

ความน่าจะเป็น EP.1

(Probability)

ครูตา

สารบัญ

	หน้า
1. ความน่าจะเป็นเบื้องต้น	1
2. เซตของผลการทดลอง	4
3. การนับจำนวน $n(S)$, $n(E)$	5
4. การจัดลำดับ การจัดหมู่	7
5. ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น	11
6. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent Probability)	14
7. ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)	15
8. ความน่าจะเป็นแบบรวม และ กฎของเบย์ส์	17

ความน่าจะเป็น(Probability)

โอกาส (Chance) หรือความน่าจะเป็น(Probability) ของการที่จะเกิดเหตุการณ์ใด เหตุการณ์หนึ่งว่ามีค่าเท่าใด เป็นวิธีการวัดความไม่แน่นอนในรูปแบบคณิตศาสตร์ที่มีประโยชน์มาก โดยที่มาของความน่าจะเป็นเริ่มมาจากการเล่นเกมการพนัน โดยชาวฝรั่งเศสชื่อ เชอวาลิเยร์ เดอ เมเร (Chevalier de Mire) ซึ่งเขาชอบเล่นพนันมาก แต่มีปัญหาในการแบ่งเงินพนันกันระหว่างนักพนัน จึงขอคำแนะนำจากนักคณิตศาสตร์ในฝรั่งเศสยุคนั้น คือ ปาสคาล (Pascal) และแฟร์มาต์ (Fermat) ซึ่งเป็นผู้ทำให้เกิดที่มาของทฤษฎีความน่าจะเป็น จนเป็นศาสตร์ที่สำคัญสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเหตุการณ์ในชีวิตประจำวัน เพื่อทำนายโอกาสของการเกิดเหตุการณ์ต่างๆ ในปัจจุบัน

เรื่องนี้ มีคำว่า “การทดลองสุ่ม (Random Experiment)” ซึ่งแตกต่างจากการทดลอง (Experiment) ทางวิทยาศาสตร์ที่รู้ผลการทดลองแน่นอน แต่การทดลองสุ่ม รู้ว่าในการทดลองนั้นอาจจะเกิดเหตุการณ์อะไรบ้าง แต่ไม่รู้ผลแน่นอนว่าจะอะไรจะเกิดขึ้น เช่นการโยนเหรียญที่เที่ยงอันหนึ่ง เป็นการทดลองสุ่ม เพราะรู้ว่าจะเกิด หัว หรือไม่ก็ต้องเกิด ก้อย แต่ไม่รู้แน่ว่าการโยนครั้งนี้เกิดหัวหรือก้อย แสดงให้เห็นถึง “ความไม่แน่นอน (Uncertainty)” ของการเกิดข้อมูลที่เป็นผลของการทดลองสุ่ม

ดังนั้น ความน่าจะเป็น จึงเป็นค่าที่แสดงให้ทราบว่าเหตุการณ์หนึ่งๆ มีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด กำหนดให้มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 เช่น

- (1) ถ้านำลูกเต๋า ทอยลงบนพื้น โอกาสที่จะปรากฏหน้า แต่ละหน้า มีค่าเท่ากับ $1/6$ หรือ 0.167 หรือ 16.7 เปอร์เซ็นต์
- (2) ถ้าโยนเหรียญที่เที่ยงตรงหนึ่งเหรียญ และให้ตกบนพื้น (โยนแบบยุติธรรม) โอกาสที่จะปรากฏหัว มีค่าเท่ากับ $1/2$ หรือ 0.5 หรือ 50 เปอร์เซ็นต์
- (3) ความน่าจะเป็นของฝนจะตกในวันพรุ่งนี้ มีค่าเท่ากับ 0.7 หรือ 70 เปอร์เซ็นต์

1. ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

นิยาม 1.1 การทดลองสุ่ม(Random Experiment) หมายถึง กระบวนการใดๆที่รู้ว่าอาจจะเกิดเหตุการณ์อะไรบ้าง แต่ไม่รู้ผลลัพธ์แน่นอนว่าจะอะไรจะเกิดขึ้น ตัวอย่างของการทดลองสุ่ม เช่น

- (1) การโยนเหรียญ เป็นการทดลองสุ่ม เพราะรู้ว่าจะเกิด หัว หรือไม่ก็ต้องเกิด ก้อย แต่ไม่รู้แน่ว่าการโยนครั้งนี้เกิดหัวหรือก้อย

(2) การทอดลูกเต๋า เป็นการทดลองสุ่ม เพราะรู้ว่าจะเกิด หน้าเลข 1 ถึงหน้าเลข 6 แต่ไม่สามารถทำนายล่วงหน้าได้ว่าจะได้หน้าอะไร

(3) การหยิบลูกบอลจากกล่องที่มีลูกบอลสีต่างๆ เป็นการทดลองสุ่มเพราะไม่สามารถทำนายได้ว่าจะได้ลูกบอลสีอะไร

(4) การซื้อลอตเตอรี่ เป็นการทดลองสุ่มเพราะไม่สามารถทำนายได้ว่าจะถูกรางวัลหรือไม่

นิยาม 1.2 แซมเปิลสเปซ (Sample Space) คือเซตของผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่ม และเป็นสิ่งที่เราสนใจ ใช้สัญลักษณ์แทนแซมเปิลสเปซคือ S และสัญลักษณ์ของจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ คือ $n(S)$ ตัวอย่างเช่น

(1) ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก สนใจเลขบนหน้า ของลูกเต๋า

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad , \quad n(S) = 6$$

(2) ถ้าในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก สนใจการเกิดหน้าเลขคู่หรือเลขคี่

$$S = \{ \text{คู่} , \text{คี่} \} \quad , \quad n(S) = 2$$

(3) ในการซื้อลอตเตอรี่

$$S = \{ \text{ถูกรางวัล} , \text{ไม่ถูกรางวัล} \} \quad , \quad n(S) = 2$$

*****เหตุการณ์ซับซ้อน จำนวนของแซมเปิลสเปซมีวิธีนับโดยกฎเกณฑ์การนับ*****

นิยาม 1.3 เหตุการณ์(Event) คือ เซตย่อยของแซมเปิลสเปซ นิยมใช้สัญลักษณ์ E และจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E คือ $n(E)$ ตัวอย่างเช่น

ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก สนใจเลขบนหน้า ของลูกเต๋า

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมหารด้วย 3 ลงตัว

$$\text{จะได้ } E_1 = \{ 3, 6, 9, 12 \} \quad , \quad n(E_1) = 4$$

ถ้า E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมหารด้วย 5 ลงตัว

$$\text{จะได้ } E_2 = \{ 5, 10 \} \quad , \quad n(E_2) = 2$$

นิยาม 1.4 ความน่าจะเป็น(Probability) หมายถึงตัวเลขแสดงค่าของโอกาสในการเกิดเหตุการณ์ ความน่าจะเป็น เขียน $P(E)$

โดย

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เมื่อ $n(E)$ คือ จำนวนของเหตุการณ์ E
 $n(S)$ คือ จำนวนของแซมเปิลสเปซ

ค่าความน่าจะเป็นมีคุณสมบัติดังนี้

- (1) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ มีค่าอยู่ระหว่างตั้งแต่ 0 ถึง 1
- (2) ผลบวกของความน่าจะเป็นทุกค่าของเหตุการณ์ใน แซมเปิลสเปซ เท่ากับ 1 เสมอ
- (3) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดจะมีความหมายเมื่อเหตุการณ์นั้นยังไม่แล้วเสร็จ ตัวอย่าง เช่น ในการโยนเหรียญที่เที่ยง 2 เหรียญ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \quad , \quad n(S) = 4$$

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวทั้ง 2 เหรียญ

$$\text{จะได้ } E = \{HH\} \quad , \quad n(E) = 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

นิยาม 1.5 เหตุการณ์ใส่คืน (Sampling With Replacement) หมายถึงการใส่สิ่งของที่เลือกแล้วกลับคืนก่อนที่จะหยิบสิ่งของใหม่อีกครั้ง การกระทำเหตุการณ์นี้จะได้ความน่าจะเป็นในการหยิบของแต่ละครั้งเท่ากันเสมอ ตัวอย่างเช่น

ถ้าในกล่องมีลูกบอล 4 ลูก เป็นสีขาว 2 ลูก สีดำ 1 ลูก สีแดง 1 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลออกมา 2 ลูก โดยหยิบทีละลูก แล้วใส่ลูกแรกคืนลงในกล่องก่อนหยิบลูกที่สอง จะได้ว่า

$$P(\text{สีขาวครั้งแรก}) = \frac{2}{4} \quad , \quad P(\text{สีขาวครั้งที่สอง}) = \frac{2}{4}$$

$$\text{หรือ} \quad P(\text{สีดำครั้งแรก}) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(\text{สีดำครั้งที่สอง}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{หรือ} \quad P(\text{สีแดงครั้งแรก}) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(\text{สีแดงครั้งที่สอง}) = \frac{1}{4}$$

นิยาม 1.6 เหตุการณ์ไม่ใส่คืน (Sampling Without Replacement) หมายถึงการหยิบสิ่งของที่เลือกแล้วออกไปโดยไม่ใส่กลับคืนก่อนที่จะหยิบสิ่งของใหม่อีกครั้ง การกระทำนี้จะได้ความน่าจะเป็นในการหยิบของแต่ละครั้งไม่เท่ากัน ตัวอย่างเช่น

ถ้าในกล่องมีลูกบอล 4 ลูก เป็นสีขาว 2 ลูก สีดำ 1 ลูก สีแดง 1 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลออกมา 2 ลูก โดยหยิบทีละลูก แล้วไม่ใส่ลูกแรกกลับคืนลงในกล่อง จะได้ว่า

$$P(\text{สีขาวครั้งแรก}) = \frac{2}{4} \quad , \quad P(\text{สีขาวครั้งที่สอง}) = \frac{1}{3}$$

$$\text{หรือ} \quad P(\text{สีดำครั้งแรก}) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(\text{สีดำครั้งที่สอง}) = 0$$