

# สมการเชิงอนุพันธ์

## (Differential Equations)

is determined by  $t$ . The initial conditions. The problem equation (initial value problem). We

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{df}{dx} \quad (\text{where } f(x) = \frac{dy}{dx})$$

$$\rightarrow \frac{df}{dx} = f'(x) = 24x^2 + 8x. \text{ Know } f'(x), \text{ can find}$$

by "antidifferentiation".

$$f(x) = 24x^2 + 8x = 8x^3 + 4x$$

สำหรับนักศึกษาระดับ ปวส./ปริญญาตรี และผู้ที่สนใจทั่วไป

# **สมการ เชิงอนุพันธ์ (Differential Equations)**

รองศาสตราจารย์ธีระศักดิ์ อัจฉริยะกุล



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED  
515/276-8 ถ.วิจิตร-ปทุมธานี ต.ปทุมธานี อ.เมือง จ.ปทุมธานี 12130  
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105  
e-mail: sales@skybook.co.th

[www.skybook.co.th](http://www.skybook.co.th)



## “สมการเชิงอนุพันธ์”

พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤศจิกายน 2549

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย

ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์

หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต

จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

**ราคา 250 บาท**

### ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ธีระศักดิ์ ฐิรจนาพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2549.

432 หน้า

1. คณิตศาสตร์

I. ชื่อเรื่อง

510

ISBN 13 : 978-974-389-757-3

ISBN 10 : 974-389-757-7

S7901-30-11-06

### จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 อ.วังน้อย-ปทุมธานี ๑.ปะชาธิปัตย์ อ.ชัยภูมิ ๑.ปะชาธิปัตย์ 12130

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

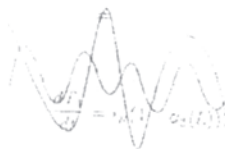
e-mail: sales@skybook.co.th

**www.skybook.co.th**

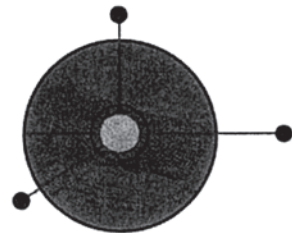
หากท่านผู้อ่านซื้อหนังสือที่จัดพิมพ์โดยบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด และพบว่าหนังสือสลับหน้า พิมพ์ไม่ชัดเจน  
หน้าขาดหายไม่ครบ หรือความบกพร่องอื่นใดอันเนื่องมาจากการบวนการพิมพ์และการเข้าเล่ม  
กรุณาส่งหนังสือมาที่บริษัทฯ เพื่อรับหนังสือเล่มใหม่

พิมพ์ที่ บริษัท พี เอ็น เจ แอนด์ สกายพริ้นติงส์ จำกัด

โทรศัพท์ : 0-2812-1484, 0-2812-2265



# คำนำ



ตำราสมการเชิงอนุพันธ์ ( Differential Equations ) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรี ซึ่งเขียนและเรียบเรียง เนื้อหาดังต่อไปนี้

1. สมการเชิงอนุพันธ์และการจำแนกประเภท
2. การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่ง
3. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นทั่วไป
4. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว
5. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว
6. การแปลงลาปลาซ
7. ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราสมการเชิงอนุพันธ์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนต่อนักศึกษา รวมทั้งนักศึกษาและผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

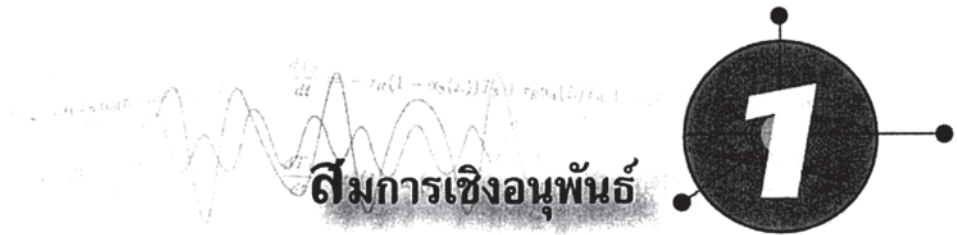
ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดาที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้อีกทั้งคุณครู และอาจารย์ทุก ๆ ท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้แก่ผู้เขียน และรวมถึงครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งของผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ธีระศักดิ์ อัจฉานนท์

|                                                                                                              | หน้า       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>บทที่ 3</b>                                                                                               |            |
| <b>สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นทั่วไป</b>                                                                  | <b>107</b> |
| สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ $n$                                                                     | 107        |
| แบบฝึกหัด 3.1                                                                                                | 115        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 3.1                                                                                           | 116        |
| <b>บทที่ 4</b>                                                                                               |            |
| <b>สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว</b>                                | <b>117</b> |
| สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว                                       | 117        |
| แบบฝึกหัด 4.1                                                                                                | 122        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.1                                                                                           | 122        |
| สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทุกตัว                                                               | 123        |
| แบบฝึกหัด 4.2                                                                                                | 127        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.2                                                                                           | 128        |
| สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำบางค่า                                                                      | 129        |
| แบบฝึกหัด 4.3                                                                                                | 136        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.3                                                                                           | 136        |
| สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทุกตัว                                                           | 137        |
| แบบฝึกหัด 4.4                                                                                                | 142        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.4                                                                                           | 142        |
| สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกันบางค่า                                                               | 143        |
| แบบฝึกหัด 4.5                                                                                                | 146        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.5                                                                                           | 146        |
| <b>บทที่ 5</b>                                                                                               |            |
| <b>สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว</b>                             | <b>147</b> |
| การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว                         | 147        |
| วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับ $n$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว | 149        |
| การหาผลเฉลยเฉพาะรายโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์                                                               | 149        |
| แบบฝึกหัด 5.1                                                                                                | 171        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.1                                                                                           | 171        |

|                                                                 | หน้า       |
|-----------------------------------------------------------------|------------|
| การหาผลเฉลยเฉพาะรายโดยวิธีตัวดำเนินการผกผัน                     | 173        |
| แบบฝึกหัด 5.2                                                   | 193        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.2                                              | 194        |
| วิธีการหาค่าของ $\frac{1}{Q(D)}f(x)$ เมื่อ $f(x)$ มีรูปแบบเฉพาะ | 195        |
| แบบฝึกหัด 5.3                                                   | 261        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.3                                              | 262        |
| การหาผลเฉลยเฉพาะรายโดยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์                  | 263        |
| แบบฝึกหัด 5.4                                                   | 285        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.4                                              | 286        |
| <b>บทที่ 6 การแปลงลาปลาซ</b>                                    | <b>287</b> |
| การแปลงลาปลาซ                                                   | 287        |
| แบบฝึกหัด 6.1                                                   | 294        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.1                                              | 295        |
| สมบัติของการแปลงลาปลาซ                                          | 296        |
| ตารางการแปลงลาปลาซ                                              | 298        |
| แบบฝึกหัด 6.2                                                   | 304        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.2                                              | 305        |
| การแปลงผกผันลาปลาซ                                              | 306        |
| แบบฝึกหัด 6.3                                                   | 313        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.3                                              | 314        |
| การแปลงลาปลาซโดยทฤษฎีการเลื่อนแบบที่หนึ่ง                       | 315        |
| การแปลงผกผันลาปลาซโดยทฤษฎีการเลื่อนแบบที่หนึ่ง                  | 318        |
| แบบฝึกหัด 6.4                                                   | 323        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.4                                              | 324        |
| การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน                             | 325        |
| การแปลงลาปลาซของอินทิกรัลของฟังก์ชัน                            | 331        |
| แบบฝึกหัด 6.5                                                   | 333        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.5                                              | 334        |

|                                                                  | หน้า       |
|------------------------------------------------------------------|------------|
| การหาการแปลงผกผันลาปลาซโดยใช้ทฤษฎีคอนโวลูชัน                     | 335        |
| แบบฝึกหัด 6.6                                                    | 341        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.6                                               | 342        |
| การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันหน่วย                                    | 343        |
| แบบฝึกหัด 6.7                                                    | 348        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.7                                               | 349        |
| ทฤษฎีการเลื่อนแบบที่สองของฟังก์ชัน                               | 350        |
| แบบฝึกหัด 6.8                                                    | 355        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.8                                               | 356        |
| การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคาบ                                      | 357        |
| แบบฝึกหัด 6.9                                                    | 362        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.9                                               | 363        |
| การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นโดยวิธีการแปลงลาปลาซ      | 364        |
| แบบฝึกหัด 6.10                                                   | 379        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 6.10                                              | 380        |
| <b>บทที่ 7 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น</b>                     | <b>381</b> |
| การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นโดยวิธีการกำจัดตัวแปร | 382        |
| แบบฝึกหัด 7.1                                                    | 401        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 7.1                                               | 402        |
| การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นโดยวิธีการแปลงลาปลาซ  | 403        |
| แบบฝึกหัด 7.2                                                    | 417        |
| คำตอบแบบฝึกหัด 7.2                                               | 418        |
| <b>ภาคผนวก</b>                                                   | <b>419</b> |
| สูตรการหาอนุพันธ์                                                | 420        |
| สูตรการอินทิเกรต                                                 | 421        |
| เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ                                              | 422        |
| <b>บรรณานุกรม</b>                                                | <b>424</b> |



## สมการเชิงอนุพันธ์

สมการคณิตศาสตร์ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาทางด้าน  
สาขาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และในสาขาอื่น ๆ เนื่องจากกฎเกณฑ์และ  
ปัญหาต่าง ๆ ในสาขาวิชาเหล่านี้ล้วนพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการ  
เชิงอนุพันธ์ทั้งสิ้นหรือสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ กำหนดความชันที่จุดใด ๆ เป็น  $\frac{dy}{dx}$  และจุดผ่าน  $(x_0, y_0)$   
จงหาสมการเส้นโค้ง

ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับปลายลวดสปริงจะ  
อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์  $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

ปัญหาการเคลื่อนที่ กำหนดความเร็วในการเคลื่อนที่  $v(t)$  และจุดเริ่มต้นของการ  
เคลื่อนที่ จะมีรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็น  $\frac{ds}{dt} = v(t)$  เมื่อ  $s$  เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่  
ณ เวลา  $t$

### 1.1 สมการเชิงอนุพันธ์และการจำแนกประเภท

(Differential equations and their classification)

**บทนิยาม 1.1.1** สมการเชิงอนุพันธ์หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัว  
หรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือมากกว่า ตัวอย่างเช่น

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 0, \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

**ชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์** แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) หมายถึง สมการที่  
ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว

ตัวอย่างเช่น  $\frac{dy}{dx} = 2x + 5, \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \frac{dy}{dx} = \cos x$



2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป

ตัวอย่างเช่น  $\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ (Order of differential equation) คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ระดับชั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ (Degree of differential equation) คือ เลขชี้กำลังของพจน์อนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น หลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างเช่น  $x \frac{dy}{dx} + y = 3$  เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ระดับชั้น 1

$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$  เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 1

$x \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + 4y = xy$  เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ระดับชั้น 2

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^4}$  สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^4$  สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 2

$yx^2 = \frac{d^2 y}{dx^2} + \sqrt[3]{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^4}$  เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 3

สมการเชิงอนุพันธ์เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear differential equation) ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระมีเลขชี้กำลังเท่ากับ 1 เท่านั้น
2. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและ/หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear differential equation) หมายถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = xy \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} = x^2 \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น}$$

รูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเขียนได้เป็น

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

โดยที่  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$  และ  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  เท่านั้น

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (Solution of differential equation) คือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตามที่ไม่ปรากฏพจน์ของอนุพันธ์ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าแล้วทำให้สมการเชิงอนุพันธ์นั้นเป็นจริงหรือสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างเช่น  $y = \sin x + 3 \cos x$  เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

$y = e^{2x} + e^{-x}$  เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

$y^3 + 2xy - x^2 = 0$  เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y}{3y^2 + 2x}$

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ตัวอย่าง 1.1.1 จงแสดงว่า  $y = \sin x + 3 \cos x$  เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{สำหรับ } x \text{ ทุกค่าที่เป็นจำนวนจริง}$$

วิธีทำ จาก  $y = \sin x + 3 \cos x$  ได้

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - 3 \sin x$$

และ  $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x - 3 \cos x$

แทนค่า  $y$  และ  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ลงในทางซ้ายมือของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  ได้

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = (-\sin x - 3\cos x) + (\sin x + 3\cos x) = 0$$

นั่นคือ  $y = \sin x + 3\cos x$  เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  ■

ให้  $x$  เป็นตัวแปรอิสระ  $y$  เป็นตัวแปรตาม และ  $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$  จะ

ได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ  $n$  ที่ประกอบด้วย  $x$  และ  $y'' - y' - 12y = 0$  สามารถเขียนได้เป็น  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  เมื่อ  $F$  เป็นฟังก์ชันของตัวแปร  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$

จำนวน  $n+2$  ตัวแปร ตัวอย่างเช่น  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = x^2$  สามารถเขียนได้เป็น

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ เมื่อ } F(x, y, y', y'') = y'' - y' - 2y - x^2$$

ให้  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ  $n$  ฟังก์ชัน  $y = f(x)$  เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้ง (Explicit solution) ของสมการ  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  บนเซตของจำนวนเต็ม ถ้าแทนค่า  $y = f(x)$  ลงในสมการ  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  แล้วทำให้สมการเป็นจริงทุกค่าในเซตของจำนวนเต็ม

ความสัมพันธ์  $g(x, y) = 0$  เป็นผลเฉลยโดยปริยาย (Implicit solution) ของสมการ

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ บนเซตของจำนวนเต็ม ถ้า}$$

1. เราสามารถนิยามฟังก์ชัน  $y = f_1(x)$  บนเซตของจำนวนเต็ม ได้อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันจากความสัมพันธ์  $g(x, y) = 0$  แล้วทำให้  $y = f_1(x)$  เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการ  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

หรือ 2. ความสัมพันธ์  $g(x, y) = 0$  นั้นสอดคล้องกับสมการ  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  บนเซตของจำนวนเต็ม

ตัวอย่างเช่น  $y = e^x$  เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{dy}{dx} - y = 0$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 + 4 \text{ เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ } \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

กำหนดให้  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ  $n$  ผลเฉลยทั่วไป (General solution) ของสมการ  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  หมายถึง ผลเฉลยที่ประกอบด้วยค่าคงตัวที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constant) จำนวน  $n$  ค่า นิยมเขียนในรูปของตัวอักษร  $c$