ชื่อหนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
บาร์โค้ด 9789743891328
ISBN 974-389-132-3

สมการ เชิงอนุพันธ์สามัญ

Ordinary Differential Equation

Separation of Variables

$$f_1(x)\,g_1(y)dx + f_2(x)\,g_2(y)dy = 0 \longrightarrow \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = C$$

Exact Equation

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\longrightarrow \int M\partial x + \int \left(N + \frac{\partial}{\partial y} \int M\partial x \right) dy = C$$

Linear First Order Equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \longrightarrow ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}\,dx + C$$

Laplace Transform

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - s^{n-3} f^{(2)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

ศ. เลิศ สิทธิโกศล

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Ordinary Differential Equation

ผศ. เลิศ สิทธิโกศล

Cert. in Computer Programming

กศ.บ. (คณิตศาสตร์) ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

SKY SKYBOOK

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)

SKYBOOK COMPANY LIMITED

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

E-mail: skybook1992@hotmail.com

" สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ "

พิมพ์ครั้งที่ 1 ตุลาคม 2544

ลงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย
ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์
หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต
จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา 150 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

เลิศ สิทธิโกศล

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ --- กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์, 2544.
284 หน้า
1. สมการเชิงอนุพันธ์ I. ชื่อเรื่อง
515 . 35
ISBN 974-389-132-3
S7901-30-10-01

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)
SKYBOOK COMPANY LIMITED
โทร. 0-29581125-7, 0-25675119 โทรสาร. 0-25675105
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
E-mail: skybook1992@hotmail.com

"เรามุ่งหวังให้เด็กเด็กรุ่นหลังรักการอ่าน"

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด
459 ซอยพิบูลย์อุปถัมภ์ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310
โทรศัพท์ : 0-26943010

คำนำ

หนังสือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเล่มนี้ เหมาะสำหรับผู้สนใจทั่วไปและนิสิตนักศึกษาในระดับปริญญาตรีที่เรียนในสาขาคณิตศาสตร์ เคมี ฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์การอาหาร เทคโนโลยีอุตสาหกรรมและสาขาที่เรียนเกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์ โดยมีเนื้อหาประกอบด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ที่กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ ดีกรี ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 ดีกรี 1 กล่าวถึงรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์ในทางด้านชีววิทยา เคมี ฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงผกผันลาปลาซ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซ การแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซและการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ผู้เรียบเรียงได้ใช้หนังสือศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2538 ในการอ้างอิงถึงการบัญญัติศัพท์ที่เป็นภาษาไทย แต่ก็ยังมีคำศัพท์บางคำที่ใช้จนคุ้นเคยแล้ว ผู้เรียบเรียงจะใช้คำทั้งสองโดยการเชื่อมคำเหล่านั้นด้วยคำว่า "หรือ" ก่อน แล้วจึงค่อยตัดออกให้เหลือเฉพาะคำศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะการค่อย ๆ เปลี่ยนทีละเล็กละน้อยจะทำให้คนทั้งสองกลุ่มค่อย ๆ ปรับเข้าหากันได้ อาทิคำว่า integration ซึ่งคำนี้เราใช้ (คุ้นเคย) ว่า การอินทิเกรต แต่ในศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถานใช้การหาปริพันธ์ ดังนั้นผู้เรียบเรียงจะใช้คำว่าการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ (integration) แล้วจึงค่อย ๆ ตัดคำว่าการอินทิเกรตออกจนเหลือเพียงคำว่า การหาปริพันธ์ สำหรับคำอื่น ๆ จะยกตัวอย่างพอเป็นที่สังเขป เช่น อินทิเกรตหรือหาปริพันธ์ (integrate) อินทิกรัลหรือปริพันธ์ (integral) ตัวถูกอินทิเกรตหรือปริพัทธ์ (integrand) เป็นต้น ถ้าศึกษาให้ลึก ๆ จะพบว่ามีคำหลายคำที่ไม่มีบัญญัติไว้ การเขียนทับศัพท์ในคำบางคำก็มีประโยชน์มาก เพราะคำเหล่านั้นเป็นคำสากลที่ทุกชาติทุกภาษาเข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องแปลอีกแล้ว

ผู้เรียบเรียงเป็นผู้หนึ่งที่เรียบเรียงหนังสือคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก และพิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้ว โดยจะเน้นศึกษาค้นคว้าจากหนังสือที่เป็นแหล่งข้อมูลเริ่มต้นหรือต้นฉบับ กล่าวคือ จะศึกษาหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษล้วน ๆ แล้วใช้หนังสือที่คนไทยเรียบเรียงขึ้นมาประกอบ เพราะการค้นคว้าจากแหล่งข้อมูลเริ่มต้น จะได้ข้อมูลหรือบทนิยามที่เขียนเป็นสากลมากกว่าข้อมูลที่บรรยายด้วย

ถ้อยภาษา จนบางครั้งผู้เรียบเรียงรู้ได้ทันทีว่าหนังสือที่พิมพ์เผยแพร่แล้วใช้หนังสือเล่มใดประกอบ พร้อมทั้งสามารถบอกหน้าที่ที่ใช้อ้างอิงได้ด้วย การอ่านมาก ศึกษามาก ทำให้แตกฉาน จนกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่วิชาที่ยากเลย

ผู้เรียบเรียงรู้สึกดีใจและรู้สึกภูมิใจที่อย่างน้อยได้มีส่วนช่วยชาติ ช่วยแผ่นดินเกิดเพิ่มหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาไทยอีก 1 เล่ม แม้ว่าหลาย ๆ ครั้งจะรู้สึกเหนื่อย (เหนื่อยมาก ๆ) รู้สึกล้า กว่าจะเขียนเสร็จแต่ละบรรทัด กว่าจะพิมพ์เสร็จแต่ละหน้า กว่าหนังสือจะแล้วเสร็จแต่ละเล่มต้องใช้สมาธิ ความเพียร ความพยายาม ความอุตสาหะอย่างมาก ไม่ว่าในด้านการเรียบเรียง การค้นคว้า การพิมพ์ การพิสูจน์อักษร และอื่น ๆ โดยยึดคติที่ว่า การทำบุญที่ยิ่งใหญ่ที่สุดคือการให้ความรู้เพราะถึงแม้นตัวเองจะตายไปแต่หนังสือก็ยังคงอยู่ตลอดไป มีชีวิตเมื่อมีความรู้ก็ต้องให้ ก็ต้องเผยแพร่ อย่างน้อยที่สุดก็มีประโยชน์กับส่วนรวม ประเทศชาติและแผ่นดินเกิด (หนังสือเล่มนี้ใช้เวลาในการพิมพ์ถึง 2 ปี กว่า ๆ ซึ่งยังไม่รวมถึง การเรียบเรียง การพิสูจน์อักษร) แต่กระนั้นก็มีผลงานที่พิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้วมากมาย อาทิ

1. คณิตศาสตร์พื้นฐาน
2. แคลคูลัสพื้นฐาน
3. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
4. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ I
5. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ II
6. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ III
7. ทอพอโลยี
8. พีชคณิตนามธรรม
9. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (กำลังเขียน)

ผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณผู้เขียนหนังสือทุกเล่มที่ได้ถูกนำมาใช้อ้างอิง ค้นคว้าประกอบการเขียนหนังสือเล่มนี้ ดังปรากฏไว้ในบรรณานุกรมท้ายเล่ม

เลิศ สิทธิโกศล
เมษายน 2542

โทร. 02-9847358
01-3820417

สารบัญ

คำนำ ..... ก

สารบัญ ..... ค

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ 1

1.1 ความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์ 1

1.2 อันดับและดีกรี 3

1.3 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ 10

1.4 การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ 12

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 และดีกรี 1 20

2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้ 21

2.2 สมการเอกพันธ์ 27

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 และดีกรี 1 ที่แก้โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปร 37

2.4 สมการแม่นตรง 46

2.5 ตัวประกอบอินทิเกรตหรือตัวประกอบปริพันธ์ 55

2.6 สมการเชิงเส้นอันดับ 1 66

2.7 สมการเชิงอนุพันธ์ของแบร์นูลลี 70

2.8 วิธีของปิการ์ด 76

บทที่ 3 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง 83

3.1 การประยุกต์ทางชีววิทยา 83

3.2 การประยุกต์ทางเคมี 89

3.3 การประยุกต์ทางฟิสิกส์ 96

3.4 การประยุกต์ทางเรขาคณิต 111

บทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์เส้นอันดับ n 119

4.1 สมการเชิงอนุพันธ์เส้นอันดับ n 119

4.2 ทฤษฎีบทพื้นฐานของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์ 120

4.3 ความเป็นอิสระเชิงเส้นและวรอนสเกียน 121

4.4 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ n 126

4.5 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่ใช่เอกพันธ์อันดับ n 127

4.6 ตัวดำเนินการเชิงเอกพันธ์ 128

4.7 สมบัติบางประการของตัวดำเนินการเชิงเอกพันธ์ 136

บทที่ 5 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 143

5.1 การแก้สมการเอกพันธ์ 144

5.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่ใช่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 154

บทที่ 6 ผลการแปลงลาปลาซ 195

6.1 ผลการแปลงลาปลาซ 195

6.2 สมบัติของการแปลงลาปลาซ 201

6.3 ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และปริพันธ์(อินทิกรัล) ของฟังก์ชัน 204

6.4 ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพิเศษบางฟังก์ชัน 209

6.5 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน 213

6.6 ทฤษฎีบทคอนโวลูชัน 218

6.7 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ และระบบสมการเชิงอนุพันธ์ 223

6.8 ตัวอย่างระคน 234

บรรณานุกรม 247

ภาคผนวก 250

ดรรชนี 263

1 สมการเชิงอนุพันธ์

วิชาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับสมการที่เขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์ (derivative) หรือค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันตัวไม่รู้ค่า ซึ่งเรามีเป้าหมายจะแก้สมการเพื่อหาฟังก์ชันตัวไม่รู้ค่านี้ กว่าวิชาสมการเชิงอนุพันธ์จะเกิดเป็นรูปเป็นร่างดังเช่นในปัจจุบัน ต้องใช้เวลายาวนานในการพัฒนาถึงสามร้อยกว่าปี เพราะนักคณิตศาสตร์แต่ละท่านต่างคนต่างก็ศึกษา ยิ่งในช่วงแรก ๆ แล้วมีการศึกษาในเรื่องนี้ไม่มากนัก ในการพัฒนาจนถึงปัจจุบันนี้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่มีส่วนช่วยให้วิชานี้เจริญก้าวหน้า ไม่เพียงแต่นักคณิตศาสตร์เท่านั้น นักฟิสิกส์ นักเคมี นักชีววิทยา และอื่น ๆ ได้นำความรู้เหล่านี้สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ตามธรรมชาติทางด้านฟิสิกส์ วิศวกรรม เคมี ชีววิทยา และอื่น ๆ อีกมากมาย

ตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การหล่นของก้อนหิน : $y'' = g$

การเคลื่อนที่ของลูกตุ้ม : $L'' + g \sin\theta = 0$

การพยากรณ์ประชากรของมนุษย์ : $P' = P(a - bP), \quad a > 0, b > 0$

1.1 ความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 1.1.1 **สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation) คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ (derivative) หรือค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของตัวแปรตาม (dependent variable) หนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระ (independent variable) หนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัว

ตัวอย่าง 1.1.1 ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

1. $\frac{dy}{dx} = \sin x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - k^5y = 0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 8y = 0$
4. $\frac{\partial u}{\partial t} = k^3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5y = e^{8x}$
6. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

สมการในข้อ 1 ข้อ 2 ข้อ 3 ข้อ 5 เป็นสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระหนึ่งตัว คือ x ตัวแปรตามหนึ่งตัวคือ y และอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x สมการในข้อ 6 เป็นสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระสองตัวคือ x, y ตัวแปรตามหนึ่งตัวคือ V และอนุพันธ์ของ V เทียบกับ x อนุพันธ์ของ V เทียบกับ y แต่สมการในข้อ 4 เป็นสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระสามตัวคือ t, x, y ตัวแปรตามหนึ่งตัวคือ u และอนุพันธ์ของ u เทียบกับ t อนุพันธ์ของ u เทียบกับ x อนุพันธ์ของ u เทียบกับ y

สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

บทนิยาม 1.1.2

1. สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์สามัญ (ordinary derivative) ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวจะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เขียนย่อ ๆ ว่า ODE
2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไปจะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เขียนย่อ ๆ ว่า PDE

สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่รู้จักกันดี

$\frac{dy}{dx} + y = y^2$ สมการของแบร์นูลลี (Bernoulli's equation)

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 4)y = 0$ สมการของเบสเซล (Bessel's equation)

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ สมการคลื่นของเลอจองด์ (Legendre's wave equation)

สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่พบบ่อย ๆ

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ สมการคลื่น (wave equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ สมการความร้อน (heat equation)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ สมการของลาปลาซ (Laplace's equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y)$$ สมการปัวซอง (Poisson equation)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ สมการฟลักซ์ (flux equation)

ตัวอย่าง 1.1.2 จากตัวอย่าง 1.1.1 จะพบว่า

ข้อ 1, 2, 3, 5 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (มี x เป็นตัวแปรอิสระ)

ข้อ 4, 6 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (มี t, x, y และ x, y เป็นตัวแปรอิสระตามลำดับ)

1.2 อันดับและดีกรี

บทนิยาม 1.2.1

1. อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ
2. ดีกรี (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือเลขชี้กำลัง (ที่เป็นจำนวนเต็มบวกและมีค่าน้อยสุด) ของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุด (โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์นั้นต้องเขียนในรูปพหุนาม (polynomial) ของอนุพันธ์) โดยที่ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการต้องมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.2.1 แสดงอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. $y' - 4x = 10$ เป็นสมการอันดับ 1
2. $y'' + y' - 4x = 40$ เป็นสมการอันดับ 2
3. $y''' + y'' + y' - 4x = 50$ เป็นสมการอันดับ 3

ตัวอย่าง 1.2.2 แสดงดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. $(y')^3 - 4x = 10$ สมการนี้มีดีกรี = 3
2. $(y'')^4 + (y')^9 - 4x = 40$ สมการนี้มีดีกรี = 4
3. $(y''')^5 + (y'')^4 + (y')^9 - 4x = 40$ สมการนี้มีดีกรี = 5

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y' - 4xy = 10$ เป็นสมการอันดับ 1 ดีกรี 1 (จะกล่าวในบทที่ 2) ซึ่งสามารถเขียนเป็น

$$\frac{dy}{dx} - 4xy = 10 \text{ หรือ } dy - 4xydx = 10dx$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1 สามารถเขียนในรูป $y' = F(x, y)$ หรือ $F(x, y, y') = 0$

$y'' + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ดีกรี 1 เขียนได้เป็น $F(x, y, y', y'') = 0$

$y''' + y'' + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 3 ดีกรี 1

แต่ $(y'')^4 + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ดีกรี 4

$(y''')^5 + y'' + y' - 4x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 3 ดีกรี 5

ดังได้กล่าวแล้วว่าอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ ดังนั้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$$

เป็นสมการที่มี "อันดับ 2 (order two)" อันซึ่งจะนำไปสู่การอ้างถึง "สมการอันดับ 2" และจะกล่าวถึงในกรณีสมการอันดับ n ในบทต่อ ๆ ไป

ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ดีกรี n ของตัวแปร x หมายถึงฟังก์ชันที่เขียนในรูป

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \; ; \; a_n \neq 0, \; a_i \in R, \; n \in I^+ \cup \{0\}$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปรที่อยู่ในแต่ละพจน์มีเลขชี้กำลัง n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์เท่านั้นไม่เป็นจำนวนเต็มลบเด็ดขาด เราใช้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

$f(x, y) = 20x^2y - 6x - 20y$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม x, y

$f(x, y) = 20x^2y - \frac{x^3}{y^2} - x^{20}$ ไม่เป็นฟังก์ชันพหุนามเพราะ $\frac{-x^3}{y^2} = -x^3y^{-2}$ จะมีตัวแปร y มีเลขชี้กำลังเป็น –2

บทนิยาม 1.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีอิสระเพียงตัวเดียว ซึ่งมีรูปทั่วไปดังนี้

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1\text{-}1)$$

หรือ $$y^{(n)} = F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}) \quad \ldots\ldots\ldots(1\text{-}2)$$

เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระ y เป็นตัวแปรตาม $y^{(i)}$; i = 1, 2, 3, ..., n เป็นอนุพันธ์อันดับที่ i ของ y และ F เป็นฟังก์ชันของ n + 2 ตัวแปร $x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$

หมายเหตุ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนามหรือสมการพหุนามได้จะมีดีกรีเสมอ