



ชื่อหนังสือ เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส II  
 บาร์โค้ด 9789748515663  
 ISBN 974-8515-66-4

# เรขาคณิตวิเคราะห์และ **แคลคูลัส II** ANALYTIC GEOMETRY AND CALCULUS II

เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา

- ภาควิชาวิทยาศาสตร์
- สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯ
- สถาบันราชภัฏทุกแห่ง
- วิทยาลัยเทคนิค
- และผู้ที่สนใจทั่วไป

$\int \sin u \, du = -\cos u + C$   
 $\int \cos u \, du = \sin u + C$   
 $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$   
 $\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C$   
 $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$   
 $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$

ผศ. เลิศ สิทธิโกศล

กศ.บ. (คณิตศาสตร์) ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Cert. in Computer Programming

# ANALYTIC GEOMETRY

เรขาคณิตวิเคราะห์

และ  
AND

# แคลคูลัส II CALCULUS

โดย... ผศ. เลิศ สิทธิโกศล



บริษัท **สกายบุ๊กส์** จำกัด  
หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)  
**SKYBOOK COMPANY LIMITED**

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 958-1125-7, 567-5119 โทรสาร. 567-5105

## “เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส II”

พิมพ์ครั้งที่ 1 มิถุนายน 2542

พิมพ์ครั้งที่ 2 กรกฎาคม 2544

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย

ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์

หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต

จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

# ราคา 150 บาท

### ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

เลิศ สิทธิโกศล

เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส II -- พิมพ์ครั้งที่ 2 -- กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์ , 2544.

392 หน้า

1. เรขาคณิตวิเคราะห์ 2. แคลคูลัส I. ชื่อเรื่อง.

516.3

ISBN : 974-8515-66-4

S7902-30-07-01

### จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



# สกายบุ๊กส์

หมู่บ้านรัตนโกสินทร์ 200 ปี (รังสิต)

**SKYBOOK COMPANY LIMITED**

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 958-1125-7, 567-5119 โทรสาร. 567-5105

“เรามุ่งหวังให้เด็กเด็กรุ่นหลังรักการอ่าน”

พิมพ์ที่ บริษัท สยามสปอร์ต ซินดิเคท จำกัด

459 ซอยนิบลย์อุปกัมภ์ (ลาดพร้าว 48) แขวงสามเสนนอก เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทรศัพท์: 6943010

# คำนำ

หนังสือเรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส II เหมาะสำหรับนิสิตนักศึกษาระดับปริญญาตรีและผู้สนใจทั่วไป โดยมีเนื้อหาประกอบด้วยเรขาคณิตวิเคราะห์ที่วาดด้วยวงกลม พาราโบลา วงรี ไฮเพอร์โบลา พิกัดเชิงขั้ว สมการอิงตัวแปรเสริม การอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ที่วาดด้วยบทนิยามของผลบวกบนผลบวกล่าง อินทิกรัลจำกัดเขตหรือปริพันธ์จำกัดเขต อินทิกรัลไม่จำกัดเขต หรือปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสเชิงปริพันธ์ การเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์ การพิสูจน์สูตรการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก เทคนิคของการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ อินทิกรัลไม่ตรงแบบหรือปริพันธ์ไม่ตรงแบบ การประยุกต์ของอินทิกรัลหรือปริพันธ์ลำดับและอนุกรมสำหรับรายละเอียดหัวข้อย่อยของแต่ละบทให้ดูได้ในสารบัญ

ผู้เรียบเรียงได้ใช้หนังสือศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2538 ในการอ้างอิงถึงการบัญญัติศัพท์ที่เป็นภาษาไทย แต่ก็ยังมีคำศัพท์บางคำที่ใช้จนคุ้นเคยแล้ว ผู้เรียบเรียงจะใช้คำทั้งสองโดยการเชื่อมคำเหล่านั้นด้วยคำว่า “หรือ” ก่อน แล้วจึงค่อยตัดออกให้เหลือเฉพาะคำศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะการค่อย ๆ เปลี่ยนทีละเล็กทีละน้อยจะทำให้คนทั้งสองกลุ่มค่อย ๆ ปรับเข้าหากันได้ อาทิคำว่า integration ซึ่งคำนี้เราใช้ (คุ้นเคย) ว่า การอินทิเกรต แต่ในศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถานใช้ การหาปริพันธ์ ดังนั้นผู้เรียบเรียงจะใช้คำว่าอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ (integration) แล้วจึงค่อย ๆ ตัดคำว่าอินทิเกรตออกจนเหลือเพียงคำว่า การหาปริพันธ์ สำหรับคำอื่น ๆ จะยกตัวอย่างพอเป็นที่สังเขปเช่น อินทิเกรตหรือหาปริพันธ์ (integrate) อินทิกรัลหรือปริพันธ์ (integral) ตัวถูกอินทิเกรตหรือปริพันธ์ (integrand) เป็นต้น ถ้าศึกษาให้ลึก ๆ จะพบว่ามีคำอีกหลายคำที่ไม่มีบัญญัติไว้ การเขียนทับศัพท์ในคำบางคำก็มีประโยชน์มาก เพราะคำเหล่านั้นเป็นคำสากลที่ทุกชาติทุกภาษาเข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องแปลอีกแล้ว

ผู้เรียบเรียงเป็นผู้หนึ่งที่เรียบเรียงหนังสือคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก และพิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้ว โดยจะเน้นศึกษาค้นคว้าจากหนังสือที่เป็นแหล่งข้อมูลเริ่มต้นหรือต้นฉบับ กล่าวคือ จะศึกษาหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษล้วน ๆ แล้วใช้หนังสือที่คนไทยเรียบเรียงขึ้นมาประกอบ เพราะการค้นคว้าจากแหล่งข้อมูลเริ่มต้น จะได้ข้อมูลหรือบทนิยามที่เขียนเป็นสากลมากกว่าข้อมูลที่บรรยายด้วยถ้อยภาษา จนบางครั้งผู้เรียบเรียงรู้ได้ทันทีว่าหนังสือที่พิมพ์เผยแพร่แล้วใช้หนังสือเล่มใดประกอบ พร้อมทั้ง

สามารถบอกหน้าที่ใช้อ้างอิงได้ด้วย การอ่านมาก ศึกษามาก ทำให้แตกฉาน จนกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่วิชาที่ยากเลย

ผู้เรียบเรียงรู้สึกดีใจและรู้สึกภูมิใจที่อย่างน้อยได้มีส่วนช่วยชาติ ช่วยแผ่นดินเกิดเพิ่มหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาไทยอีก 1 เล่ม แม้ว่าหลาย ๆ ครั้งจะรู้สึกเหนื่อย รู้สึกกลัว กว่าที่จะเขียนเสร็จแต่ละบรรทัด กว่าที่จะพิมพ์เสร็จแต่ละหน้า กว่าหนังสือจะแล้วเสร็จแต่ละเล่มต้องใช้สมาธิ ความเพียร ความพยายาม ความอดสาหัสอย่างมาก ไม่ว่าในด้านการเรียบเรียง การค้นคว้า การพิมพ์ การพิสูจน์อักษร และอื่น ๆ (หนังสือเล่มนี้ใช้เวลาในการพิมพ์ถึง 2 ปี เต็ม ๆ) แต่กระนั้นก็มีผลงานที่เผยแพร่ทั่วประเทศแล้วมากมาย อาทิ

1. คณิตศาสตร์พื้นฐาน
2. แคลคูลัสพื้นฐาน
3. สมการเชิงอนุพันธ์
4. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ I
5. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ II
6. ทอพอโลยี
7. พีชคณิตนามธรรม
8. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (กำลังเขียน)

ผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณผู้เขียนหนังสือทุกเล่มที่ได้ถูกนำมาใช้อ้างอิง ค้นคว้าประกอบการเขียนหนังสือเล่มนี้ ดังปรากฏไว้ในบรรณานุกรมท้ายเล่ม

เลิศ สิทธิโกศล

เมษายน 2542

# สารบัญ

บทที่ 1	เรขาคณิตวิเคราะห์	1
1.1	วงกลม	2
	แบบฝึกหัด 1.1	10
	เฉลยแบบฝึกหัด 1.1	12
1.2	พาราโบลา	13
	แบบฝึกหัด 1.2	26
	เฉลยแบบฝึกหัด 1.2	27
1.3	วงรี	28
	แบบฝึกหัด 1.3	43
	เฉลยแบบฝึกหัด 1.3	45
1.4	ไฮเพอร์โบลา	46
	แบบฝึกหัด 1.4	60
	เฉลยแบบฝึกหัด 1.4	62
1.5	พิกัดเชิงขั้ว	63
	แบบฝึกหัด 1.5	70
	เฉลยแบบฝึกหัด 1.5	72
1.6	สมการอิงตัวแปรเสริม	75
	แบบฝึกหัด 1.6	78
บทที่ 2	การอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์	82
2.1	ผลบวกบนและผลบวกล่าง	85
2.2	อินทิกรัลจำกัดเขตหรือปริพันธ์จำกัดเขต	91
	สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต	99

	แบบฝึกหัด 2.1	102
	เฉลยแบบฝึกหัด 2.1	104
2.3	อินทิกรัลไม่จำกัดเขตหรือปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	105
	สมบัติปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	106
	แบบฝึกหัด 2.2	108
	เฉลยแบบฝึกหัด 2.2	109
2.4	ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสเชิงปริพันธ์	110
	แบบฝึกหัด 2.3	118
	เฉลยแบบฝึกหัด 2.3	120
2.5	การเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์	121
	แบบฝึกหัด 2.4	125
	เฉลยแบบฝึกหัด 2.4	126
<b>บทที่ 3</b>	<b>การพิสูจน์สูตร</b>	<b>127</b>
3.1	สูตรพื้นฐานของการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์	127
3.2	การพิสูจน์สูตรและตัวอย่าง	130
	แบบฝึกหัด 3.1	149
	เฉลยแบบฝึกหัด 3.1	153
<b>บทที่ 4</b>	<b>การอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก</b>	<b>157</b>
	แบบฝึกหัดบทที่ 4	163
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 4	165
<b>บทที่ 5</b>	<b>เทคนิคการอินทิเกรตหรือเทคนิคการหาปริพันธ์</b>	<b>166</b>
5.1	การเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์	166
	แบบฝึกหัด 5.1	177
	เฉลยแบบฝึกหัด 5.1	179
5.2	การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน	180
	แบบฝึกหัด 5.2	186
	เฉลยแบบฝึกหัด 5.2	188

5.3	การหาปริพันธ์ฟังก์ชันกำลังสอง	190
	แบบฝึกหัด 5.3	195
	เฉลยแบบฝึกหัด 5.3	196
5.4	การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรรกยะ	197
	แบบฝึกหัด 5.4	208
	เฉลยแบบฝึกหัด 5.4	209
5.5	การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	210
	แบบฝึกหัด 5.5	226
	เฉลยแบบฝึกหัด 5.5	228
5.6	การหาปริพันธ์ในรูปแบบอื่น ๆ	230
	แบบฝึกหัด 5.6	234
	เฉลยแบบฝึกหัด 5.6	235
<b>บทที่ 6</b>	<b>อินทิกรัลไม่ตรงแบบหรือปริพันธ์ไม่ตรงแบบ</b>	<b>236</b>
6.1	ปริพันธ์มีจุดที่ไม่ต่อเนื่อง	236
6.2	ขีดจำกัดอนันต์ของการหาปริพันธ์	240
	แบบฝึกหัด 6.1	243
	เฉลยแบบฝึกหัด 6.1	244
6.3	รูปแบบยังไม่กำหนด	245
	แบบฝึกหัด 6.2	257
	เฉลยแบบฝึกหัด 6.2	259
<b>บทที่ 7</b>	<b>การประยุกต์ของอินทิกรัลหรือปริพันธ์</b>	<b>260</b>
7.1	พื้นที่	260
	แบบฝึกหัด 7.1	273
	เฉลยแบบฝึกหัด 7.1	275
7.2	ปริมาตร	276
	แบบฝึกหัด 7.2	288
	เฉลยแบบฝึกหัด 7.2	290

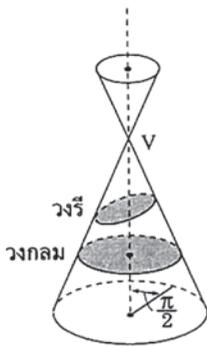
7.3 ความยาวของเส้นโค้ง_____	291
แบบฝึกหัด 7.3_____	295
เฉลยแบบฝึกหัด 7.3_____	297

**บทที่ 8 ลำดับ \_\_\_\_\_ 298**

8.1 ลำดับ_____	298
แบบฝึกหัด 8.1_____	300
เฉลยแบบฝึกหัด 8.1_____	301
8.2 ลิมิตของลำดับ_____	302
8.3 ลำดับลู่ออกและลำดับลู่ออก_____	304
แบบฝึกหัด 8.2_____	306
8.4 ลำดับที่มีขอบเขต_____	307
8.5 ลำดับทางเดียว_____	311
แบบฝึกหัด 8.3_____	315
เฉลยแบบฝึกหัด 8.3_____	316
8.6 พีชคณิตของลิมิต_____	317
แบบฝึกหัด 8.4_____	323
เฉลยแบบฝึกหัด 8.4_____	325
8.7 อนุกรม_____	326
แบบฝึกหัด 8.5_____	330
เฉลยแบบฝึกหัด 8.5_____	331
แบบฝึกหัด 8.6_____	335
เฉลยแบบฝึกหัด 8.6_____	336
8.8 อนุกรมที่มีพจน์ที่ไม่เป็นลบ_____	337
แบบฝึกหัด 8.7_____	345
เฉลยแบบฝึกหัด 8.7_____	348
8.9 อนุกรมสลับ_____	349
แบบฝึกหัด 8.8_____	354
เฉลยแบบฝึกหัด 8.8_____	355

8.10	อนุกรมเชิงกำลัง	356
	แบบฝึกหัด 8.9	360
	เฉลยแบบฝึกหัด 8.9	361
8.11	อนุกรมของเทย์เลอร์	362
	แบบฝึกหัด 8.10	365
	เฉลยแบบฝึกหัด 8.10	366
รวมสูตรแคลคูลัส		367
	สูตรการหาอนุพันธ์ให้ $a, c$ เป็นค่าคงตัว	367
	สูตรการหาปริพันธ์ (การอินทิเกรต)	369
	รูปแบบเชิงตรรกยะ	369
	รูปแบบเกี่ยวข้องกับ $\sqrt{a + bu}$	370
	รูปแบบเกี่ยวข้องกับ $\sqrt{u^2 \pm a^2}$	371
	รูปแบบเกี่ยวข้องกับ $\sqrt{a^2 - u^2}$	371
	รูปแบบเกี่ยวข้องกับ $\sqrt{2au - u^2}$	372
	รูปแบบฟังก์ชันตรีโกณมิติ	373
	รูปแบบฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	374
	รูปแบบเลขชี้กำลังและลอการิทึม	374
	รูปแบบฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	375
บรรณานุกรม		377
ดรรชนี		381

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา เส้นโค้งเหล่านี้เราเรียกว่า ภาคตัดกรวย (conic section) เพราะเส้นโค้งเหล่านี้เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงคู่ (double right circular cone) ด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ กันดังรูปที่ 1.1.1 ถึงรูปที่ 1.1.3



รูปที่ 1.1.1



รูปที่ 1.1.2



รูปที่ 1.1.3

เรียกสมการ  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  เมื่อค่าคงตัว  $A, B, C$  อย่างน้อยหนึ่งตัวต้องไม่เป็นศูนย์ว่า สมการระดับชั้นที่สอง (second-degree equations) ซึ่งสมการเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการของวงกลม สมการของพาราโบลา หรือสมการอื่น ๆ ได้ โดยกำหนดเงื่อนไขของค่าคงตัว

1. ถ้า  $B = 0$  จะได้สมการ

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{.....(1)}$$

และเมื่อค่าคงตัว  $A, C$  อย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เป็นศูนย์แล้ว

- (1) ถ้า  $A$  และ  $C$  มีเครื่องหมายเหมือนกัน (same sign) จะได้กราฟของสมการ (1) เป็นวงรี ( $A \neq C$ ) วงกลม ( $A = C$ ) หรือไม่มีกราฟ
- (2) ถ้า  $A$  และ  $C$  มีเครื่องหมายตรงกันข้าม จะได้กราฟของสมการ (1) เป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงสองเส้นตัดกัน
- (3) ถ้า  $A$  และ  $C$  เป็น 0 หนึ่งตัวจะได้กราฟของสมการ (1) เป็นพาราโบลา เส้นตรงสองเส้นตัดกัน เส้นตรงหนึ่งเส้นหรือไม่มีกราฟ

2. ถ้า  $B \neq 0$  ให้ผู้เรียนพิจารณาเอง โดยเมื่อได้ศึกษาจนจบเนื้อหาในบทนี้แล้วให้วกกลับมาพิจารณากรณีนี้อีกครั้งหนึ่ง

### 1.1 วงกลม

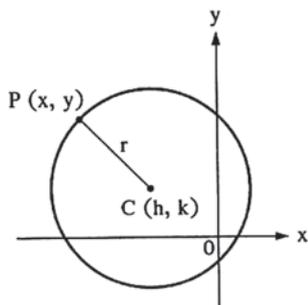
**บทนิยาม 1.1.1** วงกลม (Circle) คือเซตของจุดบนระนาบซึ่งมีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

จุดคงที่เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม เขียนแทนด้วย  $C$  ระยะทางที่เท่ากันเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม เขียนแทนด้วย  $r$

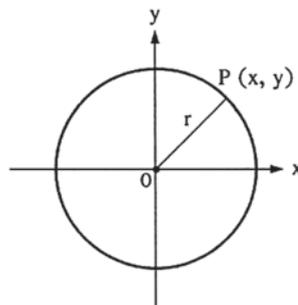
**ทฤษฎีบท 1.1.1** รูปมาตรฐานสำหรับวงกลม (standard form for a circle) สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $C(h, k)$  และรัศมี  $r > 0$  คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

## พิสูจน์



รูปที่ 1.1.4



รูปที่ 1.1.5

ให้  $P(x, y)$  เป็นจุดใด ๆ อยู่บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $C(h, k)$  และรัศมี  $r$  ดังรูปที่ 1.1.4

จากทฤษฎีบท 1.1.1 จะได้  $|CP| = r$

เนื่องจาก  $|CP| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

ดังนั้น  $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \text{.....(2)}$$

ถ้าจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด  $(0, 0)$  และรัศมี  $r$  แล้วสมการวงกลมจะเขียนอยู่ในรูปที่ 1.1.5

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{.....(3)}$$

เมื่อกระจายสมการ (2) และจัดรูปใหม่จะได้

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \quad \text{.....(4)}$$

เมื่อ  $D', E', F'$  เป็นค่าคงตัว (constant)

คูณด้วยค่าคงตัว  $A$  ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์จะได้

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{.....(5)}$$