

คณิตศาสตร์

← สำหรับ

นักเศรษฐศาสตร์

ผศ.ดร. อนุสรณ์ สรพพรหม

เหมาะสำหรับนักศึกษา **ระดับปริญญาตรี คณะเศรษฐศาสตร์**
และผู้ที่เตรียมสอบ **ระดับปริญญาโท เศรษฐศาสตร์ทุกท่าน**

คณิตศาสตร์

สำหรับ

นักเศรษฐศาสตร์

โดย.. ผศ.ดร. อнуสรณ์ สรพพรหม



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
พญานาคโรดไฮเทค ๕๐๐ ปี (รังสิต)
SKYBOOK COMPANY LIMITED

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 958-1125-7, 567-5119 โทรสาร. 567-5105

“ คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ ”

พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤศจิกายน 2543

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย

ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์

หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต

จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

อนุสรณ์ สพรหม

คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ -- กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์, 2543.

252 หน้า

1. คณิตเศรษฐศาสตร์ I. ชื่อเรื่อง

512 . 2433

ISBN: 974-389-038-6

S7901-30-11-00

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



สกายบุ๊กส์

หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ต.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 958-1125-7, 567-5119 โทรสาร. 567-5105

“เรามุ่งหวังให้เด็กเด็กเรียนรู้หลังรักการอ่าน”

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด

459 ซอยพญาสุพรรณภูมิ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทรศัพท์: 6943010

คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ เล่มนี้ มีวัตถุประสงค์หลักเพื่อให้ความรู้
ชั้นกลางทางคณิตศาสตร์แก่นักศึกษาในระดับปริญญาตรีสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ และผู้ที่กำลังเตรียม
ตัวสอบเข้าศึกษาต่อระดับปริญญาโท สาขาวิชาเดียวกัน โดยเขียนขึ้นเป็นการต่อยอดจากหนังสือเรื่อง
“คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานสำหรับเศรษฐศาสตร์” ซึ่งเป็นตำราอีกเล่มหนึ่งในหลาย ๆ เล่มของข้าพเจ้า

องค์ประกอบของหนังสือแบ่งออกเป็น 7 บท ได้แก่ บทบททวน ฟังก์ชันที่กำลังและฟังก์ชัน
ลอการิทึม การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน การหาปริพันธ์ของ
ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และเมทริกซ์ ตามลำดับ โดยรูปแบบที่นำเสนอในแต่ละบทจะเป็นการ
ทบทวนความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ แล้วเพิ่มเติมความรู้ใหม่ พร้อมทั้งตัวอย่างการนำความรู้ไป
ประยุกต์ใช้กับทฤษฎีเศรษฐศาสตร์ทั้งจุลภาคและมหภาค ซึ่งคำศัพท์ที่ใช้นั้นนำมาจากศัพท์คณิต-
ศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2538 และบางคำพัฒนาขึ้นเองจากศัพท์บัญญัติของราชบัณฑิตย-
สถาน พ.ศ. 2530

หนังสือเล่มนี้จัดพิมพ์โดยบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด ซึ่งเป็นสำนักพิมพ์ที่มีคุณภาพและให้
ความช่วยเหลือแก่ข้าพเจ้าอย่างดียิ่ง จึงขอขอบคุณทุกฝ่ายที่เกี่ยวข้องมา ณ โอกาสนี้ และที่จะขาดไม่
ได้ก็คือ คุณพัชรารัตน์ สรพรหม ภรรยาที่มีความอดทนในการพิมพ์ต้นฉบับ และเด็กชายสรณ์พัชร
สรพรหม ลูกชายที่เข้าใจว่าทำไมช่วงที่ผ่านมา พ่อจึงไม่ค่อยมีเวลาเล่นกับลูก

อนุสรณ์ สรพรหม

30 กันยายน 2543



บทที่ 1 บทบทบทบท	1
1.1 ฟังก์ชัน	1
1.2 ลิมิตของฟังก์ชัน	11
1.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	15
1.4 ปริพันธ์ของฟังก์ชัน	21
1.5 ระบบสมการเชิงเส้น	25
แบบฝึกหัดท้ายบท	31
บทที่ 2 ฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม	36
2.1 ฟังก์ชันชี้กำลัง	36
2.2 ฟังก์ชันลอการิทึม	43
2.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม	50
2.4 ตัวอย่างของฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึมในทางเศรษฐศาสตร์	56
แบบฝึกหัดท้ายบท	68
บทที่ 3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	71
3.1 ค่าเชิงอนุพันธ์	71
3.2 อนุพันธ์ย่อย	75
3.3 ค่าเชิงอนุพันธ์รวม	79
3.4 อนุพันธ์รวม	82
3.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	86
3.6 ตัวอย่างค่าเชิงอนุพันธ์รวมและอนุพันธ์รวมในทางเศรษฐศาสตร์	88
แบบฝึกหัดท้ายบท	100
บทที่ 4 การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน	104
4.1 อนุพันธ์และกราฟของฟังก์ชัน	105
4.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	110
4.3 การเว้าของเส้นโค้ง	118
4.4 การทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่สอง	122
4.5 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์	125
4.6 ตัวอย่างการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดของปัญหาทางเศรษฐศาสตร์	127
แบบฝึกหัดท้ายบท	134

บทที่ 5 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน	137
5.1 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำลัง	137
5.2 เทคนิคการหาปริพันธ์	139
5.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	149
5.4 ตัวอย่างการหาปริพันธ์ในทางเศรษฐศาสตร์	156
แบบฝึกหัดท้ายบท	164
บทที่ 6 ลำดับและอนุกรม	167
6.1 ลำดับ	167
6.2 อนุกรม	184
6.3 ตัวอย่างของอนุกรมในทางเศรษฐศาสตร์	199
แบบฝึกหัดท้ายบท	204
บทที่ 7 เมทริกซ์	208
7.1 ความหมายและสัญกรณ์ของเมทริกซ์	209
7.2 เมทริกซ์ชนิดพิเศษ	210
7.3 การดำเนินการกับเมทริกซ์	214
7.4 การสลับเปลี่ยนและการผกผันเมทริกซ์	224
7.5 ตัวอย่างของเมทริกซ์ที่นำมาใช้ทางเศรษฐศาสตร์	235
แบบฝึกหัดท้ายบท	242
บรรณานุกรม	245

เนื้อหาในบทนี้จะเกี่ยวข้องกับความรู้เบื้องต้นที่จำเป็นสำหรับการใช้ในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นกลาง สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ โดยเป็นการนำเสนอฟังก์ชันชนิดต่างๆ ลิมิต อนุพันธ์ และปริพันธ์ของฟังก์ชัน รวมทั้งระบบสมการเชิงเส้นอย่างย่อๆ ทั้งนี้ผู้ที่ประสงค์จะทบทวนในรายละเอียดสามารถหาได้จากตำรา "คณิตศาสตร์ชั้นพื้นฐานสำหรับเศรษฐศาสตร์" (ดังรายละเอียดในบรรณานุกรมของหนังสือเล่มนี้) หรือจากตำราคณิตศาสตร์ทั่วไป แต่สิ่งสำคัญก็คือ ต้องมีความรู้ในเรื่องเหล่านี้เป็นอย่างดีพอ จึงจะทำให้เข้าใจเนื้อหา ในบทต่อไปได้ง่ายขึ้น

1.1 ฟังก์ชัน

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัวในรูปของฟังก์ชัน เรามักเขียนอยู่ในรูป

$$y = f(x)$$

อ่านว่า "y เป็น ฟังก์ชันของ x" ซึ่งหมายถึง ค่าของตัวแปรตาม y ขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรต้น x โดยมีข้อจำกัดว่า ค่าของ x แต่ละตัวจะกำหนดค่าของ y เพียงค่าเดียวเท่านั้น (Tomasik, 1999 : 6) ตัวอย่างเช่น เราทราบว่าต้นทุนในการผลิตรองเท้าของบริษัทแห่งหนึ่งจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับจำนวนรองเท้าที่ผลิตได้ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ y เป็นต้นทุนการผลิตรองเท้าในเวลานึงเดือน (หน่วยเป็นบาท) และ x เป็นจำนวนรองเท้าที่ผลิตได้ในแต่ละเดือน (หน่วยเป็นคู่) เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ในรูปของฟังก์ชันได้ว่า $y = f(x)$ โดย f จะเป็นฟังก์ชันต้นทุนที่เกิดขึ้นจริง เช่น

$$y = f(x) = 50x + 4,000$$

ซึ่งตามตัวอย่างนี้ ฟังก์ชันต้นทุนแสดงให้เห็นว่าต้นทุนการผลิตจะมีค่าเท่ากับ 50 คูณจำนวนรองเท้า ที่ผลิตได้บวกด้วย 4,000 และถ้าเราทราบค่าของ x (ตัวแปรต้น) แล้วนำไปแทนค่าใน f ก็จะได้ค่าที่สมนัยของ y (ตัวแปรตาม) ซึ่งในกรณีของฟังก์ชัน ค่า x แต่ละตัวจะให้ค่า y เพียงค่าเดียวเท่านั้น

เช่น การคำนวณต้นทุนในการผลิตรองเท้าจำนวน 90 คู่ สามารถทำได้โดยแทนค่า $x=90$ ลงในฟังก์ชัน คำตอบที่ได้คือ ต้นทุนในการผลิตรองเท้า 90 คู่เท่ากับ $y=50(90)+4,000=8,500$ บาท เป็นต้น

การเขียน $f(x)$ เพื่อแสดงถึงค่าตัวแปร y ในเรนจ์ของ f นั้น ช่วยให้เราสามารถ ระบุค่าเฉพาะในเรนจ์ที่สมนัยกับค่าเฉพาะค่าใดค่าหนึ่งในโดเมน เช่น $f(100)$ หรือ $f(75)$ หมายถึง ค่าเฉพาะ ในเรนจ์ เมื่อ $x=100$ หรือ $x=75$ ตามลำดับ และการหาค่า $f(100)$ หรือ $f(75)$ ก็ทำได้โดยแทน ค่า x เหล่านั้นลงในฟังก์ชัน ดังการแทนค่าที่แสดงไว้ในตัวอย่างที่ 1.1 และ 1.2

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $y=f(x)=x^2+x-4$ จงหาค่าของ

(ก) $f(0)$ (ข) $f(-2)$ (ค) $f(0.1)$ (ง) $f(a+b)$

(วิธีทำ) (ก) $f(0)=(0)^2+0-4=-4$

(ข) $f(-2)=(-2)^2+(-2)-4=-2$

(ค) $f(0.1)=(0.1)^2+(0.1)-4=-3.89$

(ง) $f(a+b)=(a+b)^2+(a+b)-4$

$$=a^2+2ab+b^2+a+b-4$$

$$=a^2+a+2ab+b+b^2-4$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 1.2 สมมติให้รายรับของร้านค้าแห่งหนึ่ง ขึ้นอยู่กับจำนวนสินค้าที่ขายได้ และอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $R=R(Q)=3Q^2+2Q$ โดย R และ Q แทนรายรับ (หน่วยเป็นพันบาท) และจำนวนสินค้าที่ขายได้ (หน่วยเป็นชิ้น) ตามลำดับ จงหาว่ารายรับของร้านค้าแห่งนี้จะเป็นเท่าไร ถ้าขายสินค้าได้ (ก) 5 ชิ้น (ข) 20 ชิ้น

(วิธีทำ) (ก) จากโจทย์ เราต้องการหาค่า $R(5)$ ซึ่งทำได้โดยแทนค่า $Q=5$ ในสมการ

$$\text{จะได้ } R(5)=3(5)^2+2(5)$$

$$=3(25)+10$$

$$=75+10$$

$$= 85$$

เพราะฉะนั้น รายรับจากการขายสินค้าได้ 5 ชิ้น เท่ากับ 85,000 บาท

(ข) จากโจทย์ เราต้องการหาค่า $R(20)$ ซึ่งทำได้โดยแทนค่า $Q = 20$ ในสมการ

$$\text{จะได้ } R(20) = 3(20)^2 + 2(20)$$

$$= 3(400) + 40$$

$$= 1,240$$

เพราะฉะนั้น รายรับจากการขายสินค้าได้ 20 ชิ้น เท่ากับ 1,240,000 บาท

Ans.

ข้อสังเกตเกี่ยวกับตัวอย่างที่ 1.2 ก็คือ จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่าสัญลักษณ์ที่ให้นั้นเปลี่ยนแปลงไปจาก y (ตัวแปรตามของฟังก์ชัน) กับ x (ตัวแปรต้นของฟังก์ชัน) เป็น R กับ Q ตามลำดับ ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วการเขียนฟังก์ชันนั้นอาจใช้สัญลักษณ์อื่นใดก็ได้ตามความสะดวกของผู้ใช้ เช่น $y = f(x)$ หรือ $y = g(x)$ หรือ $y = \phi(x)$ หรือ $y = y(x)$ ฯลฯ และสามารถใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวอื่นที่ไม่ใช่ y กับ x แทนตัวแปรตามและตัวแปรต้นของฟังก์ชัน แต่สิ่งสำคัญจะต้องอธิบายหรือให้คำจำกัดความของตัวแปรนั้น ๆ ในกรณีที่เป็นโจทย์ประยุกต์ ดังตัวอย่างที่ 1.2 ที่ระบุว่า R แทนรายรับ (หน่วยเป็น พันบาท) และ Q แทนจำนวนสินค้าที่ขายได้ (หน่วยเป็นชิ้น) เป็นต้น

1.1.1 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

โดเมน (Domain) ของฟังก์ชันตามคำนิยาม หมายถึง เซตของตัวแปรต้นทั้งหมด ซึ่งอาจเป็นจำนวนใดๆ ก็ได้ แต่เนื่องจากเรามักจะสนใจเฉพาะฟังก์ชันที่เป็นจริง ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชันจึงประกอบด้วยค่าที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดของตัวแปรต้น ซึ่งทำให้ค่าตัวแปรตามเป็นจำนวนจริงเท่านั้น และหลังจากเราสามารถกำหนดโดเมนได้แล้ว ก็สามารถหา เรนจ์ (Range) ของฟังก์ชันได้ ด้วยการแทนค่าตัวแปรต้นในโดเมนเข้าไปในฟังก์ชันทีละตัว ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นค่าตัวแปรตามที่สมนัย ซึ่งเรนจ์ของฟังก์ชันจะเท่ากับเซตของค่าตัวแปรตามที่สมนัยทุกตัวรวมกัน

บางครั้งโจทย์อาจกำหนดโดเมนมาให้พร้อมกับฟังก์ชัน เราจึงพิจารณาค่าของตัวแปรต้นเฉพาะที่กำหนดมาให้เท่านั้น เช่น โจทย์กำหนดฟังก์ชัน $z = g(y) = 3y^2 - 4, y > 2$ เป็นการระบุว่าค่าตัวแปรต้น y จะอยู่ในช่วงที่ y มากกว่า 2 เท่านั้น ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชันนี้จึงเป็น $\{y | y > 2\} =$

$(2, \infty)$ เป็นต้น และในกรณีนี้เรนจ์ของฟังก์ชัน จะหาได้จากการแทนค่าตัวแปรต้นในโดเมนเข้าไปในสมการที่ละตัว โดยค่าตัวแปรตามที่เป็นจริงจากการแทนค่าดังกล่าวทุกตัวรวมกัน จะเป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน เช่น $z = g(y) = 3(y)^2 - 4, y > 2$ เมื่อแทนค่า $y > 2$ เข้าไปในสมการที่ละตัว จะได้ค่า z ที่เป็นจริงจากค่า y แต่ละตัว เราจึงสรุปได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชันนี้เป็น $\{z \mid z = 3x^2 - 4, y > 2\}$

ดังที่ได้กล่าวแล้วว่า ในกรณีที่โจทย์ไม่ได้ระบุโดเมนมาให้ เราจะถือเอาจำนวนจริงทั้งหมดที่ ให้ค่าจำนวนจริงของเรนจ์เป็นโดเมนของฟังก์ชัน ซึ่งต้องพิจารณาโจทย์แต่ละข้อเป็นกรณี ๆ ไป เช่น ฟังก์ชัน $y = h(x) = \sqrt{3x}$ โดเมนของฟังก์ชันจะเป็นค่า x ที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เนื่องจากค่า x ที่ติดลบจะทำให้ $\sqrt{3x}$ เป็น อนิยาม (Undefined) หรือฟังก์ชัน $v = v(x) = \frac{1}{x-4}$ โดเมนของฟังก์ชันนี้จะเป็นค่า x ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ ยกเว้น $x = 4$ เพราะว่า เมื่อแทนค่า $x = 4$ ในสมการทำให้ ตัวส่วนเป็นศูนย์และหาค่า v ไม่ได้ ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชัน $v = v(x) = \frac{1}{x-4}$ จึงเท่ากับ $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง และ } x \neq 4\}$

สำหรับในทางเศรษฐศาสตร์นั้น เนื่องจากตัวแปรส่วนใหญ่มีข้อจำกัดที่ไม่อาจมีค่าเป็นลบได้ เช่น ต้นทุนในการผลิตสินค้า หรือราคาสินค้า ฯลฯ จึงมีผลทำให้โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเหล่านี้ถูกจำกัดไปด้วย โดยโดเมนและเรนจ์จะเป็นเพียงจำนวนจริงที่เท่ากับหรือมากกว่าศูนย์เท่านั้น ไม่ใช่เซตของจำนวนจริงทั้งหมด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3 ถ้าฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งอยู่ในรูปของ $C = 100 + 3Q$ โดย C เป็นสัญลักษณ์แทนต้นทุนในการผลิตสินค้า และ Q เป็นสัญลักษณ์แทนปริมาณสินค้าที่ผลิตได้ในแต่ละวัน จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต้นทุนนี้ ถ้าในแต่ละวันโรงงานสามารถผลิตได้เต็มที่ 200 หน่วย

(วิธีทำ) (ก) เนื่องจาก Q ซึ่งเป็นตัวแปรต้นในฟังก์ชันนี้มีค่าได้ระหว่าง 0 ถึง 200 โดย $Q = 0$ หมายถึงการตัดสินใจที่จะไม่ผลิตเลย และ $Q = 200$ หมายถึงการตัดสินใจทำการผลิตจนเต็มความสามารถ ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชัน (ใช้สัญลักษณ์ D_f แทน) คือ

$$D_f = \{Q \mid 0 \leq Q \leq 200\}$$

(ข) จากการแทนค่า Q แต่ละตัวในโดเมนลงในฟังก์ชัน จะได้ค่า C ระหว่าง 100 ถึง 700 ดังนั้นเรนจ์ของฟังก์ชัน (ใช้สัญลักษณ์ R_f แทน) ของโจทย์ข้อนี้คือ

$$R_f = \{C \mid 100 \leq C \leq 700\}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้ฟังก์ชันอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $Q_s = Q_s(P) = -18 + 6P$ โดย Q_s และ P แทนปริมาณเสนอขายและราคาของสินค้านั้น ตามลำดับ จงหาโดเมน (D_f) และเรนจ์ (R_f) ของฟังก์ชันอุปทานนี้

(วิธีทำ) จาก $Q_s = -18 + 6P$ เราทราบว่า P เป็นตัวแปรต้น และ Q_s เป็นตัวแปรตาม โดยตัวแปรทั้งสองจะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เท่านั้น เนื่องจากในทางปฏิบัติ ราคาและปริมาณสินค้าจะไม่ติดลบ ดังนั้น

$$D_f = \{P \mid P \text{ เป็นจำนวนจริงและมีค่า} \geq 0\} \text{ เพราะว่า } P < 0 \text{ ทำให้ } Q_s \text{ เป็นลบ}$$

$$\text{และ } R_f = \{Q_s \mid Q_s \text{ เป็นจำนวนจริงและมีค่า} \geq 0\}$$

Ans.

1.1.2 ชนิดของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่อธิบายมาแล้วนั้นเป็น ฟังก์ชันที่มีตัวแปรต้นเพียงตัวเดียว (Univariate Functions) ที่เขียนอยู่ในรูปของ ฟังก์ชันทั่วไป (General Functions) ซึ่งเป็นการบอกความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม 1 ตัว (y) กับตัวแปรต้น 1 ตัว (x) โดยไม่ได้ระบุอย่างชัดเจนว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร แต่นอกจากฟังก์ชันที่มีตัวแปรตามและตัวแปรต้นอย่างละตัวดังกล่าว ในความเป็นจริงแล้ว ตัวแปรตามหนึ่งตัวอาจขึ้นอยู่กับตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัว ซึ่งฟังก์ชันชนิดนี้มีชื่อเรียกว่า “ฟังก์ชันที่มี ตัวแปรต้นหลายตัว (Multivariate Functions)” และสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันทั่วไปได้ดังตัวอย่างที่ 1.5

ตัวอย่างที่ 1.5 ฟังก์ชันทั่วไปของฟังก์ชันที่มีตัวแปรต้นหลายตัวแปร ในกรณีที่มี

(ก) ตัวแปรต้น 2 ตัว: $z = f(x, y)$