

คู่มือ

เฉลย แคลคูลัส 1

สำหรับ วิศวกร



KEY
FOR

Calculus 1 FOR ENGINEERS

สำหรับนักศึกษาในระดับ ปวส. และระดับปริญญาตรี

- ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- การประยุกต์ของอนุพันธ์
- การอินทิเกรต
- เทคนิคการอินทิเกรต
- อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์



รศ. ดร.ธีระศักดิ์ อู๋รัตนานนท์

คู่มือ
เฉลย แคลคูลัส 1
สำหรับ วิศวกร



KEY
FOR
Calculus 1 FOR ENGINEERS

รศ. ดร.ธีระศักดิ์ อู๋รัตนานนท์



ISBN 978-616-213-768-6

หนังสือ คู่มือเฉลยแกลลูลัส 1 สำหรับวิศวกร

ผู้เขียน รศ. ดร.ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

พิมพ์ครั้งที่ 1 มิถุนายน 2562

ราคา 340 บาท

S79-02-01-020-05-19

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

28, 30, 32 ซอยรังสิต-ปทุมธานี 16 ซอย 7

ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทรศัพท์ 0-2958-1125-7, 0-2567-5119

โทรสาร 0-2567-5105

e-mail: sales@skybook.co.th

www.skybook.co.th

© สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์.

คู่มือเฉลยแกลลูลัส 1 สำหรับวิศวกร. -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2562.
500 หน้า.

1. แกลลูลัส. I. ชื่อเรื่อง.

515



หากท่านผู้อ่านพบว่าหนังสือสลับหน้า พิมพ์ไม่ชัดเจน หน้าขาดหายไม่ครบ
หรือความบกพร่องอื่นใด อันเนื่องมาจากกระบวนการพิมพ์และการเข้าเล่ม
กรุณาส่งหนังสือมาที่บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด เพื่อรับหนังสือเล่มใหม่

คำนำ

คู่มือเฉลยแคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร (Key Calculus 1 for Engineers) เล่มนี้ ผู้เขียนได้ตั้งใจอย่างมากในการเขียนและเรียบเรียงขึ้น เพื่อให้ให้นักศึกษาได้มีคู่มือเฉลยอย่างละเอียด เข้าใจง่าย ซึ่งใช้ในการประกอบการเรียนการสอนกับหนังสือแคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร ของผู้เขียน สำหรับนักศึกษาหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศบ.) หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต (วท.บ.) หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อศ.บ.) และหลักสูตรครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) ระดับปริญญาตรี รวมทั้งครูอาจารย์และผู้สนใจสามารถนำคู่มือเฉลยเล่มนี้ไปใช้ในการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยเฉลยเนื้อหาดังนี้

เฉลยบทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เฉลยบทที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เฉลยบทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์

เฉลยบทที่ 4 การอินทิเกรต

เฉลยบทที่ 5 เทคนิคการอินทิเกรต

เฉลยบทที่ 6 อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคู่มือเฉลยแคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง สำหรับนักศึกษาที่ได้ทำโจทย์ในหนังสือแคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร ของผู้เขียนแล้วนั้น สามารถตรวจสอบได้ว่า นักศึกษาได้ทำหรือมีความเข้าใจได้ถูกต้องมากน้อยเพียงใด คู่มือเฉลยเล่มนี้ สามารถช่วยนักศึกษาได้อย่างยิ่ง เพราะผู้เขียนได้มีการเฉลยอย่างละเอียดและสามารถเข้าใจได้ง่าย

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ และผู้เขียนขอโอกาสนี้แสดงการวะและกตัญญูทดแทนต่อ คุณครู อาจารย์ทุก ๆ ท่านของผู้เขียนรวมทั้งผู้ช่วยศาสตราจารย์เมธี ลิ้มอักษร ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรรค์ คำกระบี่ รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตต์พิทักษ์ รองศาสตราจารย์ ดร. วิชัย ชำนิ รองศาสตราจารย์สมศักดิ์ โพธิ์วิจิตร รองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา รองศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ ทองอยู่ ศาสตราจารย์ ดร. สมหวัง พิธิยานุวัฒน์ ศาสตราจารย์ ดร. อุทุมพร จามรมาน อาจารย์ ดร.อัญชลี ตนานนท์ และรองศาสตราจารย์ ดร. กิตติพร ปัญญาภิบาล ญผล ที่เป็นบูรพคณาจารย์ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ให้แก่ผู้เขียน รวมถึงเพื่อนๆ ทุกคน และท้ายสุดครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งที่สุดของผู้เขียนตลอดมา

รองศาสตราจารย์ ดร. ชีระศักดิ์ อู๋จันทนนท์

สารบัญ

	หน้า
เฉลยบทที่ 1	
ขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	1
แบบฝึกหัด 1.1	2
แบบฝึกหัด 1.2	13
แบบฝึกหัด 1.3	19
เฉลยบทที่ 2	
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	29
แบบฝึกหัด 2.1	30
แบบฝึกหัด 2.2	47
แบบฝึกหัด 2.3	63
แบบฝึกหัด 2.4	79
แบบฝึกหัด 2.5	93
แบบฝึกหัด 2.6	103
แบบฝึกหัด 2.7	125
แบบฝึกหัด 2.8	129
เฉลยบทที่ 3	
การประยุกต์ของอนุพันธ์	145
แบบฝึกหัด 3.1	146
แบบฝึกหัด 3.2	163
แบบฝึกหัด 3.3	173
แบบฝึกหัด 3.4	185
แบบฝึกหัด 3.5	197
แบบฝึกหัด 3.6	211
แบบฝึกหัด 3.7	221
เฉลยบทที่ 4	
การอินทิเกรต	237
แบบฝึกหัด 4.1	238
แบบฝึกหัด 4.2	243
แบบฝึกหัด 4.3	247
แบบฝึกหัด 4.4	253

	หน้า
แบบฝึกหัด 4.5	265
แบบฝึกหัด 4.6	274
เฉลยบทที่ 5 เทคนิคการอินทิเกรต	279
แบบฝึกหัด 5.1	280
แบบฝึกหัด 5.2	305
แบบฝึกหัด 5.3	337
แบบฝึกหัด 5.4	365
เฉลยบทที่ 6 อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์	383
แบบฝึกหัด 6.1	384
แบบฝึกหัด 6.2	405
แบบฝึกหัด 6.3	433
แบบฝึกหัด 6.4	449
แบบฝึกหัด 6.5	465
ภาคผนวก	479
พีชคณิตพื้นฐาน	480
สมบัติของเลขชี้กำลังและลอการิทึม	480
สรุปภาคตัดกรวย	481
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	486
เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ	487
สูตรการหาอนุพันธ์	489
สูตรการอินทิเกรต	490
บรรณานุกรม	491
ประวัติผู้เขียน	492

เฉลยบทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่อง
ของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด 1.1

จงใช้ทฤษฎีของลิมิตของฟังก์ชันหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + x - 1)$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + x - 1) = 3(1)^3 - 2(1)^2 + 1 - 1 = 3 - 2 + 1 - 1 = 1$ ■

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x + 2}$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x + 2} = \frac{3^2 - 3}{3 + 2} = \frac{9 - 3}{5} = \frac{6}{5}$ ■

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{4^2 - 16}{4 - 4} = \frac{16 - 16}{0} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$
 ■

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - x - 2}$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{(-1) + 1}{(-1)^2 - (-1) - 2} = \frac{0}{1 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}$$
 ■

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(1)^4 - 1}{(1)^3 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + 1)(1^2 + 1)}{(1^2 + 1 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2)(2)}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$
 ■

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1^2 - 4(1) + 3} = \frac{0}{1 - 4 + 3} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-3} = \frac{1+2}{1-3} = -\frac{3}{2} \quad \blacksquare$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{(2)^2 - 4}{(2)^3 - 8} = \frac{4 - 4}{8 - 8} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{2+2}{2^2 + 2(2) + 4} = \frac{4}{4 + 4 + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{4 - x^2}$$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x^4 - 16}{4 - x^2} = \frac{2^4 - 16}{4 - 2^2} = \frac{16 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{4 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{-(x^2 - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} -(x^2 + 4) = -(2^2 + 4) = -(4 + 4) = -8 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0 \quad \blacksquare$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|}$$

วิธีทำ พิจารณา $|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; x-1 \geq 0 ; x \geq 1 \\ -(x-1) & ; x-1 < 0 ; x < 1 \end{cases}$ จะได้

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \quad \blacksquare$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}$$

วิธีทำ พิจารณา $|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; x-1 \geq 0 ; x \geq 1 \\ -(x-1) & ; x-1 < 0 ; x < 1 \end{cases}$ จะได้

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -1 = -1 \quad \blacksquare$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{4x-4}$$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{4x-4} = \sqrt{4(1)-4} = \sqrt{4-4} = 0 \quad \blacksquare$

$$13. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4-x}$$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{4-x} = \sqrt{4-4} = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{4-x}$ หาค่าไม่ได้

จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{4-x} \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{4-x}$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4-x}$ หาค่าไม่ได้ $\blacksquare$

$$14. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \frac{3-\sqrt{9}}{9-9} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{3+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}$$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} = \frac{4^2-16}{2-\sqrt{4}} = \frac{16-16}{2-2} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{2-\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{-(\sqrt{x}-2)} = \lim_{x \rightarrow 4} -(\sqrt{x}+2)(x+4) \\ &= -(\sqrt{4}+2)(4+4) = -(4)(8) = -32 \quad \blacksquare \end{aligned}$$