2. แรงทั้งสองต้องมีทิศทางตรงข้ามกัน และอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
3. แรงลัพธ์ (ΣF) ของแรงทั้งสองเท่ากับศูนย์

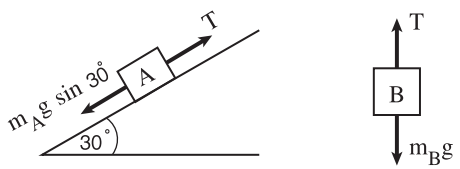
1.



จากรูปวัตถุ A มีมวล 10 กิโลกรัม วางอยู่บนพื้นเอียงลื่นอยากทราบว่ามวล B จะมีค่าเท่าไร มวล A จึงอยู่นิ่งได้

วิเคราะห์โจทย์

1. มวล A อยู่นิ่ง มวล B ก็อยู่นิ่งด้วยแสดงว่าระบบสมดุล
2. เขียนรูปใส่แรงที่กระทำต่อมวลแต่ละก้อน



จาก $\Sigma F = 0$

(A) ; $m_Ag \sin 30^\circ = T$ ...❶

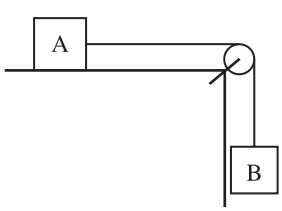
(B) ; $m_Bg = T$ ...❷

❷ = ❶ ; $m_Bg = m_Ag \sin 30^\circ$

$\therefore \mathbf{m_B = 10 \times \frac{1}{2} = 5\ kg}$

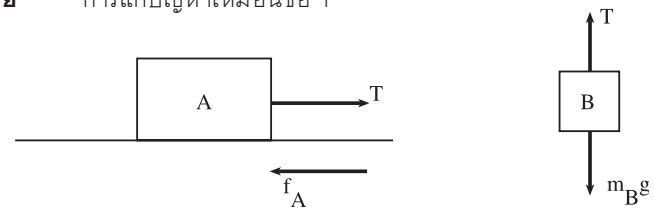
ดังนั้นมวล B มีค่า 5 กิโลกรัม

2.



วัตถุ A มีมวล 10 กิโลกรัม วางอยู่บนพื้นราบที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิต 0.2 จงหา มวลของ B ที่มากที่สุดที่ยังทำให้ A อยู่นิ่งได้

วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 1



จาก $\Sigma F = 0$

(A) ; $f_A = T$ ...❶

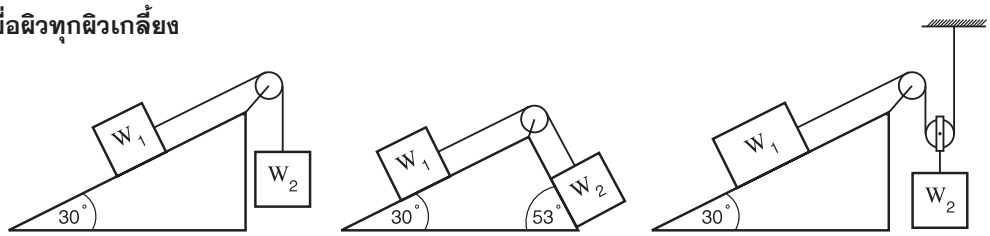
(B) ; $m_Bg = T$ ...❷

❷ = ❶ ; $m_Bg = f_A = \mu m_Ag$

$\therefore$ $\mathbf{m_B = 0.2 \times 10 = 2\ kg}$

ดังนั้นมวลของ B ที่มากที่สุดเท่ากับ 2 กิโลกรัม

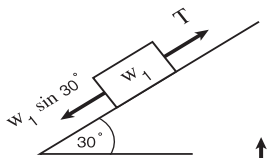
3. จากรูป ถ้ารอกไม่มีความฝืด W_1 = 500 นิวตัน จงหาค่า W_2 ที่ทำให้ W_1 และ W_2 อยู่ในภาวะสมดุลได้เมื่อผิวทุกผิวเกลี้ยง



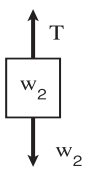
(ก) (ข) (ค)

วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 1

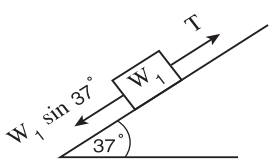
(ก)

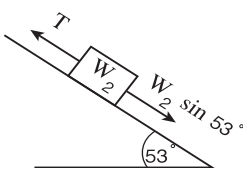


(ข)



(ข)





จาก $\Sigma F = 0$

(W_1) ; $W_1 \sin 30^\circ = T$ ...❶

(W_2) ; $W_2 = T$ ...❷

❷ = ❶ ; $W_2 = W_1 \sin 30^\circ$

$\therefore$ $\mathbf{W_2 = 500 \times \frac{1}{2} = 250\ N}$

ดังนั้น W_2 มีค่าเท่ากับ 250 นิวตัน

จาก $\Sigma F = 0$

(W_1) ; $W_1 \sin 37^\circ = T$ ...❶

(W_2) ; $W_2 \sin 53^\circ = T$ ...❷

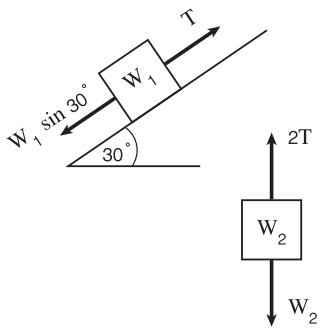
❷ = ❶ ; $W_2 \sin 53^\circ = W_1 \sin 37^\circ$

$W_2 \times \frac{4}{5} = 500 \times \frac{3}{5}$

$\therefore$ $\mathbf{W_2 = 375\ N}$

ดังนั้น W_2 มีค่าเท่ากับ 375 นิวตัน

(ค)



จาก $\Sigma F = O$

(W_1) ; $W_1 \sin 30^\circ = T$ ...❶

(W_2) ; $W_2 = 2T$ ...❷

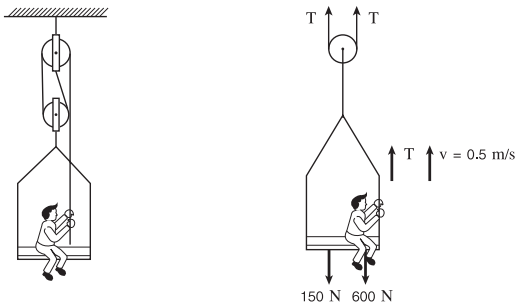
แทน ❶ ใน ❷ $W_2 = 2W_1 \sin 30^\circ$

$= 2 \times 500 \times \frac{1}{2}$

$\therefore \mathbf{W_2 = 500\ N}$

ดังนั้น W_2 มีค่าเท่ากับ 500 นิวตัน

4. ชายคนหนึ่งหนัก 600 นิวตัน นั่งในกระเช้าหนัก 150 นิวตันดังรูป เขาต้องออกแรงดึงเชือกเท่าใด เพื่อให้กระเช้าเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร็วคงที่ 0.5 เมตร/วินาที



วิเคราะห์โจทย์ ระบบสมดุล ใส่แรงกระทำต่อคนและกระเช้า

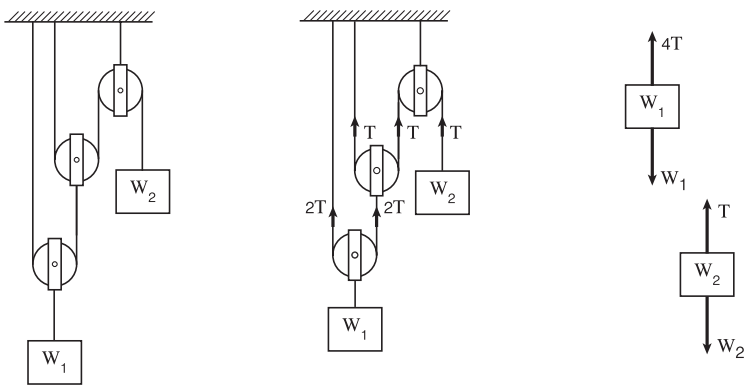
จาก $\Sigma F = 0$

$3T = 150 + 600$

$\therefore \mathbf{T = 250\ N}$

ดังนั้นเขาต้องออกแรงดึงเชือก 250 นิวตัน

5. ระบบรอกประกอบด้วยรอกหลายตัว ถือว่ารอกทุกตัวเบาและเกลี้ยง ถ้า W_1 มีค่า 1,000 นิวตัน จงหา W_2 ที่ทำให้ระบบสมดุล



วิเคราะห์โจทย์ ใส่แรงดึงเชือกทุกเส้น แล้วใส่แรงกระทำต่อ W_1 และ W_2 ซึ่งอยู่ในสภาพสมดุล

จาก $\Sigma F = 0$

(W_1) ; $4T = W_1 = 1{,}000$

$T = 250\ N$

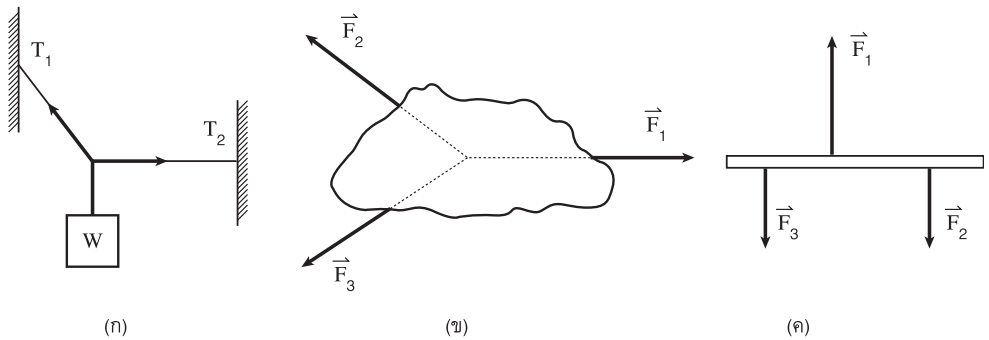
(W_2) ; $W_2 = T$

$\therefore$ $\mathbf{W_2 = 250\ N}$

ดังนั้น W_2 มีค่า 250 นิวตัน

4.2.2 เงื่อนไขของการสมดุลของแรงสามแรง

เมื่อมีแรงกระทำต่อวัตถุ 3 แรง แล้ววัตถุสมดุลต่อการเลื่อนที่ (อยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว) ดังรูป 4.4



รูป 4.4 *แสดงสมดุลเนื่องจากแรงสามแรง*

จากรูป 4.4 ได้ว่าแรงทั้งสามต้องมีความสัมพันธ์กันดังนี้

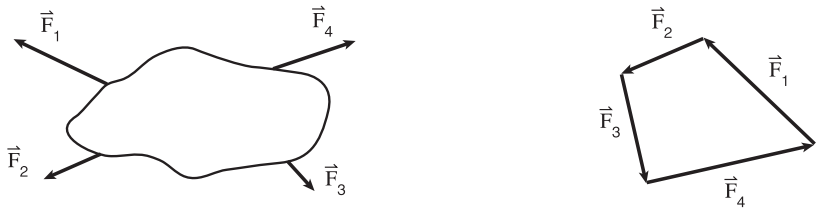
1. **แรงทั้งสามต้องพบกันที่จุด ๆ หนึ่งเท่านั้น หรือแรงทั้งสามต้องเป็นแรงขนานกันหมด**
2. **แรงทั้งสามต้องอยู่ในระนาบเดียวกันเท่านั้น**
3. **ผลรวมของแรงคู่ใดคู่หนึ่งต้องมีขนาดเท่ากับแรงที่สาม แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน**
4. **ถ้าเขียนผลรวมของแรงทั้งสามจะได้ว่า**

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

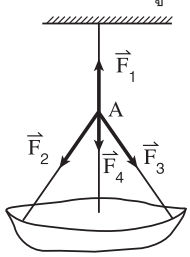
หรือ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$ (จริงตามข้อ 3)

หมายเหตุ ถ้ามีแรงย่อยมากกว่า 3 แรงกระทำต่อวัตถุแล้ววัตถุสมดุลต่อการเลื่อนที่พบว่า

1. แรงเหล่านั้นไม่จำเป็นต้องพบกันที่จุด ๆ เดียวกัน เช่น



2. แรงเหล่านั้นไม่จำเป็นต้องอยู่ในระนาบเดียวกันเท่านั้น เช่น



จากรูป จุด A อยู่นิ่ง เมื่อมีแรง $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ กระทำโดยแรงทั้ง 4 ไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกันเลย

3. เมื่อเขียนสมการผลรวมของแรงทั้ง 4 จะได้ว่า

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$ และถ้ามีแรง N แรงกระทำแล้ววัตถุสมดุลต่อการเลื่อนที่ อาจเขียนได้ว่า

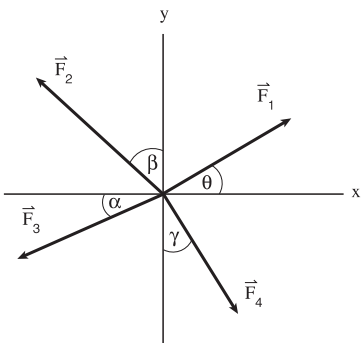
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_N = 0$$

หรือเขียนย่อ ๆ ว่า

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$$

ซึ่งอ่านว่า ซิกมาร์ $\vec{F}_i = 0$ เมื่อ $i = 1$ ถึง N

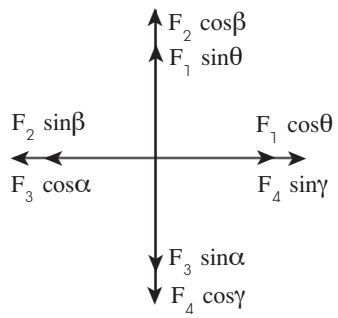
เมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลต่อการเลื่อนที่พบว่า $\Sigma\vec{F} = 0$ และยังพบอีกว่าไม่ว่าจะหาผลรวมของแรงย่อยในทิศทางใด ๆ ก็จะมีแรงลัพธ์ในแนวนั้น ๆ เท่ากับศูนย์ด้วย



รูป 4.5 *แสดงสมดุลเนื่องจากแรงสี่แรง*

จากรูป 4.5 เมื่อแรง $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ และ $\vec{F}_4$ กระทำต่อวัตถุแล้ววัตถุสมดุล แสดงว่า $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$ เมื่อแตกแรงเหล่านั้นให้อยู่บนแกน x, y พบว่า $\Sigma\vec{F}_x$ (แรงลัพธ์ของแกน x) และ $\Sigma\vec{F}_y$ (แรงลัพธ์ของแกน y) ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะว่าถ้า $\Sigma\vec{F}_x$ และ $\Sigma\vec{F}_y$ ไม่เท่ากับศูนย์ เมื่อ รวม $\Sigma\vec{F}_x$ และ $\Sigma\vec{F}_y$ เข้าด้วยกัน จะได้แรงลัพธ์ ($\Sigma\vec{F}$) ไม่เท่ากับศูนย์ซึ่งแย้งกับตอนต้นดังนั้นอาจเขียนได้ว่าเมื่อ**วัตถุสมดุลต่อการเลื่อนที่**

1. $\Sigma\vec{F}_x = 0$ จะได้ว่า
ผลรวมของแรงทางขวา = ผลรวมของแรงทางซ้าย
2. $\Sigma\vec{F}_y = 0$ จะได้ว่า
ผลรวมของแรงพุ่งขึ้น = ผลรวมของแรงพุ่งลง



หมายเหตุ

ในการแก้ปัญหาสมดุลต่อการเลื่อนที่ อาจใช้แกนตั้งฉาก 2 แกนในแนวอื่น ๆ ก็ได้ผลเหมือนกันไม่จำเป็นต้องเป็นแกน x, y เสมอไป

จากรูปข้างต้น จะได้ความสัมพันธ์ของแรงเมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลต่อการเลื่อนที่ว่า

1. $\Sigma F_x = 0$ ได้ว่า $F_1 \cos\theta + F_4 \sin\gamma = F_2 \sin\beta + F_3 \cos\alpha$
2. $\Sigma F_y = 0$ ได้ว่า $F_1 \sin\theta + F_2 \cos\beta = F_3 \sin\alpha + F_4 \cos\gamma$

ซึ่งจากความรู้เรื่องสมดุลต่อการเลื่อนที่ เราอาจนำไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หาแรงที่ไม่ทราบค่าได้ดังจะได้ พบจากโจทย์ตัวอย่างต่อไป

ความรู้ที่ต้องนำมาใช้

1. การแยกเวกเตอร์
2. การหาเวกเตอร์ลัพธ์ โดยวิธีคำนวณ

6. วัตถุมีมวล 10 กิโลกรัม แขวนด้วยเชือกติดกับเพดาน เมื่อออกแรงดึงวัตถุมีทิศขนานกับแนวระดับจนทำให้เชือกเอียงทำมุม 37° กับแนวดิ่ง จงหา

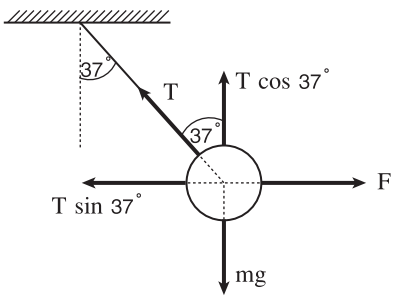
ก. ความตึงในเส้นเชือก **ข. แรงที่ใช้ดึงวัตถุ**

ค. ถ้าเชือกทนแรงตึงได้มากที่สุด 200 นิวตัน จะออกแรงดึงตามแนวระดับจนเชือกทำมุมเท่าไร เชือกจึงพอดีจะขาด

วิเคราะห์โจทย์ 1. เขียนรูป แล้วใส่แรงกระทำต่อวัตถุ

2. แตกแรง ให้อยู่บนแกนตั้งฉาก 2 แกน

3. หาความสัมพันธ์ของแรงบนแกนแต่ละแกนจาก $\Sigma F = 0$



(ก) และ (ข)

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $T \cos 37^\circ = mg$

$T \times \frac{4}{5} = 100$

$\therefore T = 125$ N

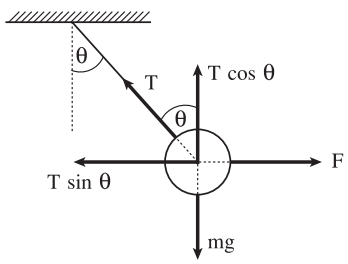
(แนวระดับ) $F = T \sin 37^\circ$

$= 125 \times \frac{3}{5}$

$\therefore F = 75$ N

ดังนั้น ความตึงในเส้นเชือกเท่ากับ 125 นิวตัน แรงที่ใช้ดึงวัตถุ เท่ากับ 75 นิวตัน

(ค) การแก้ปัญหาเหมือนข้อ ก และ ข เมื่อ $T = 200$ N



จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $T \cos\theta = mg$

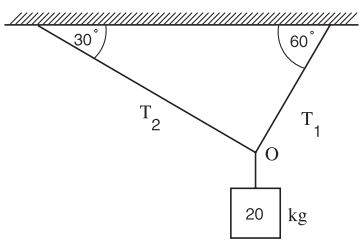
$200 \cos\theta = 100$

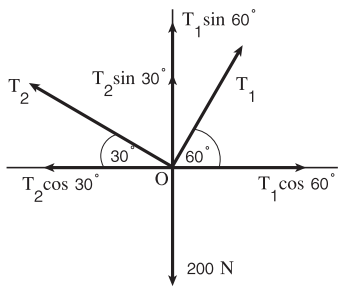
$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 60^\circ$

ดังนั้น เชือกจะพอดีขาดเมื่อเชือกทำมุม 60° กับแนวดิ่ง

7. มวล 20 กิโลกรัม แขวนด้วยเชือก 2 เส้น ทำมุมกับเพดานดังรูปข้างล่าง จงหาแรงตึงเชือกของ T_1, T_2





วิเคราะห์โจทย์ 1. ใส่แรงกระทำที่จุด O

2. แตกแรงให้อยู่ในแกน x และแกน y

3. หาความสัมพันธ์ของแรงต่าง ๆ จาก $\Sigma F = O$

จาก $\Sigma F = 0$

(แนว x) $T_1 \cos 60^\circ = T_2 \cos 30^\circ$

$T_1 \times \frac{1}{2} = T_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore T_1 = \sqrt{3}\, T_2$ ...❶

(แนว y) $T_1 \sin 60^\circ + T_2 \sin 30^\circ = 200$

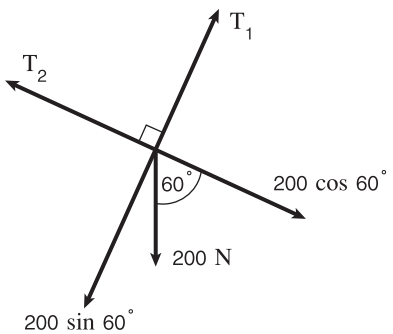
$\sqrt{3}\, T_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + T_2 \times \frac{1}{2} = 200$

$\therefore \mathbf{T_2 = 100\ N}$

แทนค่า T_2 ใน ❶ ; $\mathbf{T_1 = 100\sqrt{3} = 173.2\ N}$

ดังนั้นแรงตึงเชือก T_1 และ T_2 มีค่าเท่ากับ 173.2 นิวตัน และ 100 นิวตัน ตามลำดับ

จากข้อ 7 อาจมีวิธีการแก้ปัญหาอีกวิธีหนึ่งเนื่องจาก มุมระหว่าง T_1 และ T_2 เท่ากับ 90° อาจแยกแรง 200 N ให้อยู่ในแนว T_1 และ T_2 ดังรูป



จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $T_1 = 200 \sin 60^\circ$

$= 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$

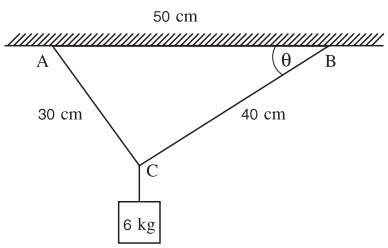
$\mathbf{T_1 = 173.2\ N}$

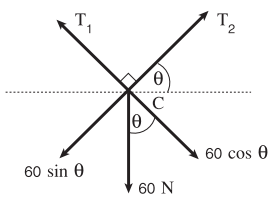
และ $T_2 = 200 \cos 60^\circ$

$= 200 \times \frac{1}{2}$

$\mathbf{T_2 = 100\ N}$

8. นำเชือกเบามา 3 เส้นผูกเข้าด้วยกันดังรูป จงหาแรงตึงของเชือกในแต่ละเส้น





วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 7 เนื่องจาก ΔABC มี C เป็นมุมฉาก ดังนั้น จึงใช้วิธีการแตกแรง T_3 (60 N) ให้อยู่ในแนวเดียวกับ T_1, T_2

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $T_1 = 60 \cos\theta$

$\mathbf{T_1 = 60 \times \frac{4}{5} = 48\ N}$

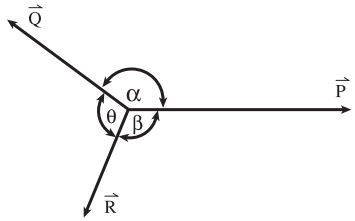
และ $T_2 = 60 \sin\theta$

$\mathbf{T_2 = 60 \times \frac{3}{5} = 36\ N}$

ดังนั้น แรงตึงของเชือกในแต่ละเส้นเท่ากับ 48 นิวตัน, 36 นิวตัน และ 60 นิวตัน ตามลำดับ

4.2.3 ทฤษฎีของลาร์มี (Lami Theorem)

เมื่อมีแรงสามแรงมากระทำร่วมกันที่จุด ๆ หนึ่ง และอยู่ในสภาพสมดุลดังรูป 4.6 จะได้ว่า อัตราส่วนของแรงต่อ sine ของมุมตรงข้ามของแรงย่อมมีค่าเท่ากัน



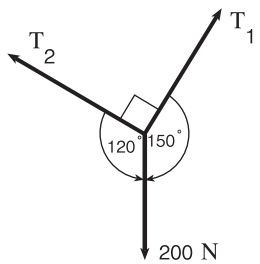
จากรูป 4.6 แรง P, Q, R อยู่ในสภาพสมดุล จากทฤษฎีของลาร์มี จะได้ว่า

$$\frac{P}{\sin\theta} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

รูป 4.6 *แสดงความสัมพันธ์ของแรงตามทฤษฎีลาร์มี*

9. จากข้อ 7 ให้ใช้ทฤษฎีของลาร์มีหา T_1 และ T_2

วิเคราะห์โจทย์ เขียนรูป แล้วใส่มุมระหว่างแรงทั้งสาม



จากทฤษฎีของลาร์มี

$$\frac{T_1}{\sin 120^\circ} = \frac{T_2}{\sin 150^\circ} = \frac{200}{\sin 90^\circ}$$

ได้ว่า $T_1 = \dfrac{200\sin 120^\circ}{\sin 90^\circ}$

$= \dfrac{200 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = 100\sqrt{3}$ N

$\therefore$ **T_1 = 173.2 N**

และ $T_2 = \dfrac{200\sin 150^\circ}{\sin 90^\circ}$

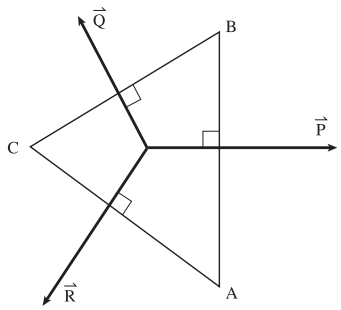
$= \dfrac{200 \times \frac{1}{2}}{1}$

$\therefore$ **T_2 = 100 N**

ดังนั้น ขนาดของ T_1 และ T_2 โดยวิธีการแยกแรงและทฤษฎีของลาร์มี ให้คำตอบเหมือนกัน

บทแทรกของทฤษฎีของลาร์มี

กล่าวว่า “เมื่อมีแรงสามแรงมากระทำร่วมกันที่วัตถุหนึ่ง แล้วทำให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลรูปสามเหลี่ยมใดก็ตามที่มีด้านทั้งสามตั้งฉากกับแนวของแรงทั้งสามนั้นตามลำดับแล้วด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนั้น ย่อมเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงซึ่งมีแนวตั้งฉากกับด้านนั้นตามลำดับ”

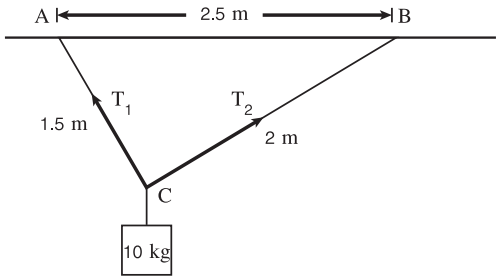


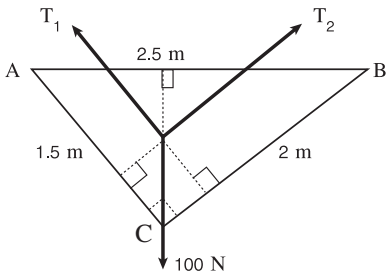
จากรูปได้ว่า

$$\frac{P}{AB} = \frac{Q}{BC} = \frac{R}{CA}$$

รูป 4.7 *แสดงความสัมพันธ์ของแรง ตามบทแทรกของทฤษฎีของลาร์มี*

10. จากรูปมวล 10 กิโลกรัม แขวนด้วยเชือก 2 เส้น ยาว 1.5 เมตร และ 2 เมตร จุดแขวนเชือกห่างกัน 2.5 เมตร จงหาความตึงเชือกแต่ละเส้น





วิเคราะห์โจทย์ จากรูปที่กำหนดให้สามารถใช้บทแทรกของทฤษฎีของลาร์มีได้

จาก $\frac{T_1}{BC} = \frac{T_2}{AC} = \frac{100}{AB}$

ได้ว่า $T_1 = \frac{100 \times BC}{AB}$

$= \frac{100 \times 2}{2.5}$

$\therefore \quad \mathbf{T_1 = 80\ N}$

และ $T_2 = \frac{100 \times AC}{AB}$

$= \frac{100 \times 1.5}{2.5}$

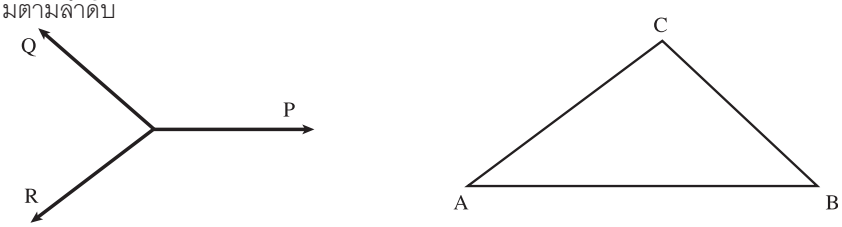
$\therefore \quad \mathbf{T_2 = 60\ N}$

ดังนั้น T_1 และ T_2 มีค่าเท่ากับ 80 นิวตัน และ 60 นิวตัน ตามลำดับ

(เพื่อความมั่นใจอาจใช้วิธีการแยกเวกเตอร์ ตรวจสอบค่า T_1 และ T_2 ก็ได้)

4.2.4 ทฤษฎีสามเหลี่ยมแทนแรง

กล่าวว่า "ถ้ามีแรงสามแรงกระทำร่วมกันที่จุด ๆ หนึ่ง และแรงทั้งสามอยู่ในภาวะสมดุลขนาดและทิศทางของแรงทั้งสามสามารถแทนได้โดยด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งดังรูป 4.8 ในเมื่อด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนั้นขนานกับแนวแรงทั้งสามตามลำดับ

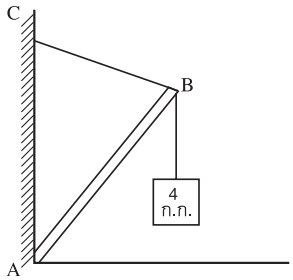


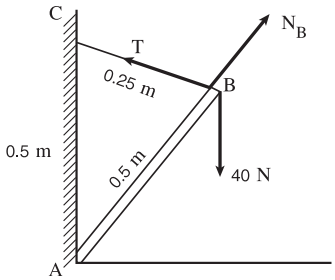
รูป 4.8 *แสดงความสัมพันธ์ของแรงกับสามเหลี่ยมแทนแรง*

เมื่อ AB//P, BC//Q และ CA//R จะได้ว่า

$$\frac{P}{AB} = \frac{Q}{BC} = \frac{R}{CA}$$

11. คาน AB ยาว 0.5 เมตร เสียบอยู่กับซอกกำแพงที่จุด A ที่ปลาย B มีเชือก BC ผูกติดกับกำแพงที่จุด C โดย BC ยาว 0.25 เมตร และ AC ยาว 0.5 เมตร นำก้อนน้ำหนัก 4 กิโลกรัมผูกติดที่ปลาย B ดังรูป จงหาแรงตึงเชือก BC





วิเคราะห์โจทย์ 1. ใส่แรงกระทำต่อคานที่จุด B

2. ใช้ทฤษฎีสามเหลี่ยมแทนแรงเพื่อหา T ($T//BC$, $40//AC$, $N_B//AB$)

จากทฤษฎีสามเหลี่ยมแทนแรง

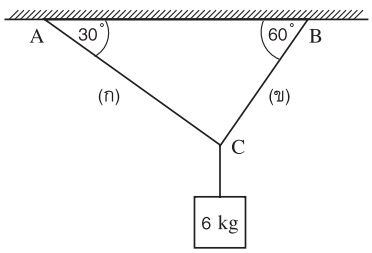
$$\frac{T}{BC} = \frac{40}{AC}$$

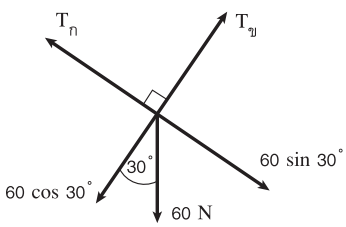
$$T = \frac{40 \times 0.25}{0.5}$$

$$\therefore \quad \mathbf{T = 20\ N}$$

ดังนั้น แรงตึงเชือก BC เท่ากับ 20 นิวตัน

12. มวล 6 กิโลกรัม แขวนด้วยเชือก 2 เส้นทำมุมกับเพดานดังรูป จงหาอัตราส่วนของขนาดแรงตึงในเชือก (ก) ต่อแรงตึงในเชือก (ข)





วิเคราะห์โจทย์ จากโจทย์ข้อนี้ เนื่องจาก$T_ก$ ตั้งฉากกับ $T_ข$ ควรแยกแรง 60 N ออกเป็น 2 แรงย่อย ให้อยู่ในแนว $T_ก$ และ $T_ข$

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $T_ก = 60 \sin 30^\circ$ ...❶

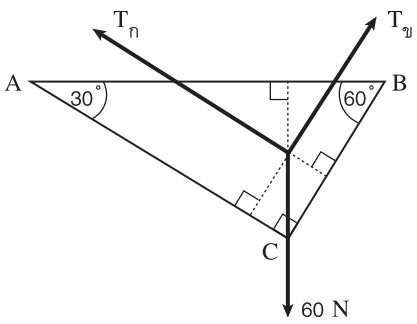
และ $T_ข = 60 \cos 30^\circ$ ...❷

❶ ÷ ❷; $\frac{T_ก}{T_ข} = \tan 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น อัตราส่วนของ $T_ก$ ต่อ $T_ข$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

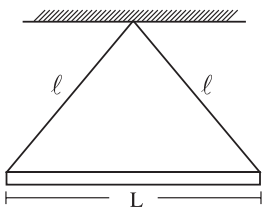
จากโจทย์ข้อ 12 นี้ เนื่องจาก ΔABC เป็น Δ มุมฉาก อาจใช้บทแทรกของทฤษฎีของลาร์มีได้



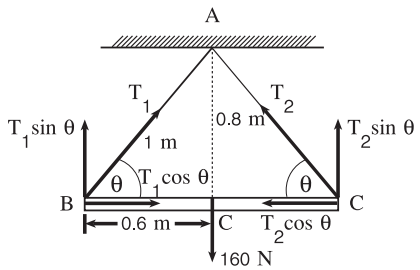
จาก $\frac{T_ก}{BC} = \frac{T_ข}{AC}$

$\frac{T_ก}{T_ข} = \frac{BC}{AC} = \tan 30^\circ$

$\therefore \quad \frac{T_ก}{T_ข} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

13. 

คานสม่ำเสมอยาว L = 1.2 เมตร มีมวล 16 กิโลกรัม แขวนไว้ด้วยเชือกเบายาว ℓ = 1 เมตร ที่ปลายทั้งสองดังรูป แรงตึงในเส้นเชือกเป็นเท่าใด



วิเคราะห์โจทย์ 1. ใส่แรงกระทำต่อคาน

2. แยกแรงให้อยู่บนแกน x, y

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวระดับ) $T_1 \cos\theta = T_2 \cos\theta$

$T_1 = T_2 = T$

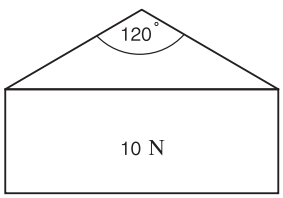
(แนวดิ่ง) $T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta = 160$

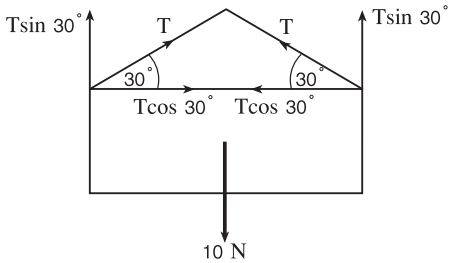
$2T \times \frac{0.8}{1} = 160$

$\therefore \quad \mathbf{T = 100\ N}$

ดังนั้น แรงตึงในเส้นเชือกเท่ากับ 100 นิวตัน

14. กรอบรูปหนัก 10 นิวตัน ใช้เชือกผูกที่มุมบนของกรอบรูป แล้วแขวนตะปูตรงจุดกึ่งกลางเชือก ถ้าเชือกเส้นนี้ทำมุม 120° ต่อกันดังรูป จงหาความตึงเชือกแต่ละเส้น





วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 13

จาก $\Sigma F = 0$

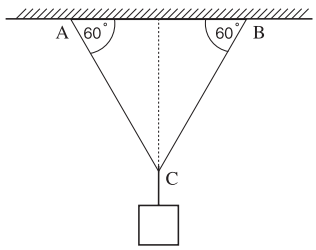
(แนวดิ่ง) $2T \sin 30^\circ = 10$

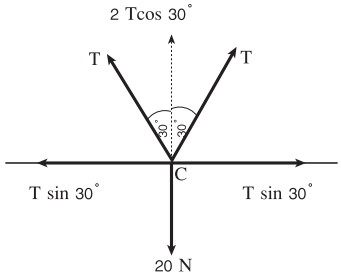
$2T \times \frac{1}{2} = 10$

$\therefore \quad T = 10\ N$

ดังนั้น ความตึงเชือกแต่ละเส้นเท่ากับ 10 นิวตัน

15. วัตถุมวล 2 กิโลกรัม ผูกเชือกกับเพดานดังรูป จงหาความตึงในเชือกที่ติดกับเพดาน





วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหา เหมือนข้อ 13

จาก $\Sigma F = 0$

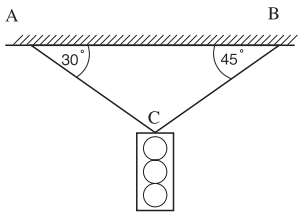
(แนวดิ่ง) $2T \cos 30^\circ = 20$

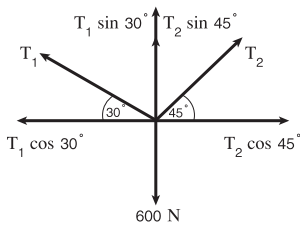
$$2T \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20$$

$$\therefore \quad \mathbf{T = 11.55\ N}$$

ดังนั้นความตึงในเชือกเท่ากับ 11.55 นิวตัน

16. จากรูป ไฟสัญญาณจราจรหนัก 600 นิวตัน แขวนด้วยลวด AC และ BC จงหาแรงตึงในเส้นลวดทั้งสอง





วิเคราะห์โจทย์ 1. ใส่แรงกระทำต่อไฟสัญญาณ

2. แตกแรงให้อยู่ในแนวแกน x และ y

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวระดับ) $T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 45^\circ$

$$T_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = T_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} T_2 \qquad \text{...❶}$$

(แนวดิ่ง) $T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 45^\circ = 600$

$$T_1 \times \frac{1}{2} + T_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 600$$

$$T_1 + \sqrt{2}T_2 = 1{,}200 \qquad \text{...❷}$$

แทนค่า T_1 จาก ❶ ใน ❷

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} T_2 + \sqrt{2}T_2 = 1{,}200$$

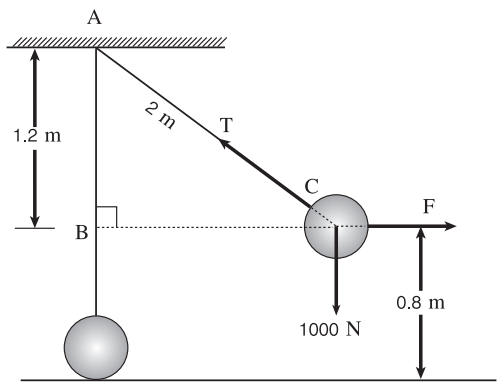
$$\mathbf{T_2 = 537.95\ N}$$

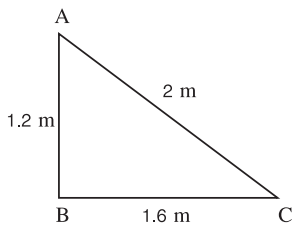
แทนค่า T_2 ใน ❶ ; $T_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 537.95$

$\therefore$ **T_1 = 439.23 N**

ดังนั้นแรงตึงในเส้นลวด AC และ BC เท่ากับ 439.23 นิวตันและ 537.95 นิวตันตามลำดับ

17. วัตถุหนัก 1000 นิวตัน วางอยู่บนพื้นและผูกด้วยเชือกเบายาว 2 เมตร ออกแรง F ใน แนวระดับดึงวัตถุให้สูงจากพื้น 0.8 เมตร ดังรูป จงหาขนาดของแรง F มีค่ากี่นิวตัน





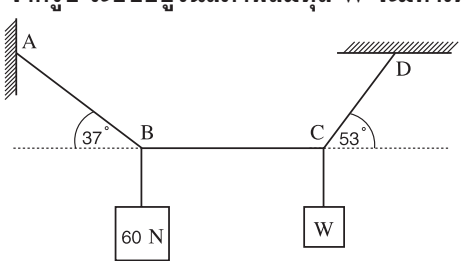
วิเคราะห์โจทย์ เมื่อมีแรง 3 แรง กระทำต่อวัตถุให้อยู่ในสมดุลและรู้ด้าน AB, BC, CA ซึ่งขนานกับ 1,000, F และ T ตามลำดับ ต้องการหาขนาดของ F ควรใช้ ทฤษฎีสามเหลี่ยมแทนแรงจะง่ายที่สุด

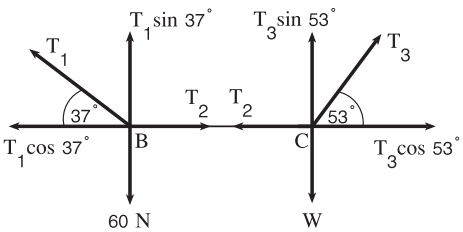
จาก $\frac{F}{1.6} = \frac{1,000}{1.2}$

F = 1333.33 N

ดังนั้น แรง F มีขนาด 1333.33 นิวตัน

18. จากรูป ระบบอยู่ในสภาพสมดุล W จะมีค่าเท่าไร





วิเคราะห์โจทย์

1. ใส่แรงกระทำที่จุด B และ C
2. ต้องการหา W ต้องรู้แรงตึง BC ก่อน โดยคิดสมดุลที่ B
3. คิดสมดุลที่ C จะหา W ได้

หา T_2 ก่อน (พิจารณาที่ B)

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $T_1 \sin 37^\circ = 60$ ...❶

(แนวระดับ) $T_1 \cos 37^\circ = T_2$ ...❷

❶ ÷ ❷ ; $\tan 37^\circ = \frac{60}{T_2}$

$$\therefore \quad T_2 = 60 \times \frac{4}{3} = 80 \text{ N}$$

หา W (พิจารณาที่ C)

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $W = T_3 \sin 53^\circ$ ...❸

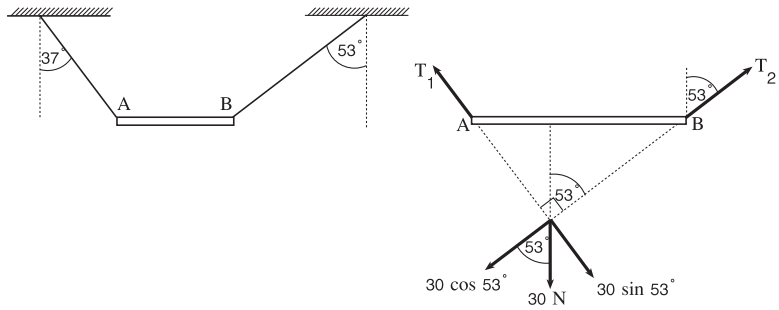
(แนวระดับ) $T_2 = T_3 \cos 53^\circ$ ...❹

❸ ÷ ❹ ; $\frac{W}{T_2} = \tan 53^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{W} = 80 \times \frac{4}{3} = \mathbf{106.67 \text{ N}}$$

ดังนั้น W มีค่า 106.67 นิวตัน (ข้อนี้อาจใช้ลาร์มี แก้ปัญหาได้)

19. ไม้ท่อนหนึ่งหนัก 30 นิวตัน แขวนห้อยด้วยเชือก 2 เส้น ดังรูป จงหาแรงตึงในเชือกทั้งสอง



วิเคราะห์โจทย์

1. ใส่แรงกระทำต่อท่อนไม้
2. เนื่องจาก T_1 และ T_2 ตั้งฉากกัน ควรแก้ปัญหาโดยการแยกน้ำหนัก 30 N ให้อยู่ในแนว T_1 และ T_2

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $T_1 = 30 \sin 53^\circ$

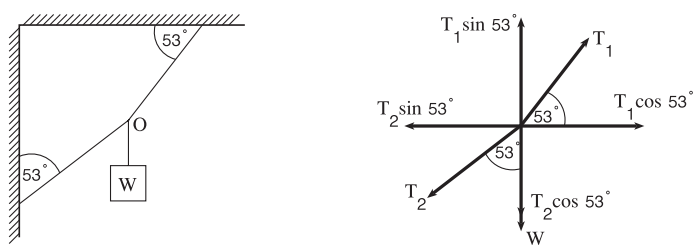
$$\therefore \quad \mathbf{T_1} = 30 \times \frac{4}{5} = \mathbf{24 \text{ N}}$$

และ $T_2 = 30 \cos 53^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{T_2} = 30 \times \frac{3}{5} = \mathbf{18 \text{ N}}$$

ดังนั้นแรงตึงในเชือกทั้งสองเท่ากับ 24 และ 18 นิวตันตามลำดับ

20. ถ้าเชือกทนแรงตึงได้มากที่สุด 120 N จงหาค่าของน้ำหนัก W ที่มากที่สุด ที่ยังทำให้เชือกไม่ขาด



วิเคราะห์โจทย์

1. ใส่แรงกระทำที่จุด O แล้วแยกแรงให้อยู่บนแกน x, y
2. ถ้า W มีค่ามากที่สุดจะทำให้เชือกเส้นหนึ่งพอดีขาด ซึ่งจะมีแรงตึง 120 N พอดี

พิจารณาที่จุด O ; จาก $\Sigma F = 0$

(แนวระดับ) $T_1 \cos 53^\circ = T_2 \sin 53^\circ$

$T_1 \times \frac{3}{5} = T_2 \times \frac{4}{5}$

$T_1 = \frac{4}{3} T_2$ ...❶

จาก ❶ $T_1 > T_2$ $\therefore T_1 = 120$ N และ $T_2 = 90$ N

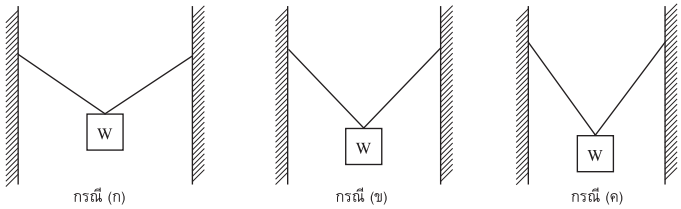
(แนวดิ่ง) $W + T_2 \cos 53^\circ = T_1 \sin 53^\circ$

$W + 90 \times \frac{3}{5} = 120 \times \frac{4}{5}$

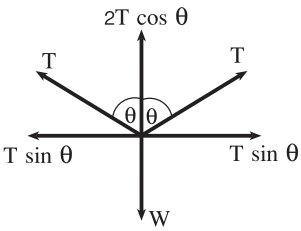
$\therefore$ **W = 42 N**

ดังนั้น W มีค่ามากที่สุด 42 นิวตัน

21. ก้อนน้ำหนัก W ถูกแขวนด้วยเชือก ซึ่งยาวเท่ากัน 2 เส้น ถ้าเพิ่มน้ำหนัก W ขึ้นไปเรื่อย ๆ อยากทราบว่าในกรณีใดที่เชือกจะขาดก่อนกัน



วิเคราะห์โจทย์ ก้อนน้ำหนัก W สมดุล ใส่แรงกระทำต่อก้อนน้ำหนัก



จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $2T \cos\theta = W$

$T = \frac{W}{2 \cos\theta}$

ได้ว่า cos θ มาก (หรือ θ น้อย) T มีค่าน้อย

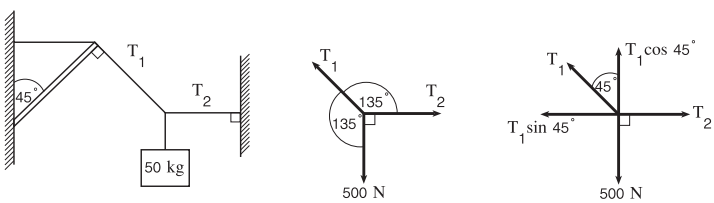
หรือ cos θ น้อย (หรือ θ มาก) T มีค่ามาก

จากรูป $\theta_ก > \theta_ข > \theta_ค$

จะได้ว่า $T_ก > T_ข > T_ค$

ดังนั้น ถ้าเพิ่ม W ขึ้นไปเรื่อย ๆ เชือกในกรณี (ก) จะขาดก่อน

22. แขวนมวล 50 กิโลกรัม ไว้ดังรูป จงหาอัตราส่วนของ $T_1 : T_2$



วิเคราะห์โจทย์ พิจารณาที่จุดตัดของเชือก T_1, T_2 และเชือกที่แขวนมวลซึ่งสมดุล และรู้ค่ามุมระหว่างแนวแรงทั้งสาม การหาอัตราส่วน $T_1 : T_2$ อาจใช้ทฤษฎีของลาร์มีหรือการแยกแรงก็ได้

ทฤษฎีของลาร์มี

จาก $\frac{T_1}{\sin 90^\circ} = \frac{T_2}{\sin 135^\circ}$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$$

การแยกแรง

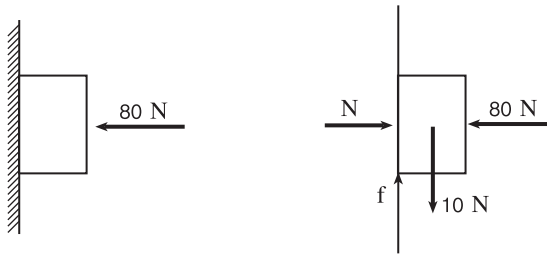
จาก $\Sigma F = O$

$$T_1 \sin 45^\circ = T_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$$

ดังนั้นอัตราส่วนของ $T_1 : T_2$ เท่ากับ $\sqrt{2} : 1$

23. ออกแรง 80 นิวตัน กดวัตถุมวล 1 กิโลกรัม ในทิศขนานกับแนวราบ ให้ติดอยู่กับกำแพง ดังรูป ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัตถุกับกำแพงมีค่า 0.2 จงหาขนาดของแรงเสียดทานที่กระทำต่อวัตถุ



วิเคราะห์โจทย์ 1. ใส่แรงกระทำต่อมวล 1 kg

2. มวลอยู่ติดกับกำแพงแสดงว่าสมดุล

จาก $\Sigma F = 0$

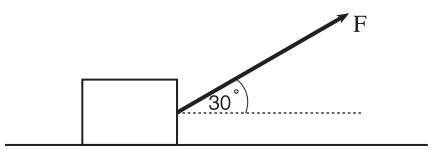
(แนวดิ่ง) $f = 10$ N

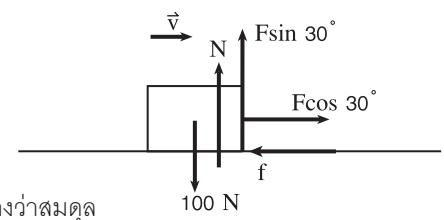
ดังนั้นแรงเสียดทานที่กระทำต่อวัตถุ เท่ากับ 10 นิวตัน

ข้อนี้ควรระวัง อย่าใช้สูตร $f = \mu N$ เพราะใช้ได้เมื่อวัตถุเริ่มเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นแรงเสียดทานสถิตสูงสุดจะมีค่า $f = 0.2 \times 80 = 16$ N

($f = 16$ N เป็นไปไม่ได้เพราะวัตถุจะเคลื่อนที่ขึ้น)

24. มวล 10 กิโลกรัม วางอยู่บนพื้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานเท่ากับ 0.3 จงหาขนาดของแรง F ที่ทำให้มวลนี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่





วิเคราะห์โจทย์ 1. มวลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ แสดงว่าสมดุล

2. ใส่แรงกระทำต่อมวล 10 kg แล้วแตกแรงให้อยู่ในแนว x, y

3. ข้อนี้ระวัง $N \neq mg$

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $N + F \sin 30^\circ = 100$

$N = 100 - \frac{F}{2}$ ...❶

(แนวระดับ) $F \cos 30^\circ = f = \mu N$

$F \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.3\,(100 - \frac{F}{2})$

$\frac{1.732\,F}{2} = 30 - \frac{0.3\,F}{2}$

$F = \frac{30 \times 2}{2.032}$

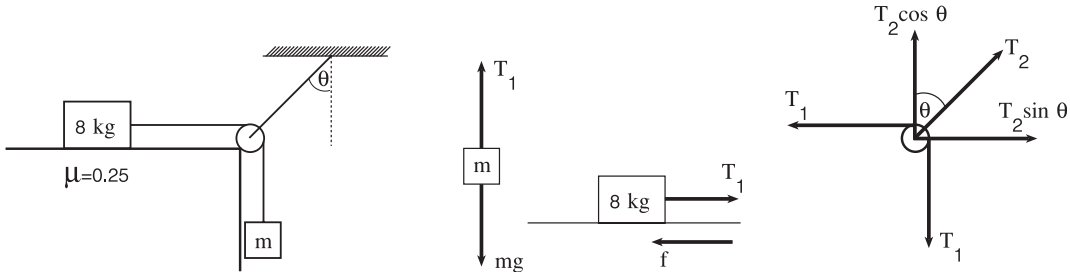
$\therefore \quad \mathbf{F = 29.53\ N}$

ดังนั้น ขนาดของแรง F เท่ากับ 29.53 นิวตัน

25. **จากรูป จงคำนวณหา**

ก. มวล m จะมีค่ามากที่สุดได้เท่าใด โดยระบบยังสมดุลได้

ข. มุม θ มีค่าเท่าไร



วิเคราะห์โจทย์ 1. มวล m มากที่สุด ทำให้มวล 8 kg เริ่มเคลื่อนที่

2. ใส่แรงกระทำต่อมวล m, มวล 8 kg และรอก

ก. จาก $\Sigma F = 0$

พิจารณาที่ m $T_1 = mg$ ...❶

พิจารณาที่ 8 kg $T_1 = f = \mu N$

$= 0.25 \times 80 = 20$ ...❷

❶ = ❷ ; $mg = 20$

$\therefore \quad \mathbf{m = 2\ kg}$

ดังนั้นมวล m มีค่ามากที่สุด 2 กิโลกรัม

ข. พิจารณาที่รอก จาก $\Sigma F = 0$

(แนวระดับ) $T_2 \sin\theta = T_1$ ...❸

(แนวดิ่ง) $T_2 \cos\theta = T_1$ ...❹

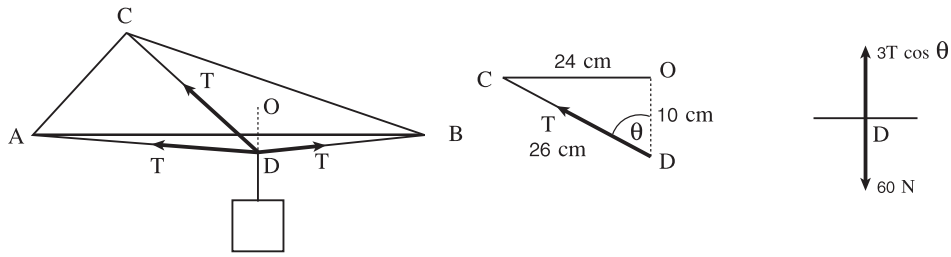
❸ ÷ ❹ ; $\tan\theta = 1$

$\therefore \quad \theta = \mathbf{45^\circ}$

ดังนั้นมุม θ เท่ากับ 45°

26. เชือกสี่เส้นผูกปลายข้างหนึ่งรวมเป็นปมเดียวกัน สามเส้นยาวเส้นละ 26 ซม. และหางปลายอีกข้างหนึ่งแยกกันไปผูกที่เพดาน จุดที่ผูกติดกับเพดานอยู่ที่มุมของสามเหลี่ยมด้านเท่า เส้นที่สี่มีก้อนน้ำหนัก 60 นิวตันผูกไว้ ถ้าปมเชือกห้อยต่ำจากเพดาน 10 ซม. ให้คำนวณแรงตึงเชือกแต่ละเส้น

วิเคราะห์โจทย์ วาดรูป แล้วใส่แรงกระทำในเส้นเชือกทั้งสี่ซึ่งสมดุล



จากรูปเชือกทั้งสามเส้น DA, DB และ DC มีแรงตึงเท่ากัน = T

จาก $\Sigma F = 0$

$3T\cos\theta = 60$

$3T \times \frac{10}{26} = 60$

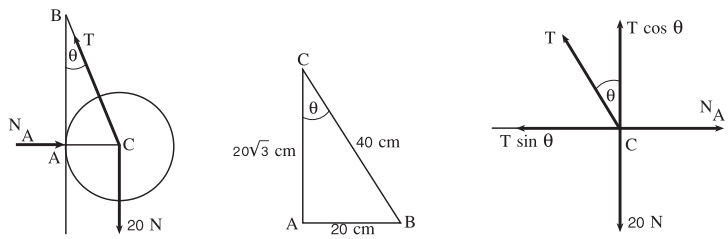
$\therefore \quad \mathbf{T = 52\ N}$

ดังนั้น เชือกแต่ละเส้นมีแรงตึง 52 นิวตัน

27. เชือกเบาเส้นหนึ่งยาว 20 ซม. มีปลายข้างหนึ่งผูกกับจุด ๆ หนึ่ง บนผิวทรงกลมลูกหนึ่งและปลายอีกข้างหนึ่งผูกไว้กับจุดบนกำแพง ซึ่งปราศจากความเสียดทาน ถ้าทรงกลมรัศมี 20 ซม. และหนัก 20 นิวตัน จงหาแรงตึงในเส้นเชือกและแรงปฏิกิริยาที่กำแพงกระทำต่อทรงกลม

วิเคราะห์โจทย์ 1. เขียนรูปแล้วใส่แรงกระทำต่อทรงกลม ซึ่งสมดุล

2. การแก้ปัญหาเพื่อหาแรงใด ๆ ถ้าเป็นสมดุลของแรง 3 แรง เลือกวิธีที่เหมาะสม



ที่ C $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $T\cos\theta = 20$

$T \times \frac{20\sqrt{3}}{40} = 20$

$\therefore \quad \mathbf{T} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \mathbf{23.09\ N}$

(แนวระดับ) $N_A = T\sin\theta$

$= \frac{40}{\sqrt{3}} \times \frac{20}{40} = \frac{20}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad \mathbf{N_A = 11.55\ N}$

โจทย์ข้อนี้อาจใช้ ทฤษฎี Δ แทนแรงก็ได้

จาก $\frac{T}{40} = \frac{N_A}{20} = \frac{20}{20\sqrt{3}}$

ได้ว่า $T = \frac{40}{\sqrt{3}} = 23.09$ N

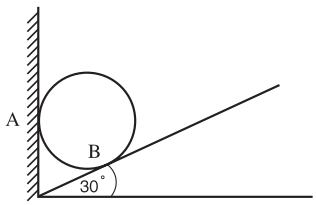
และ $N_A = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11.55$ N

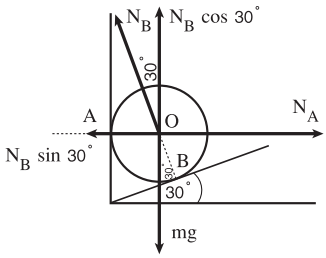
ดังนั้น แรงตึงในเชือกและแรงปฏิกิริยาที่กำแพงกระทำต่อทรงกลมเท่ากับ 23.09 นิวตัน และ 11.55 นิวตัน

หมายเหตุ

ในการแก้ปัญหาสมดุลเนื่องจากแรงสามแรงอาจใช้วิธีใดก็ได้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของนักเรียนเอง หมั่นฝึกฝนมาก ๆ จะแก้ปัญหาได้เร็วขึ้น

28. จากรูป พื้นเอียงทำมุม 30° กับแนวราบ วางติดกับกำแพงเกลี้ยง จงหาแรงปฏิกิริยาที่กำแพงและพื้นเอียงกระทำต่อวัตถุมวล m วัตถุติดกำแพงที่ A ติดพื้นเอียงที่ B





วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 27

พิจารณาที่จุด O (สมดุล)

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $N_B \cos 30° = mg$

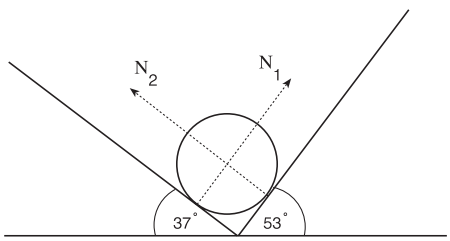
$\therefore N_B = \frac{2mg}{\sqrt{3}}$

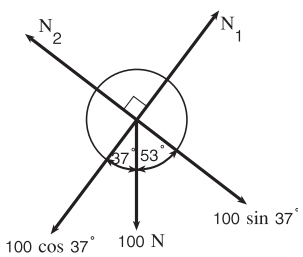
(แนวระดับ) $N_A = N_B \sin 30° = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}$

$\therefore N_A = \frac{mg}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่กำแพงและพื้นที่เอียงกระทำต่อวัตถุมวล m เท่ากับ $\frac{mg}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{2mg}{\sqrt{3}}$ ตามลำดับ

29. ทรงกลมมวล 10 กิโลกรัม วางนิ่งบนพื้นเอียง 2 อัน ซึ่งวางให้ปลายชิดกัน ทำมุม 37° และ 53° กับ แนวระดับตามรูป ถ้า N_1 และ N_2 เป็นขนาดของแรงที่พื้นเอียงกระทำต่อทรงกลม จงหาขนาดของแรง N_1 และ N_2





วิเคราะห์โจทย์ เนื่องจาก N_1 ตั้งฉากกับ N_2 จึงอาศัยการแยกแรง 100 N ให้อยู่ในแนวเดียวกับ N_1 และ N_2

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_1 = 100 \cos 37^\circ = 100 \times \frac{4}{5}$

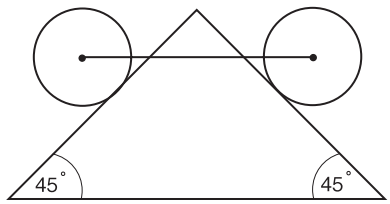
$\therefore$ **$N_1 = 80$ N**

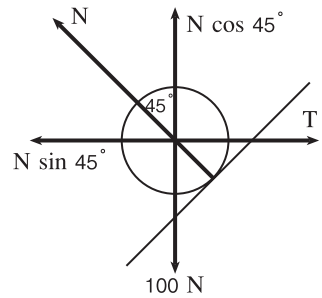
และ $N_2 = 100 \sin 37^\circ = 100 \times \frac{3}{5}$

$\therefore$ **$N_2 = 60$ N**

ดังนั้น ขนาดของแรง N_1 และ N_2 เท่ากับ 80 และ 60 นิวตัน ตามลำดับ

30. ทรงกลมขนาดเท่ากัน 2 ลูก หนักลูกละ 100 นิวตัน นำเชือกผูกในแนวผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมทั้งสองแล้ววางบนพื้นเอียงดังรูป จงหาแรงตึงในเส้นเชือกและแรงกระทำระหว่างทรงกลมกับพื้นเอียง





วิเคราะห์โจทย์ แก้ปัญหาโดยการแยกแรง N ให้อยู่บนแกน x, y (พิจารณาทรงกลมลูกใดลูกหนึ่งเพราะแรงกระทำเหมือนกัน)

จาก $\Sigma F = 0$

(แนวดิ่ง) $N \cos 45^\circ = 100$

$\therefore$ **$N = 100\sqrt{2}$ N**

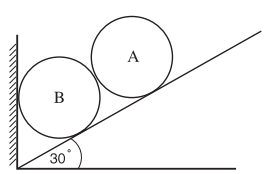
(แนวระดับ) $T = N \sin 45^\circ$

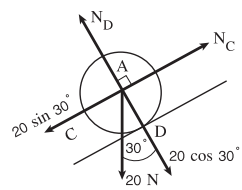
$\therefore$ **T** $= 100\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} =$ **100 N**

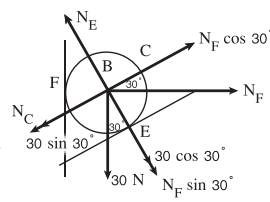
ดังนั้น แรงตึงในเส้นเชือกเท่ากับ 100 นิวตัน

แรงกระทำระหว่างทรงกลมกับพื้นเอียงเท่ากับ $100\sqrt{2}$ นิวตัน

31. ทรงกลม A และ B ขนาดเท่ากัน มีมวล 2 และ 3 กิโลกรัม วางบนพื้นเอียงทำมุม 30° ซึ่งปลายล่างวางชิดกับผนังดังรูป จงหาแรงปฏิกิริยาทุกแรง







วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาแยกคิดทีละลูก แล้วใช้วิธีแยกแรงให้อยู่บนแกนตั้งฉาก 2 แกน

พิจารณาที่ทรงกลม A (สมดุล)

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_C = 20 \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2}$

$\therefore \mathbf{N_C = 10\ N}$

$N_D = 20 \cos 30^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \mathbf{N_D = 17.32\ N}$

พิจารณาที่ทรงกลม B (สมดุล)

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_F \cos 30^\circ = 30 \sin 30^\circ + N_C$

$N_F \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \times \frac{1}{2} + 10$

$\therefore \mathbf{N_F} = \frac{50}{\sqrt{3}} = \mathbf{28.87\ N}$

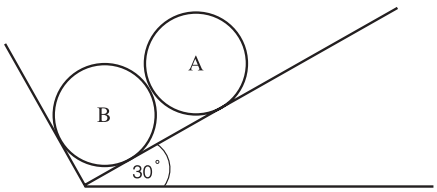
และ $N_E = 30 \cos 30^\circ + N_F \sin 30^\circ$

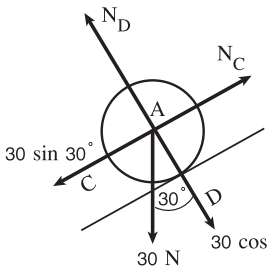
$= 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{50}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}$

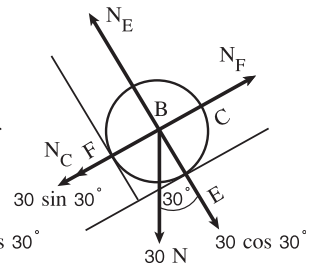
$\therefore \mathbf{N_E = 40.41\ N}$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยามีค่าเท่ากับ 10, 17.32,40.41 และ 28.87 นิวตัน

32. ทรงกลม A และ B ขนาดเท่ากัน มีมวล 3 กิโลกรัม วางบนพื้นเอียงทำมุม 30° ซึ่งปลายล่างวางชิดฝาที่ตั้งฉากกับพื้นเอียง ดังรูป จงหาแรงปฏิกิริยาทุกแรง







วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 31

พิจารณาที่ทรงกลม A (สมดุล)

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_C = 30 \sin 30^\circ = 30 \times \frac{1}{2}$

$\therefore \mathbf{N_C = 15\ N}$

และ $N_D = 30 \cos 30^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \mathbf{N_D = 15\sqrt{3}\ N}$

พิจารณาที่ทรงกลม B (สมดุล)

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_E = 30 \cos 30^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

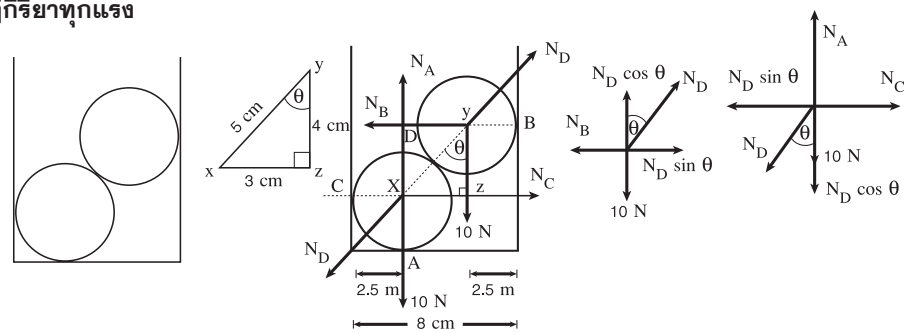
$\therefore$ $\mathbf{N_E = 15\sqrt{3}\ N}$

และ $N_F = N_C + 30 \sin 30^\circ = 15 + 30 \times \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{N_F = 30\ N}$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยามีค่าเท่ากับ 15, $15\sqrt{3}$, $15\sqrt{3}$และ 30 นิวตัน ตามลำดับ

33. ทรงกลมขนาดสม่ำเสมอหนักลูกละ 10 นิวตัน มีรัศมี ลูกละ 2.5 ซม. อยู่ในกล่องใบหนึ่งกว้าง 8 ซม. จงหาปฏิกิริยาทุกแรง



วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 32

พิจารณาทรงกลมลูกบน (สมดุล)

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_D \cos\theta = 10$

$N_D \times \frac{4}{5} = 10$

$\therefore$ $\mathbf{N_D = 12.5\ N}$

และ $N_B = N_D \sin\theta = 12.5 \times \frac{3}{5}$

$\therefore$ $\mathbf{N_B = 7.5\ N}$

พิจารณาทรงกลมลูกล่าง (สมดุล)

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_A = 10 + N_D \cos\theta$

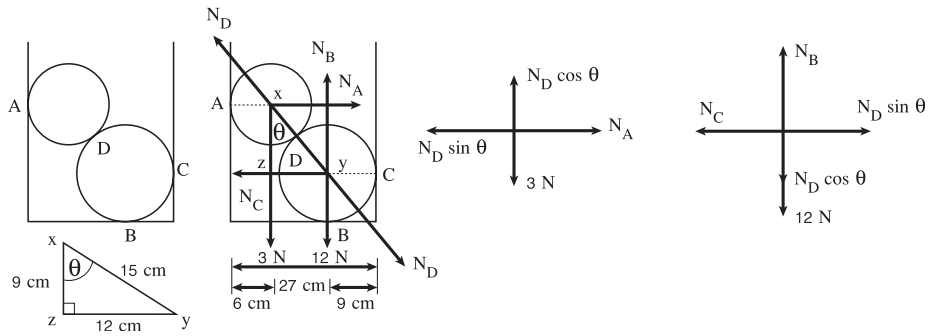
$\therefore$ $\mathbf{N_A} = 10 + 12.5 \times \frac{4}{5} = \mathbf{20\ N}$

และ $N_C = N_D \sin\theta = 12.5 \times \frac{3}{5}$

$\therefore$ $\mathbf{N_C = 7.5\ N}$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยามีค่าเท่ากับ 20, 7.5, 7.5 และ 12.5 นิวตัน ตามลำดับ

34. ทรงกลม 2 ลูก มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 และ 18 เซนติเมตร หนัก 3 และ 12 นิวตัน ตามลำดับวางในทรงกระบอกเส้นผ่านศูนย์กลาง 27 เซนติเมตรดังรูป ถ้าผิวทุกผิวไม่มีความฝืดแรงปฏิกิริยาที่จุด A, B, C และ D มีค่าเท่าใด



วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 33

พิจารณาทรงกลมบน

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_D \cos\theta = 3$

$N_D \times \frac{9}{15} = 3$

$\therefore \mathbf{N_D = 5\ N}$

และ $N_A = N_D \sin\theta = 5 \times \frac{12}{15}$

$\therefore \mathbf{N_A = 4\ N}$

พิจาณาทรงกลมล่าง

จาก $\Sigma F = 0$

ได้ว่า $N_C = N_D \sin\theta = 5 \times \frac{12}{15}$

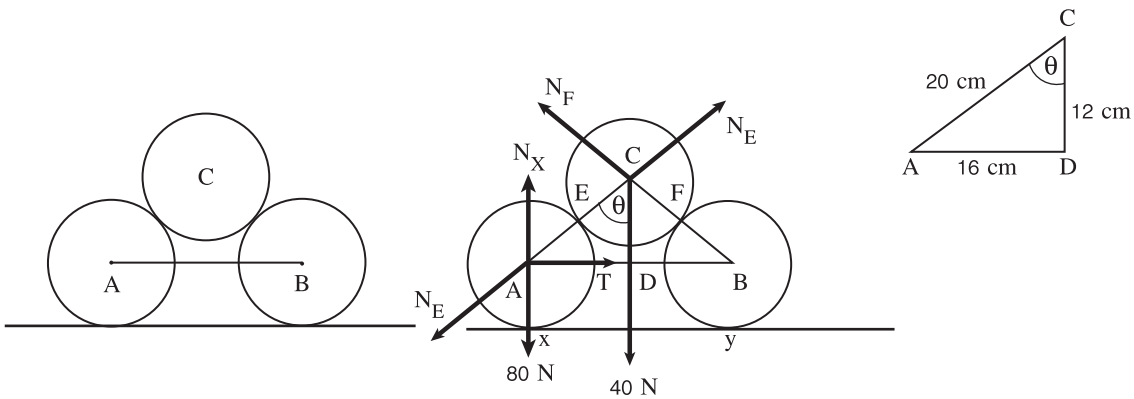
$\therefore \mathbf{N_C = 4\ N}$

และ $N_B = 12 + N_D \cos\theta = 12 + 5 \times \frac{9}{15}$

$\therefore \mathbf{N_B = 15\ N}$

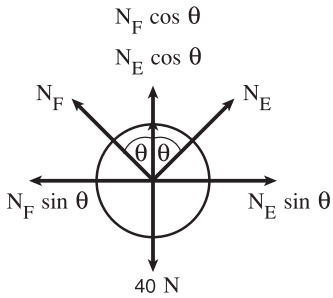
ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่จุด A, B, C และ D เท่ากับ 4, 15, 4 และ 5 นิวตัน ตามลำดับ

35. **ทรงกระบอกผิวเกลี้ยง 3 อัน ขนาดเท่ากัน มีรัศมีอันละ 10 ซม. วางซ้อนกันดังรูป ทรงกระบอกอันบนหนัก 40 นิวตัน ส่วนอันล่างหนักอันละ 80 นิวตัน จงหาแรงตึงในเส้นเชือก AB ซึ่งยาว 32 ซม.**



วิเคราะห์โจทย์ พิจารณาแรงกระทำต่อทรงกระบอก C และ A หรือ B (เนื่องจาก A และ B มีแรงกระทำเหมือนกัน) การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 34

พิจารณาทรงกม C (สมดุล)



จาก $\Sigma F = 0$

(แนวระดับ) $N_E \sin\theta = N_F \sin\theta$

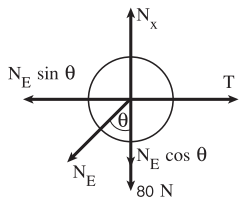
$N_E = N_F$

(แนวดิ่ง) $2\,N_E \cos\theta = 40$

$2\,N_E \times \frac{12}{20} = 40$

$N_E = \frac{100}{3}$ N

พิจารณาทรงกลม A (สมดุล)



จาก $\Sigma F = 0$

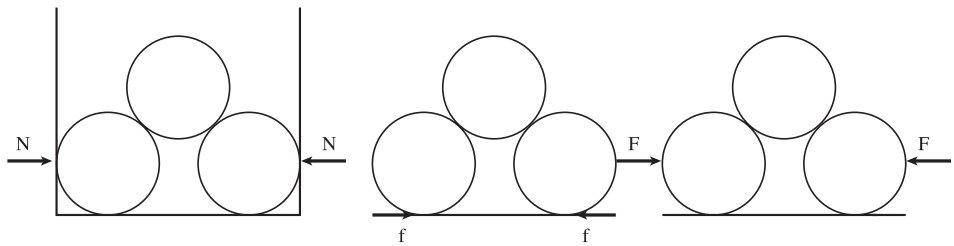
(แนวระดับ) $T = N_E \sin\theta$

$= \frac{100}{3} \times \frac{16}{20}$

$\therefore\ \mathbf{T} = \frac{80}{3} = \mathbf{26.67\ N}$

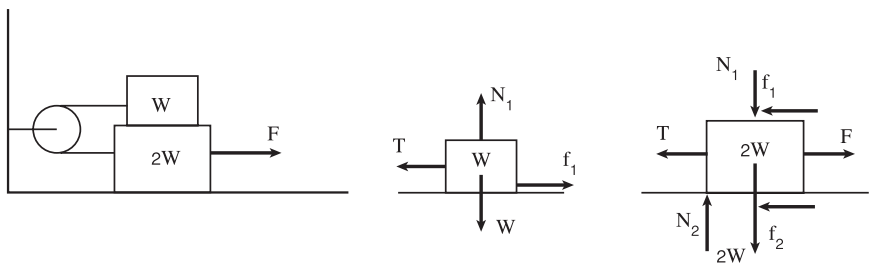
ดังนั้น แรงตึงในเส้นเชือก AB เท่ากับ 26.67 นิวตัน

หมายเหตุ **จากโจทย์ข้อ 35 อาจดัดแปลง เป็นนำทรงกระบอกทั้ง 3 ไปวางซ้อนในกล่องหรือวางซ้อนอยู่บนพื้นที่มีแรงเสียดทาน แล้วถามหาแรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่งต่าง ๆ หรือถามหาแรงเสียดทาน หรือสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่าง พื้นกับทรงกระบอก (หรือทรงกลมก็ได้ ซึ่งมีหลักการแก้ปัญหาเหมือนข้อ 35)**



จากรูปทั้งสาม แรง N, f หรือ F เปรียบเหมือนแรง T ในข้อ 35

36. วัตถุ W และ 2W วางซ้อนกัน โดยมีเชือกเส้นหนึ่งผูกและคล้องผ่านรอกดังรูป ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสแต่ละคู่เป็น μ จงหาขนาดของแรง F ที่พอดี ฉุดให้วัตถุเริ่มเคลื่อนที่



วิเคราะห์โจทย์ ระบบสมดุล ใช้วิธีแยกก้อนคิด

จาก $\Sigma F = O$

(W) ; $T = f_1 = \mu W$ ...❶

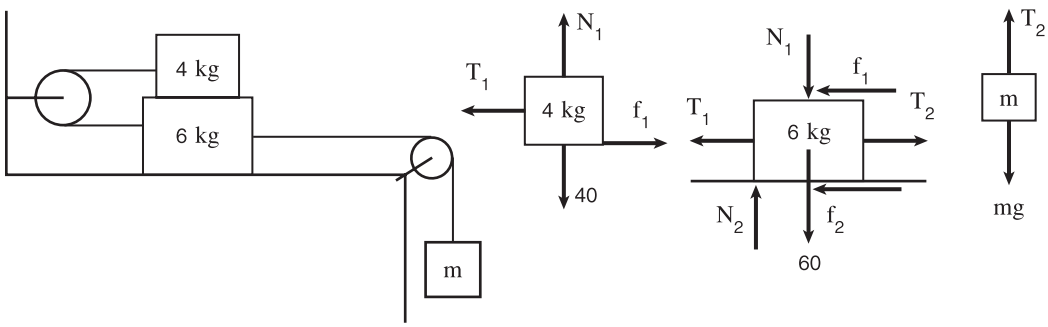
(2W) ; $F = T + f_1 + f_2$

$= \mu W + \mu W + \mu (3W)$

$\therefore \mathbf{F = 5\ \mu W}$

ดังนั้นแรง F มีขนาด 5 μW

37. จากรูปถ้าเชือกเบาและรอกไม่มีแรงเสียดทาน มวล m มีค่ามากที่สุดเท่าใดจึงยังทำให้มวล 6 กิโลกรัมและ 4 กิโลกรัม อยู่นิ่งได้ เมื่อสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตของทุกผิวมีค่า 0.4



วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 36

จาก $\Sigma F = 0$

(4) ; $T_1 = f_1 = \mu N_1$

$T_1 = 0.4 \times 40 = 16$ N

(6) ; $T_2 = T_1 + f_1 + f_2 = 16 + 16 + \mu N_2$

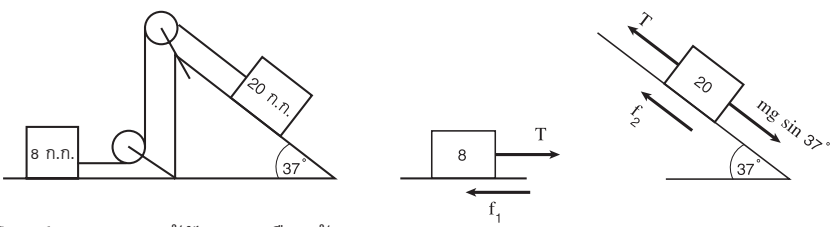
$T_2 = 32 + 0.4(100) = 72$ N

(m) ; $mg = T$

$\therefore \mathbf{m} = \frac{72}{10} = \mathbf{7.2\ kg}$

ดังนั้น มวล m มีค่ามากที่สุด 7.2 กิโลกรัม

38. จากรูปวัตถุมวล 20 กิโลกรัม เริ่มไถลลงตามพื้นเอียง ถ้าพื้นราบและพื้นเอียงมีค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากัน จะมีค่าเท่าใด



วิเคราะห์โจทย์ การแก้ปัญหาเหมือนข้อ 36

จาก $\Sigma F = 0$

(8 kg); $T = f_1 = \mu N$

$$T = 80\mu \quad \ldots\textbf{(1)}$$

$$(20\text{ kg});\ mg\sin 37^\circ = T + f_2 = T + \mu mg\cos 37^\circ$$

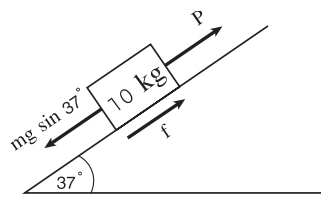
$$200 \times \frac{3}{5} = 80\mu + \mu(200) \times \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \mu = \mathbf{0.5}$$

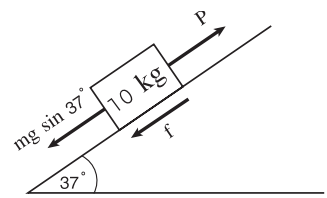
ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานมีค่า 0.5

39. วัตถุมวล 10 กิโลกรัม วางบนพื้นเอียงทำมุม 37° กับแนวระดับซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน 0.2 จงหาแรง P ที่ฉุดในแนวขนานกับพื้นเอียงให้วัตถุสมดุลอยู่ได้

วิเคราะห์โจทย์ 1. เขียน รูป แล้วใส่แรงกระทำต่อวัตถุ
2. แรง P น้อยวัตถุจะลง f มีทิศขึ้น
3. แรง P มาก วัตถุจะขึ้น f มีทิศลง



(ก) กำลังจะลง



(ข) กำลังจะขึ้น

(จะลง) จาก $\Sigma F = 0$

$$P + f = mg\sin 37^\circ$$

$$P = mg\sin 37^\circ - \mu mg\cos 37^\circ$$

$$= 100 \times \frac{3}{5} - 0.2 \times 100 \times \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \mathbf{P = 44\ N}$$

(จะขึ้น) จาก $\Sigma F = 0$

$$P = mg\sin 37^\circ + f$$

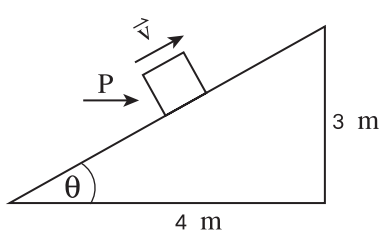
$$= mg\sin 37^\circ + \mu mg\cos 37^\circ$$

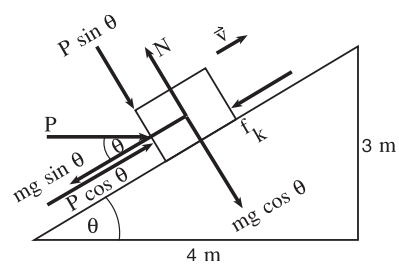
$$\therefore \quad \mathbf{P = 76\ N}$$

ดังนั้น แรง P ที่ฉุดให้วัตถุสมดุลได้มีค่า $44 \le P \le 76$ N

40. วัตถุมวล 50 กิโลกรัม ถูกกระทำด้วยแรง P ซึ่งเป็นแรงในแนวระดับ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ขึ้นไปบนพื้นเอียงซึ่งมีสัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน 0.5 ด้วยความเร็วคงที่ดังรูป จงหาขนาดของแรง P

วิเคราะห์โจทย์ แก้ปัญหาโดยการแตกแรงให้อยู่ในแนวขนานและตั้งฉากกับพื้นเอียงแล้วใช้สมการ $\Sigma F = 0$





จาก $\Sigma F = 0$

(แนวตั้งฉาก) ; $N = mg\cos\theta + P\sin\theta$ ...❶

(แนวขนาน) ; $P\cos\theta = mg\sin\theta + f_k$

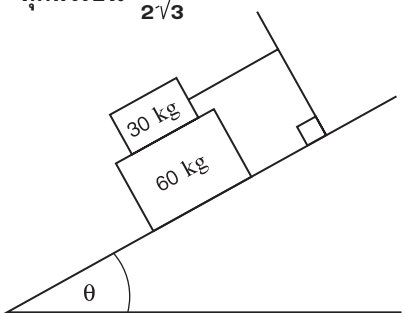
$P\cos\theta = mg\sin\theta + \mu(mg\cos\theta + P\sin\theta)$

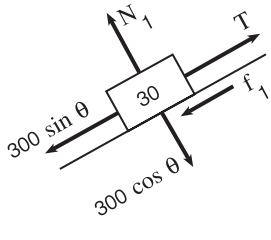
$\frac{4}{5}P = 500 \times \frac{3}{5} + 0.5(500 \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5}P)$

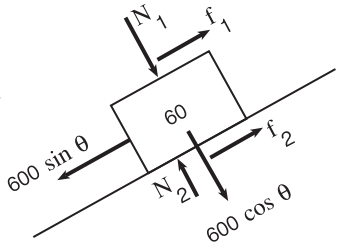
$\therefore \quad \mathbf{P = 1{,}000\ N}$

ดังนั้น แรง P มีขนาด 1,000 นิวตัน

41. จากรูปมุม θ ควรมีค่าเท่าไร วัตถุมวล 60 กิโลกรัม จึงเริ่มเคลื่อนที่ลงพอดี ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานทุกผิวเป็น $\frac{1}{2\sqrt{3}}$







วิเคราะห์โจทย์ ระบบสมดุล พิจารณาแรงในแนวขนานและตั้งฉากกับพื้นเอียง

จาก $\Sigma F = 0$

(60 kg) ; $600\sin\theta = f_1 + f_2$

$600\sin\theta = \mu N_1 + \mu N_2$

$600\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times 300\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times 900\cos\theta$

$600\sin\theta = \frac{1{,}200\cos\theta}{2\sqrt{3}}$

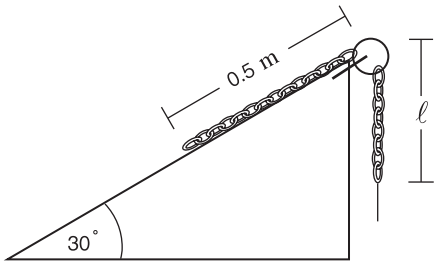
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

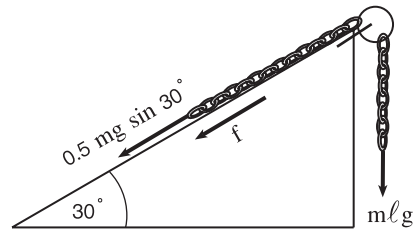
$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad \theta = \mathbf{30^\circ}$

ดังนั้น มุม θ เท่ากับ 30° องศา

42. โซ่เส้นหนึ่งขนาดสม่ำเสมอ วางคล้องผ่านรอก ซึ่งหมุนได้คล่อง โดยรอกติดอยู่บนยอดของระนาบเอียง ซึ่งเอียงทำมุม 30° กับพื้นราบ ถ้าส่วนหนึ่งของโซ่ซึ่งยาว 0.5 เมตร วางพาดบนพื้นเอียงที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ จงหาว่าส่วนที่เหลือของโซ่มากที่สุดที่ห้อยอย่างอิสระในแนวดิ่งผ่านรอกซึ่งจะทำให้โซ่เริ่มเคลื่อนที่ได้พอดี





วิเคราะห์โจทย์ โซ่เริ่มเคลื่อนที่ แสดงว่าอยู่ในสภาพสมดุล

สมมติ โซ่ส่วนที่ห้อยยาว ℓ

และ โซ่ยาว 1 m มีมวล m

ถ้า โซ่ยาว 0.5 m มีมวล 0.5 m

โซ่ยาว ℓ m มีมวล $m\ell$

จาก $\Sigma F = 0$

$$m\ell g = 0.5\ mg \sin 30^\circ + \mu(0.5\ mg)\cos 30^\circ$$

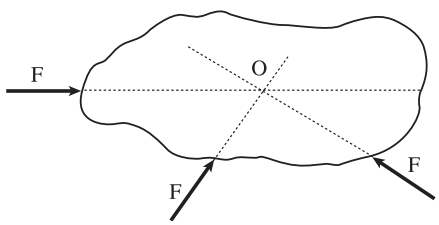
$$m\ell g = 0.5\ mg \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times 0.5\ mg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \ell = \mathbf{0.5\ m}$$

ดังนั้นโซ่ส่วนที่ห้อยในแนวดิ่งยาว 0.5 เมตร

4.3 จุดศูนย์กลางของมวล (C.M.) และจุดศูนย์ถ่วง (C.G.)

4.3.1 จุดศูนย์กลางของมวล (Center of mass) "C.M." คือ ตำแหน่งที่เสมือนเป็นที่รวมของมวลทั้งก้อน ซึ่งจุดนี้อาจจะอยู่ในหรือนอกวัตถุก็ได้ การหาจุดศูนย์กลางของมวล หาได้โดยออกแรงกระทำต่อวัตถุให้เคลื่อนที่ตามแนวแรงโดยไม่หมุน หลาย ๆ ครั้ง ดังรูป 4.9 แล้วพบว่าแนวแรงเหล่านั้น จะตัดกันที่ตำแหน่ง ๆ หนึ่ง คือ **จุดศูนย์กลางของมวล**

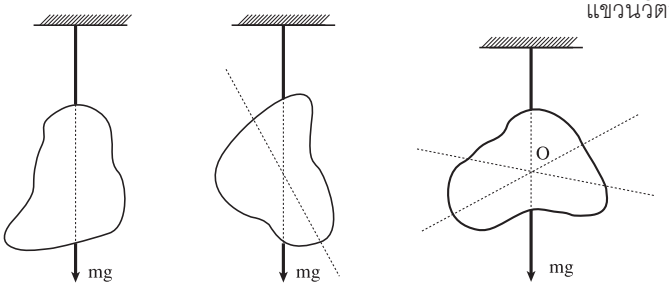


รูป 4.9 *แสดงการหาจุดศูนย์กลางของมวล*

จากรูป 4.9 จุด O เป็นจุดที่แนวแรง $\vec{F}$ กระทำผ่านแล้ววัตถุไม่หมุนแต่ละเคลื่อนที่ตามแนวแรง $\vec{F}$ ด้วยความเร่ง $\vec{a}$ ดังนั้น จุด O จึงเป็นจุดศูนย์กลางของมวล

4.3.2 จุดศูนย์ถ่วง (Center of gravity) "C.G." คือ ตำแหน่งที่เสมือนเป็นที่รวมของน้ำหนักของวัตถุทั้งก้อนซึ่งจุดนี้อาจจะอยู่ในหรือนอกวัตถุก็ได้การหาจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุโดยการแขวน วัตถุนั้นในลักษณะต่าง ๆ กันในแนวดิ่ง โดยแนวของน้ำหนักของวัตถุจะตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง ดังรูป 4.10 จุดนั้นคือ **จุดศูนย์ถ่วงของวัตถุนั้น**

จุด O เป็นจุดที่แนวของน้ำหนักหรือ mg ตัดกันไม่ว่าจะแขวนวัตถุในลักษณะใดก็ตาม



รูป 4.10 *แสดงการหาจุดศูนย์ถ่วง*

หมายเหตุ

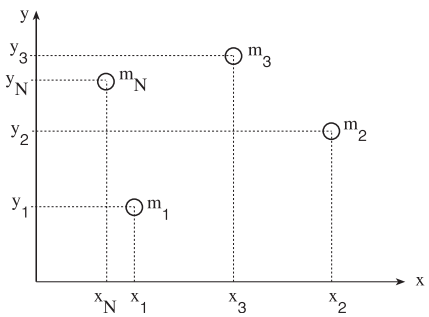
ณ บริเวณที่มีค่า g สม่ำเสมอ จุด C.M. และ C.G. จะอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน แต่ถ้าเป็นบริเวณที่มีค่า g ไม่สม่ำเสมอจุด C.G. จะเปลี่ยนไปจากเดิม แต่ จุด C.M. ยังอยู่ที่ตำแหน่งเดิมเสมอ

จุดศูนย์กลางของมวลของวัตถุรูปต่าง ๆ

1. คานตรงสม่ำเสมอ จุด C.M. อยู่ที่จุดกึ่งกลางคาน
2. รูปทรงกระบอก จุด C.M. อยู่ที่จุดกึ่งกลางของเส้นแกนกลางของทรงกระบอก
3. รูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ จุด C.M. อยู่ที่จุดกึ่งกลางของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์
4. รูปทรงกลม จุด C.M. อยู่ที่จุดกึ่งกลางของทรงกลม
5. แผ่นรูปสามเหลี่ยมสม่ำเสมอ จุด C.M. อยู่ที่จุดตัดของเส้นมัธยฐานทั้งสาม
6. แผ่นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสม่ำเสมอ จุด C.M. อยู่ที่จุดตัดของเส้นทแยงมุมทั้งสอง
7. แผ่นกลมสม่ำเสมอ จุด C.M. อยู่ที่จุดศูนย์กลางของแผ่นกลม
8. รูปกรวยเหลี่ยม จุด C.M. อยู่ในแนวเส้นแกนของกรวยเป็นระยะ $\frac{1}{4}$ ของความสูงจากฐาน
9. รูปกรวยกลมตัน จุด C.M. อยู่ในแนวเส้นแกนของกรวยเป็นระยะ $\frac{1}{4}$ ของความสูงจากฐาน
10. รูปกรวยกลมกลวง จุด C.M. อยู่ในแนวเส้นแกนของกรวยเป็นระยะ $\frac{1}{3}$ ของความสูงจากฐาน

4.3.3 การหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล

ในระบบซึ่งประกอบด้วยมวลย่อย ๆ หลาย ๆ มวล เช่น $m_1, m_2, m_3, ..., m_N$ มีจุดศูนย์กลางมวลแต่ละมวลอยู่ที่ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_N, y_N) ตามลำดับ ดังรูป 4.11



รูป 4.11 *แสดงตำแหน่งระบบพิกัดฉากของมวลย่อย $m_1, m_2, m_3, ..., m_N$*

จากรูป ในการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง (x_{CM}, y_{CM}) สามารถหาได้จากสมการ ดังนี้

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ... + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_N}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + ... + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_N}$$

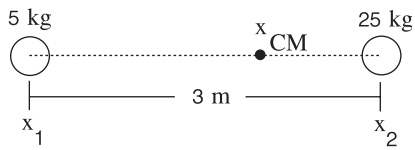
เมื่อ x_{CM} เป็นตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลตามแกน x

y_{CM} เป็นตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลตามแกน y

43. มวล 5 กิโลกรัม และ 25 กิโลกรัม อยู่ห่างกัน 3 เมตร จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบมวลทั้งสองอยู่ที่ใด

วิเคราะห์โจทย์ 1. วาดรูป แสดงตำแหน่งของมวลทั้งสอง

2. เมื่อรู้ $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 25$ kg, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ m ต้องการหา x_{CM}



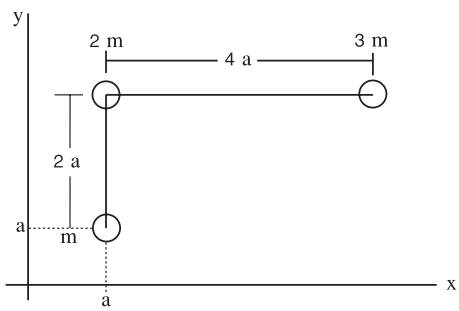
จาก $x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$

$= \frac{5(0) + 25(3)}{5 + 25}$

$\therefore$ $\mathbf{x_{CM} = 2.5\ m}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ห่างจากมวล 5 กิโลกรัมเป็นระยะ 2.5 เมตร

44. จากรูป จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบซึ่งประกอบด้วยมวล m, 2m และ 3m



วิเคราะห์โจทย์ เมื่อรู้ $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, $x_1 = a$, $y_1 = a$, $x_2 = a$, $y_2 = 3a$, $x_3 = 5a$, $y_3 = 3a$ ต้องการหา x_{CM}, y_{CM}

จาก $x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$= \frac{m(a) + 2m(a) + 3m(5a)}{m + 2m + 3m}$

$\therefore$ $\mathbf{x_{CM} = 3a}$

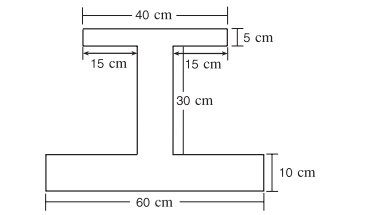
และ $y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$= \frac{m(a) + 2m(3a) + 3m(3a)}{m + 2m + 3m}$

$\therefore$ $\mathbf{y_{CM} = 2.67a}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ที่ตำแหน่ง (3a, 2.67a)

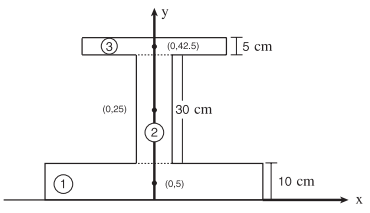
45. แผ่นโลหะสม่ำเสมอดังรูป จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของโลหะแผ่นนี้



วิเคราะห์โจทย์ 1. แบ่งพื้นที่ แผ่นเหล็กออกเป็นส่วนย่อย ๆ แล้วกำหนดจุด C.M. ของ แต่ละส่วนก่อน

2. กำหนดขนาดมวล (m) α ขนาดพื้นที่ (A)

3. เมื่อรู้ A_1, A_2, A_3, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = 5$, $y_2 = 25$, $y_3 = 42.5$



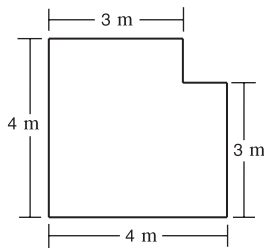
จาก $$y_{CM} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

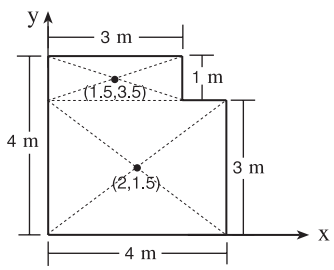
$$= \frac{(10 \times 60)5 + (10 \times 30)25 + (5 \times 40)42.5}{(10 \times 60) + (10 \times 30) + (5 \times 40)}$$

$\therefore$ $\mathbf{y_{CM} = 17.27\ cm}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางมวลของโลหะแผ่นนี้ อยู่สูงจากจุดกึ่งกลางขอบล่าง 17.27 เซนติเมตร

46. จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นโลหะสม่ำเสมอ





วิเคราะห์โจทย์ คล้ายข้อ 45 เมื่อรู้ $A_1 = 3 \times 4\ m^2$, $A_2 = 1 \times 3\ m^2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1.5$, $y_1 = 1.5$, $y_2 = 3.5$ ต้องการหา x_{CM}, y_{CM}

จาก $$x_{CM} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{(3 \times 4)2 + (1 \times 3)1.5}{(3 \times 4) + (1 \times 3)}$$

$\therefore$ $\mathbf{x_{CM} = 1.9\ m}$

และ $$y_{CM} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A_1 + A_2}$$

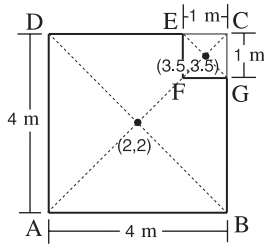
$$= \frac{(3 \times 4)1.5 + (1 \times 3)3.5}{(3 \times 4) + (1 \times 3)}$$

$\therefore$ $\mathbf{y_{CM} = 1.9\ m}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางมวลของแผ่นโลหะนี้อยู่ที่ตำแหน่ง (1.9, 1.9)

ข้อ 46 วิธีที่ 2

วิเคราะห์โจทย์ จุดศูนย์กลางมวล จากรูปที่กำหนดให้อาจเท่ากับ จุดศูนย์กลางมวลรูป ABCD – รูป CEFG



จาก $x_{CM} = \dfrac{(Ax)_{ABCD} - (Ax)_{CEFG}}{A_{ABCD} - A_{CEFG}}$

$= \dfrac{(4 \times 4)2 - (1 \times 1)3.5}{(4 \times 4) - (1 \times 1)}$

$\therefore$ $\mathbf{x_{CM} = 1.9\ m}$

และ $y_{CM} = \dfrac{(Ay)_{ABCD} - (Ay)_{CEFG}}{A_{ABCD} - A_{CEFG}}$

$= \dfrac{(4 \times 4)2 - (1 \times 1)3.5}{(4 \times 4) - (1 \times 1)}$

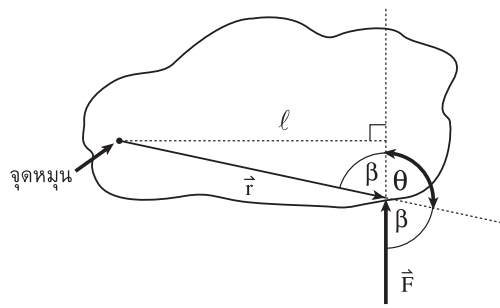
$\therefore$ $\mathbf{y_{CM} = 1.9\ m}$

ดังนั้น ทั้งสองวิธีสามารถหา x_{CM} และ y_{CM} ได้เหมือนกัน

4.4 โมเมนต์ของแรงหรือทอร์ก

เมื่อออกแรงกระทำต่อวัตถุในแนวผ่านจุดศูนย์กลางของมวลของวัตถุ พบว่า วัตถุจะเกิดการเคลื่อนที่ตามแนวแรงที่กระทำด้วยความเร่ง แต่ถ้าแนวแรงที่กระทำไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของมวลของวัตถุ พบว่าวัตถุจะเกิดการหมุนรอบจุดศูนย์กลางของมวลเรียกจุดศูนย์กลางของมวลว่า **จุดหมุน**ผลของการหมุนเนื่องจากแรงรอบจุดหมุนเรียกว่า**โมเมนต์ของแรง (moment of force) หรือ ทอร์ก (torque)**

ถ้ามีแรง ($\vec{F}$) กระทำกับวัตถุที่ตำแหน่งปลายของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง ($\vec{r}$) จากจุดหมุนดังรูป 4.12



รูป 4.12 *แรง $\vec{F}$ กระทำกับวัตถุมีแนวแรงห่างจากจุดหมุนเป็นระยะ ℓ*

จาก $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

ได้ว่า $\tau = rF\sin\theta$ หรือ $Fr\sin\beta$ ($\theta = 180^\circ - \beta$)

หรือ $M = Fr\sin\beta = F.\ell.$

ได้ว่า $\mathbf{M = F \times \ell}$

เมื่อ M คือโมเมนต์ของแรง

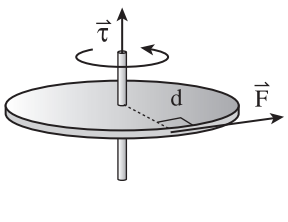
F คือแรงที่กระทำต่อวัตถุ

ℓ คือระยะทางจากจุดหมุนไปตั้งฉากกับแนวแรง

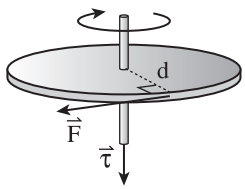
ดังนั้น **ขนาดของทอร์ก หรือ โมเมนต์ของแรง มีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างขนาดของแรงกับระยะทางจุดหมุนไปตั้งฉากกับแนวแรง**

หน่วยของโมเมนต์ของแรงคือ **นิวตัน .เมตร(N.m.)**

จากรูป 4.12 ทิศทางของ $\vec{\tau}$ มีทิศพุ่งตั้งฉากกับระนาบของการหนุนในที่นี้พุ่งออกจากกระดาษ โดยวัตถุจะหมุนในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา เนื่องจากทอร์กเป็นปริมาณเวกเตอร์มีทั้งขนาดและทิศทางเมื่อพิจาณณาวัตถุที่หมุนรอบแกนตรึง เนื่องจากถูกแรง F กระทำ ทิศทางของทอร์กหาได้จากกฎมือขวา ดังรูป 4.13



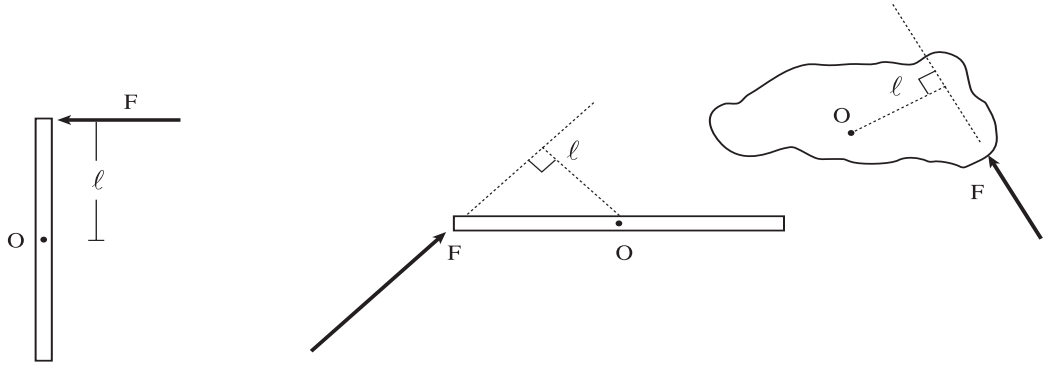
ก. ทอร์กมีทิศพุ่งออกตั้งฉากกับระนาบการหมุน เมื่อวัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิกา



ข. ทอร์กมีทิศพุ่งเข้าตั้งฉากกับระนาบการหมุน เมื่อวัตถุหมุนตามเข็มนาฬิกา

รูป 4.13 *การหมุนของวัตถุเทียบกับการหมุนของเข็มนาฬิกา*

จากรูป 4.13 จะได้ว่าทิศทางทางของ $\vec{\tau}$ ตั้งฉากกับระนาบการหมุน เพื่อให้สะดวกและง่ายขึ้นจะคิดเฉพาะขนาดของทอร์กหรือโมเมนต์ของแรงกับทิศทางตามหมุนของวัตถุซึ่งอยู่ในทิศตามเข็มนาฬิกา หรือทวนเข็มนาฬิกาเท่านั้น เช่นวัตถุถูกแรงกระทำดังรูป 4.14 จะมีทิศทางการหมุน ดังนี้



(ก) (ข) (ค)

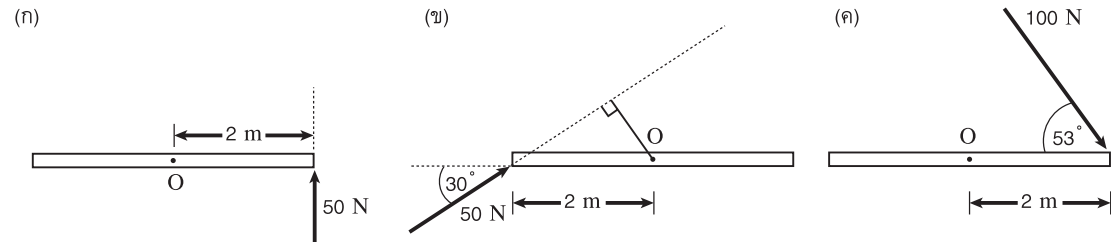
รูป 4.14 *แรง F กระทำกับวัตถุมีแนวแรงห่างจากจุดหมุน ℓ*

จากรูป 4.14 (ก) วัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิกา

4.14 (ข) วัตถุหมุนตามเข็มนาฬิกา

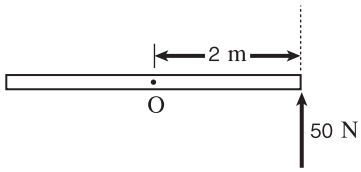
4.14 (ค) วัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิกา

47. จากรูป จงหาโมเมนต์ของแรงที่กระทำต่อวัตถุ เมื่อ O เป็นจุดหมุนของวัตถุนั้น



วิเคราะห์โจทย์ ต้องการหา M ต้องรู้ F และ ℓ (ระยะทางจากจุดหมุนตั้งฉากกับแนวแรง)

(ก)



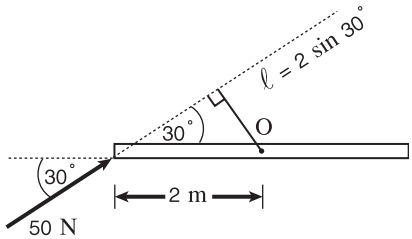
จาก $M = F \times \ell$

$= 50 \times 2$

$\therefore M = 100$ **N.m** (ทวนเข็มนาฬิกา)

ดังนั้น โมเมนต์ของแรงเท่ากับ 100 นิวตันเมตรหมุนทวนเข็มนาฬิกา

(ข)

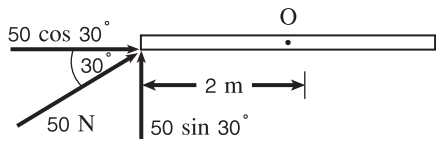


จาก $M = F \times \ell$

$= 50 \times 2 \sin 30^\circ$

$\therefore M = 50$ **N.m** (ตามเข็มนาฬิกา)

ข้อ (ข) อาจหาค่าโมเมนต์ได้อีกวิธีหนึ่งคือการแยกแรงให้ผ่านจุดหมุนและตั้งฉากกับแนวผ่านจุดหมุนดังรูป



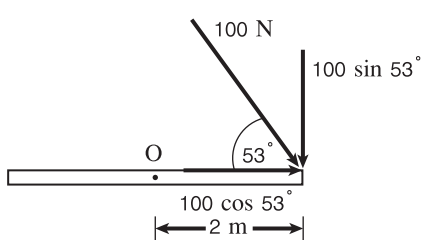
จาก $M = F \times \ell$

$= 50 \sin 30^\circ \times 2$

$\therefore M = 50$ **N.m** (ตามเข็มนาฬิกา)

ดังนั้น โมเมนต์ของแรงเท่ากับ 50 นิวตัน เมตรหมุนตามเข็มนาฬิกา

(ค)



จาก $M = F \times \ell$

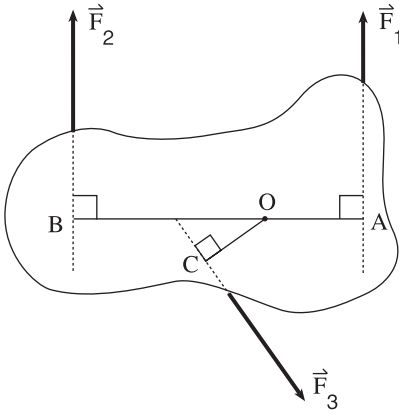
$= 100 \sin 53^\circ \times 2$

$= 100 \times \frac{4}{5} \times 2$

$\therefore M = 160$ **N.m** (ตามเข็มนาฬิกา)

ดังนั้น โมเมนต์ของแรงเท่ากับ 160 นิวตัน เมตรหมุนตามเข็มนาฬิกา

การหาโมเมนต์ลัพธ์ของแรงหลายแรง



จากรูป 4.15 วัตถุคงรูปมีแรง $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ และ $\vec{F}_3$ กระทำโดยมีจุด O เป็นจุดหมุนและมีระยะตั้งฉากจากจุดหมุน O ไปยังแนวแรง $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ และ $\vec{F}_3$ เป็นระยะ OA, OB และ OC ตามลำดับ เมื่อพิจารณาผลการหมุนของแรง $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ และ $\vec{F}_3$ พบว่าสามารถแยกได้ 2 พวก คือ แรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_3$ เป็นแรงที่พยายามจะหมุนวัตถุให้หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาส่วนแรง $\vec{F}_2$ เป็นแรงที่พยายามจะหมุนวัตถุ ให้หมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาซึ่งเราสามารถหาโมเมนต์ของแต่ละแรงได้ดังนี้

รูป 4.15 *แสดงแรงกระทำต่อวัตถุหลายแรงรอบจุดหมุน O*

โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา $(M_2) = F_2 \times (OB)$

โมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกา $(M_1) = F_1 \times (OA)$

$(M_3) = F_3 \times (OC)$

โมเมนต์ลัพธ์ $(\Sigma M) = M_1 + M_2 + M_3$

$\Sigma M = -F_1(OA) + F_2(OB) - F_3(OC)$

หมายเหตุ

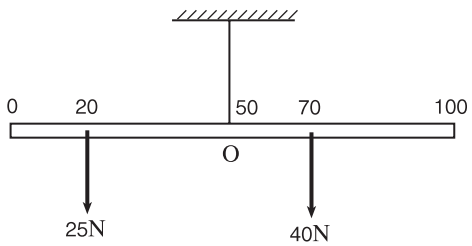
เครื่องหมายบวก (+) และลบ (−) แสดงทิศทางของการหมุนโดย

(+) แทนทิศทางการหมุนตามเข็มนาฬิกา

(−) แทนทิศทางการหมุนทวนเข็มนาฬิกา

48. **ไม้เมตรมวลน้อยมากแขวนด้วยเชือกไว้ที่สเกล 50 ซม. ปรากฏว่าไม้เมตรวางตัวอยู่ในแนวราบ มีแรง 25 นิวตัน กระทำที่สเกล 20 ซม. และมีแรง 40 นิวตัน กระทำที่สเกล 70 ซม. โดยแรงทั้งสอง มีทิศทางลงในแนวดิ่ง จงหาโมเมนต์ของแรงที่กระทำต่อไม้เมตร**

วิเคราะห์โจทย์ วาดรูป แล้วใส่แรงกระทำต่อไม้เมตร



ในที่นี้จุดหมุนคือจุดที่แขวนไม้เมตร

จาก $M = F \times \ell$

ได้ว่า $M_{ตาม} = 40 \times 0.2$

$= 8$ N.m

และ $M_{ทวน} = 25 \times 0.3$

$= 7.5$ N.m

ดังนั้น $\Sigma M = 8 + (-7.5)$

$\therefore \Sigma M =$ **0.5 N.m (ตาม)**

ดังนั้น โมเมนต์ของแรงที่กระทำต่อไม้เมตรเท่ากับ 0.5 นิวตัน–เมตร ในทิศตามเข็มนาฬิกา

49. **คานตรงสม่ำเสมอ AB ยาว 4 เมตร มีแรง 50 นิวตัน กระทำที่ปลาย B ในแนวทำมุม 37° และมีแรง 20 นิวตัน กระทำที่จุด C ห่างจาก A เป็นระยะ 2 เมตร ดังรูป จงหาผลหมุนของแรงทั้งสองรอบจุด A**