



ชื่อหนังสือ อินทิกรัล  
บาร์โค้ด 9789743895562  
ISBN 974-389-556-6

Integral

# อินทิกรัล

อินทิกรัลชั้นเดียว  
อินทิกรัลสองชั้น อินทิกรัลสามชั้น



สำหรับนักศึกษา ระดับ ปวช./ปวณ. และผู้ที่สนใจทั่วไป

รศ. ธีระศักดิ์ อัจฉริยะกุล

# Integral อินทิกรัล

สำหรับนักศึกษาระดับ ปวส./ปริญญาตรี และผู้ที่สนใจทั่วไป

โดย... รศ. วีระศักดิ์ อัจฉนนท์



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด  
SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130  
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105  
e-mail: sales@skybook.co.th

[www.skybook.co.th](http://www.skybook.co.th)

## “อินทิกวีร”

พิมพ์ครั้งที่ 1 มกราคม 2548

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย

ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์

หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต

จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

**ราคา 280 บาท**

### ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ธีระศักดิ์ ภูรีจันทรนันท์

อินทิกวีร -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2548.

432 หน้า

1. อินทิกวีร I. ชื่อเรื่อง

515 . 43

ISBN: 974-389-556-6

S7901-30-01-05

### จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



บริษัท **สกายบุ๊กส์** จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถนนสุขุมวิท แขวงคลองเตย เขตคลองเตย กรุงเทพมหานคร 10110

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

e-mail: sales@skybook.co.th

**www.skybook.co.th**

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด

459 ซอยพญาไท 1 (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทรศัพท์: 0-2694-3010



ตำราอินทิกรัล (Integral) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ในระดับปริญญาตรีและระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.) ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงเนื้อหา ดังนี้

1. อินทิกรัลชั้นเดียว
2. เทคนิคของการอินทิเกรต
3. อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์
4. อินทิกรัลสองชั้น
5. อินทิกรัลสามชั้น

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราอินทิกรัลเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอน ต่อนักศึกษา และผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งใดเสมอมิได้ ทั้งคุณครู และอาจารย์ทุก ๆ ท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้แก่ผู้เขียน และรวมถึงครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งของผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ระศักดิ์ อูร์จันนันท



|                                                           | หน้า |
|-----------------------------------------------------------|------|
| <b>บทที่ 1</b>                                            |      |
| <b>อินทிரัลชั้นเดียว</b>                                  | 1    |
| อินทிரัลไม่จำกัดเขต                                       | 1    |
| การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต                               | 3    |
| แบบฝึกหัด 1.1                                             | 11   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 1.1                                        | 12   |
| การอินทิเกรตฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล                       | 13   |
| แบบฝึกหัด 1.2                                             | 16   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 1.2                                        | 17   |
| การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ                            | 18   |
| แบบฝึกหัด 1.3                                             | 21   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 1.3                                        | 22   |
| การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก | 23   |
| แบบฝึกหัด 1.4                                             | 33   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 1.4                                        | 34   |
| การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิตในรูปกำลังสอง                  | 36   |
| แบบฝึกหัด 1.5                                             | 52   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 1.5                                        | 53   |
| การอินทิเกรตฟังก์ชันไฮเพอร์บอลิก                          | 55   |
| แบบฝึกหัด 1.6                                             | 58   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 1.6                                        | 58   |
| <b>บทที่ 2</b>                                            |      |
| <b>เทคนิคของการอินทิเกรต</b>                              | 59   |
| การอินทิเกรตที่ละส่วน                                     | 59   |
| แบบฝึกหัด 2.1                                             | 70   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 2.1                                        | 71   |

|                                                | หน้า |
|------------------------------------------------|------|
| การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ | 73   |
| แบบฝึกหัด 2.2                                  | 86   |
| คำตอบแบบฝึกหัด 2.2                             | 87   |
| การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย           | 89   |
| แบบฝึกหัด 2.3                                  | 104  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 2.3                             | 105  |
| การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่         | 107  |
| แบบฝึกหัด 2.4                                  | 113  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 2.4                             | 114  |
| <b>บทที่ 3 อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์</b> | 115  |
| อินทิกรัลจำกัดเขต                              | 115  |
| แบบฝึกหัด 3.1                                  | 135  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 3.1                             | 136  |
| พื้นที่ระนาบ                                   | 137  |
| แบบฝึกหัด 3.2                                  | 160  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 3.2                             | 163  |
| ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบ        | 164  |
| วิธีจัน                                        | 167  |
| แบบฝึกหัด 3.3                                  | 185  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 3.3                             | 186  |
| วิธีเปลือกทรงกระบอก                            | 187  |
| แบบฝึกหัด 3.4                                  | 204  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 3.4                             | 206  |
| ความยาวของเส้นโค้งระนาบ                        | 207  |
| แบบฝึกหัด 3.5                                  | 218  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 3.5                             | 220  |

|                                             | หน้า |
|---------------------------------------------|------|
| <b>บทที่ 4 อินทรีสองชั้น</b>                | 221  |
| อินทรีสองชั้นบน โดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า    | 222  |
| แบบฝึกหัด 4.1                               | 231  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.1                          | 232  |
| อินทรีสองชั้นบน โดเมนทั่วไป                 | 233  |
| แบบฝึกหัด 4.2                               | 261  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.2                          | 263  |
| การประยุกต์ของอินทรีสองชั้น                 | 265  |
| การหาพื้นที่ของบริเวณระนาบ                  | 265  |
| การหาปริมาตรของรูปทรงตัน                    | 272  |
| แบบฝึกหัด 4.3                               | 279  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.3                          | 280  |
| การประยุกต์ทางฟิสิกส์                       | 281  |
| แบบฝึกหัด 4.4                               | 299  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.4                          | 300  |
| อินทรีสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว                | 301  |
| แบบฝึกหัด 4.5                               | 320  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 4.5                          | 322  |
| <b>บทที่ 5 อินทรีสามชั้น</b>                | 323  |
| อินทรีสามชั้นบนบริเวณรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก | 323  |
| อินทรีสามชั้นบน โดเมนทั่วไป                 | 328  |
| แบบฝึกหัด 5.1                               | 358  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.1                          | 360  |
| การเปลี่ยนตัวแปรในอินทรีสามชั้น             | 361  |
| อินทรีสามชั้นในพิกัดทรงกระบอก               | 361  |
| แบบฝึกหัด 5.2                               | 381  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.2                          | 381  |
| อินทรีสามชั้นในพิกัดทรงกลม                  | 382  |
| แบบฝึกหัด 5.3                               | 401  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.3                          | 401  |

|                                | หน้า |
|--------------------------------|------|
| แบบฝึกหัด 5.3                  | 401  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.3             | 401  |
| แบบฝึกหัด 5.4                  | 402  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.4             | 402  |
| การประยุกต์ของอินทิกรัลสามชั้น | 403  |
| แบบฝึกหัด 5.5                  | 414  |
| คำตอบแบบฝึกหัด 5.5             | 416  |
| <b>ภาคผนวก</b>                 | 417  |
| สูตรการหาอนุพันธ์              | 418  |
| สูตรการอินทิเกรต               | 419  |
| เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ            | 420  |
| <b>บรรณานุกรม</b>              | 422  |

# อินทิกรัล

Integral



# 1 ... อินทิกรัลชั้นเดียว



จากความสนใจในการศึกษาหาพื้นที่ของบริเวณที่ไม่เป็นรูปทางเรขาคณิต เพื่อที่จะหาหลักวิธีการสำหรับการคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ไม่เป็นรูปทางเรขาคณิตหรือบริเวณต่างๆ ไปนั้น นิวตัน (Newton) และไลบ์นิซ (Leiniz) ได้ค้นพบหลักวิธีการหาพื้นที่บริเวณต่างๆ ไป โดยใช้ขบวนการย้อนกลับของการหาอนุพันธ์ ซึ่งค้นพบในเวลาใกล้เคียงกัน โดยนิวตันได้ค้นพบในปี ค.ศ.1669 และไลบ์นิซได้ค้นพบในปี ค.ศ.1673 การค้นพบหลักวิธีการนี้ถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสอย่างแท้จริง

## อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

เป็นการศึกษาขบวนการย้อนกลับของอนุพันธ์ หรือ ขบวนการหาฟังก์ชันที่ทราบอนุพันธ์ของฟังก์ชันอย่างมีระบบ

### นิยาม 1.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

กำหนดให้  $F(x)$  เป็นฟังก์ชันเราเรียกฟังก์ชัน  $F(x)$  ว่า เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x)$  ก็ต่อเมื่อ  $F'(x) = f(x)$  สำหรับทุกๆ  $x$  ในโดเมนของ  $f(x)$

เช่น ฟังก์ชัน  $\frac{1}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3 - 2, \frac{1}{3}x^3 + 5, \frac{1}{3}x^3 + C$  (เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัวใดๆ) ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x) = x^2$  เพราะอนุพันธ์ของแต่ละฟังก์ชันเท่ากับ  $x^2$

เราจะเห็นได้ว่าฟังก์ชันหนึ่งๆ สามารถมีปฏิยานุพันธ์ได้มากมาย ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ถ้า  $F(x)$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x)$  หนึ่งฟังก์ชันแล้ว เราสามารถหาปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x)$  ได้ทั้งหมด ด้วยการบวก  $F(x)$  ด้วยค่าคงตัวที่แตกต่างกันไปนั่นคือ  $F(x) + C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็น ปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x)$  เนื่องจาก

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{d}{dx}[F(x)] + \frac{d}{dx}[C] = f(x) + 0 = f(x)$$

ดังทฤษฎีต่อไปนี้

**ทฤษฎี 1.1** ถ้า  $F(x)$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x)$  แล้ว สำหรับค่าคงตัว  $C$  ใด ๆ ฟังก์ชัน  $F(x) + C$

เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x)$  ด้วย เช่น จาก  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$  จะได้  $F(x) = \sin x$  เป็น

ปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x) = \cos x$  และเราเขียนทุก ๆ ปฏิยานุพันธ์ของ  $\cos x$  ได้ในรูป

$F(x) = \sin x + C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ

## 2 อินทิกรัล

เราเรียกวิธีการหาค่าปริพันธ์ในการหาปริพันธ์ว่า การหาปริพันธ์ (Antidifferentiation) หรือ การอินทิเกรต (Integration) โดยใช้สัญลักษณ์แทนดังต่อไปนี้ ถ้ามีฟังก์ชัน  $F(x)$  ที่ทำให้  $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$  แล้วฟังก์ชันที่เขียนในรูป  $F(x) + C$  เป็นปริพันธ์ของ  $f(x)$  โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

ซึ่งอ่านว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต ของ  $f(x)$  เท่ากับ  $F(x)$  บวก  $C$  เพราะ  $F(x) + C$  ไม่ใช่ฟังก์ชันที่กำหนดแน่นอน แต่เป็นเซตของฟังก์ชันที่เป็นไปได้ทั้งหมด

สัญลักษณ์  $\int$  เรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล (Integral sign)

$f(x)$  เรียกว่า ตัวถูกอินทิเกรต (integrand)

$x$  เรียกว่า ตัวแปรของการอินทิเกรต (variable of integration)

$\int f(x) dx$  เรียกว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f(x)$  เทียบกับตัวแปร  $x$

$C$  เรียกว่า ค่าคงตัวของอินทิเกรต (constant of integration)

หมายเหตุ ในตอนแรกจะกล่าวเพียงหนึ่งตัวแปร จึงเรียกว่า อินทิกรัลของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหรือ

อินทิกรัลชั้นเดียว นั่นเอง เช่น ปริพันธ์ของ  $f(x) = x^2$  คือฟังก์ชัน  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$  ดังนั้น

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

ปริพันธ์ของ  $f(x) = \cos x$  คือฟังก์ชัน  $F(x) = \sin x + C$  ดังนั้น

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

ข้อสังเกต จากสัญลักษณ์  $\frac{d}{dx}(\dots)$  แทนการดำเนินการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระ  $x$  ดังนั้น

สัญลักษณ์  $\int(\dots)dx$  แทนการดำเนินการหาปริพันธ์ หรือการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรอิสระ  $x$

ถ้าเป็นตัวแปรอิสระตัวอื่นที่ไม่ใช่ตัวแปร  $x$  แล้ว เราก็สามารถปรับสัญลักษณ์ให้เหมาะสมได้ เช่น

$\frac{d}{dt}(F(t)) = f(t) + C$  และจะได้ว่า  $\int f(t) dt = F(t) + C$  ซึ่งเป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f(t)$  เทียบกับตัวแปร  $t$

ตัวอย่าง 1.1 จงหาค่า  $\int(3x^2 - 2x)dx$

วิธีทำ กำหนดให้  $f(x) = 3x^2 - 2x$

พิจารณา ถ้า  $F(x) = x^3 - x^2$  จะได้  $F'(x) = 3x^2 - 2x$

นั่นคือ  $F(x) = x^3 - x^2$  เป็นปริพันธ์ของ  $f(x) = 3x^2 - 2x$

ดังนั้น  $\int(3x^2 - 2x)dx = x^3 - x^2 + C$  ■

จากทฤษฎีการหา  $F(x)$  นั้นเราจะต้องพิจารณาคาคะเน  $F(x)$  ซึ่งเป็นเรื่องที่ยากยิ่ง โดยเฉพาะถ้าหากมีตัวถูกอินทิเกรตที่มีความซับซ้อนก็ยิ่งยากขึ้น เพื่อความสะดวกจึงมีการสร้างสูตรของการอินทิเกรตขึ้น เพื่อทำให้ง่ายขึ้น

การอินทิเกรตฟังก์ชันสามารถแบ่งได้ 2 กรณีดังนี้

### 1. การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต (Integration of Algebraic Functions)

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) คือ ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ และรวมถึงฟังก์ชันที่ได้จากการ บวก ลบ คูณ หาร และการถอดรากของฟังก์ชันพหุนาม

### 2. การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย (Integration of Transcendental Functions)

ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Functions) คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นต้น

#### 1. การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

สูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ให้  $u$  และ  $v$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $a, c, n$  เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้วจะได้

1.  $\int (f'(x))dx = f(x) + C$
2.  $\int du = u + C$
3.  $\int audx = a \int udx$
4.  $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$  เมื่อ  $n \neq -1$
5.  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6.  $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

ตัวอย่าง 1.2 จงหาค่า  $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 5)dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 5)dx &= \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 2x dx - \int 5dx \\
 &= 4 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx - 5 \int dx \\
 &= 4 \left( \frac{x^{3+1}}{3+1} \right) + 3 \left( \frac{x^{2+1}}{2+1} \right) - 2 \left( \frac{x^{1+1}}{1+1} \right) - 5x + C \\
 &= x^4 + x^3 - x^2 - 5x + C \blacksquare
 \end{aligned}$$

## 4 อินทิกรัล

---

ตัวอย่าง 1.3 จงหาค่า  $\int \left( \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{x} \right) dx$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \int \left( \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{x} \right) dx &= \int \sqrt[3]{x} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{1}{2}x dx + \int \frac{3}{x} dx \\&= \int x^{\frac{1}{3}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int x dx + 3 \int \frac{dx}{x} \\&= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{2x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + 3 \ln|x| + C \\&= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + 3\ln|x| + C \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.4 จงหาค่า  $\int (3-2x)\sqrt{x} dx$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \int (3-2x)\sqrt{x} dx &= \int 3x^{\frac{1}{2}} dx - \int 2x^{\frac{3}{2}} dx \\&= 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int x^{\frac{3}{2}} dx \\&= \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \\&= 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \blacksquare\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.5 จงหาค่า  $\int (2t-3)^2 dt$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \int (2t-3)^2 dt &= \int (4t^2 - 12t + 9t^2) dt \\&= \int 4t^2 dt - \int 12t dt + \int 9 dt \\&= 4 \int t^2 dt - 12 \int t dt + 9 \int dt \\&= \frac{4t^3}{3} - \frac{12t^2}{2} + 9t + C \\&= \frac{4t^3}{3} - 6t^2 + 9t + C \blacksquare\end{aligned}$$