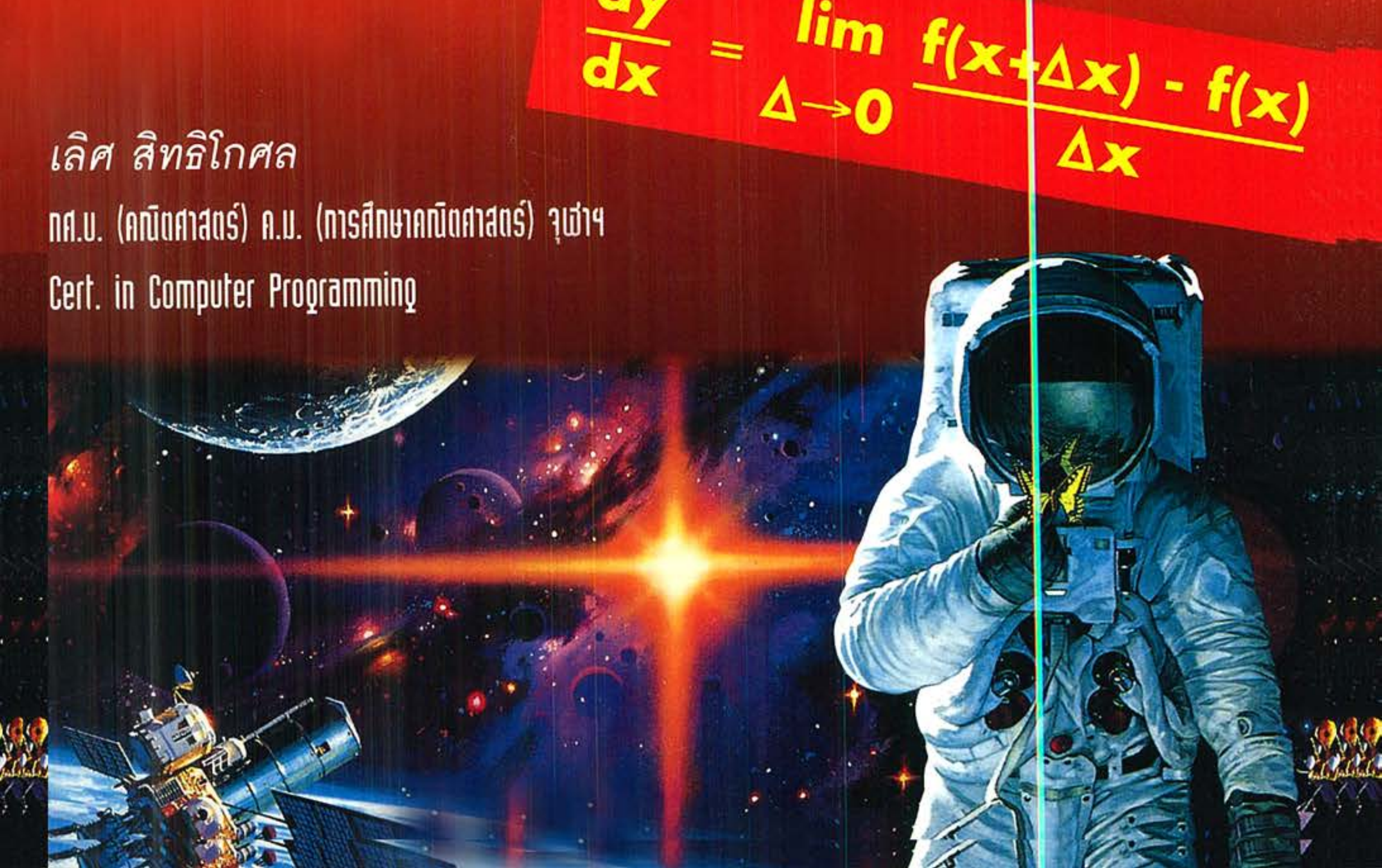
ชื่อหนังสือ เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I
บาร์โค้ด 9789748515083
ISBN 974-8515-08-7

# เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I

## ANALYTIC GEOMETRY AND CALCULUS I

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

*เลิศ สิทธิโกศล*
กศ.บ. (คณิตศาสตร์) ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์) จุฬาฯ
Cert. in Computer Programming



# เรขาคณิตวิเคราะห์

# และ

# แคลคูลัส I

## ANALYTIC GEOMETRY AND CALCULUS I

โดย.. เลิศ สิทธิโกศล

SKYBOOK

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
สำนักงานใหญ่
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
E-mail: skybook1992@hotmail.com

**"เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I"**

พิมพ์ครั้งที่ 1 มีนาคม 2541
พิมพ์ครั้งที่ 2 กรกฎาคม 2545
พิมพ์ครั้งที่ 3 กรกฎาคม 2549



**ราคา 150 บาท**

**ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ**

เลิศ สิทธิโกศล

เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I -- พิมพ์ครั้งที่ 3 -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2549.

314 หน้า

1. เรขาคณิตวิเคราะห์ 2. แคลคูลัส

I. ชื่อเรื่อง

516.3

ISBN: 974-8515-08-7

S7903-30-07-06

**จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย**

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
SKYBOOK COMPANY LIMITED
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105
e-mail: sales@skybook.co.th

**www.skybook.co.th**



พิมพ์ที่ บริษัท พี เอ็น เค แอนด์ สกายพริ้นติ้งส์ จำกัด
โทรศัพท์ : 0-2812-1484, 0-2812-2265

# คำนำ

## เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I

หนังสือ **เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I** เหมาะสำหรับนิสิตนักศึกษาระดับปริญญาตรีและผู้สนใจทั่วไป โดยมีเนื้อหาที่ประกอบด้วยเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ว่าด้วยเส้นตรงและวงกลม ลิมิตและความต่อเนื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัยและอนุพันธ์อันดับสูง การประยุกต์ของอนุพันธ์และการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ สำหรับรายละเอียดหัวข้อย่อยของแต่ละบทให้ดูได้ในสารบัญ

ผู้เรียบเรียงได้ใช้หนังสือศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2538 ในการอ้างอิงถึงการบัญญัติศัพท์ที่เป็นภาษาไทย แต่ก็ยังมีคำศัพท์บางคำที่ใช้จนคุ้นเคยแล้ว ผู้เรียบเรียงจะใช้คำทั้งสองโดยการเชื่อมคำเหล่านั้นด้วยคำว่า *หรือ* ก่อน แล้วจึงค่อยตัดออกให้เหลือเฉพาะคำศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะการค่อย ๆ เปลี่ยนทีละเล็กละน้อยจะทำให้คนทั้งสองกลุ่มค่อย ๆ ปรับเข้าหากันได้ อาทิคำว่า *integration* ซึ่งคำนี้เราใช้ (คุ้นเคย) ว่า *การอินทิเกรต* แต่ในศัพท์ฉบับราชบัณฑิตยสถานใช้ *การหาปริพันธ์* ดังนั้นผู้เรียบเรียงจะใช้คำว่าการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์ (integration) แล้วจึงค่อย ๆ ตัดคำว่าการอินทิเกรตออกจนเหลือเพียงคำว่า การหาปริพันธ์ สำหรับคำอื่น ๆ จะยกตัวอย่างพอเป็นที่สังเขปเช่น อินทิเกรตหรือหาปริพันธ์ (integrate) อินทิกรัลหรือปริพันธ์ (integral) ตัวถูกอินทิเกรตหรือปริพัทธ์ (integrand) เป็นต้น ถ้าศึกษาให้ลึก ๆ จะพบว่ามีคำอีกหลายคำที่ไม่ได้บัญญัติไว้ การเขียนทับศัพท์ในคำบางคำก็มีประโยชน์มากเพราะคำเหล่านั้นเป็นคำสากลที่ทุกชาติทุกภาษาเข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องแปลอีกแล้ว

ผู้เรียบเรียงเป็นผู้หนึ่งที่เรียบเรียงหนังสือคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมากและพิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้ว โดยจะเน้นศึกษาค้นคว้าจากหนังสือที่เป็นแหล่งข้อมูลเริ่มต้นหรือต้นฉบับ กล่าวคือจะศึกษาหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษล้วน ๆ แล้วใช้หนังสือที่คนไทยเรียบเรียงขึ้นมาประกอบเพราะการค้นคว้าจากแหล่งข้อมูลเริ่มต้น จะได้ข้อมูลหรือบทนิยามที่เขียนเป็นสากลมากกว่าข้อมูลที่บรรยายด้วยถ้อยภาษา จนบางครั้งผู้เรียบเรียงรู้ได้ทันทีว่าหนังสือที่พิมพ์เผยแพร่แล้วใช้หนังสือเล่มใดประกอบ พร้อมทั้งสามารถบอกหน้าที่ใช้อ้างอิงได้ด้วย การอ่านมาก ศึกษามาก ทำให้แตกฉาน จนกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่วิชาที่ยากเลย

ผู้เรียบเรียงรู้สึกดีใจและรู้สึกภูมิใจที่อย่างน้อยได้มีส่วนช่วยชาติ ช่วยแผ่นดินเกิดเพิ่มหนังสือคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาไทยอีก 1 เล่ม แม้ว่าหลาย ๆ ครั้งจะรู้สึกเหนื่อย รู้สึกล้า กว่าจะเขียนเสร็จแต่ละหน้า กว่าจะพิมพ์เสร็จแต่ละหน้า กว่าหนังสือจะแล้วเสร็จแต่ละเล่ม ต้องใช้สมาธิ ความเพียร ความพยายาม ความอุตสาหะอย่างมาก ไม่ว่าในด้านการเรียบเรียง การค้นคว้า การพิมพ์ การพิสูจน์อักษร และอื่น ๆ (หนังสือเล่มนี้ใช้เวลาในการพิมพ์ถึง 2 ปีเต็ม ๆ) แต่กระนั้นก็มีผลงานที่เผยแพร่ทั่วประเทศแล้วมากมาย อาทิ

1. คณิตศาสตร์พื้นฐาน
2. แคลคูลัสพื้นฐาน
3. สมการเชิงอนุพันธ์
4. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1
5. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2
6. ทอพอโลยี
7. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (กำลังเขียน)

ผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณผู้เขียนหนังสือทุกเล่มที่ได้ถูกนำมาใช้อ้างอิง ค้นคว้าประกอบการเขียนหนังสือเล่มนี้ ดังปรากฏไว้ในบรรณานุกรมท้ายเล่ม

**เลิศ สิทธิโกศล**

มีนาคม 2541

# สารบัญ

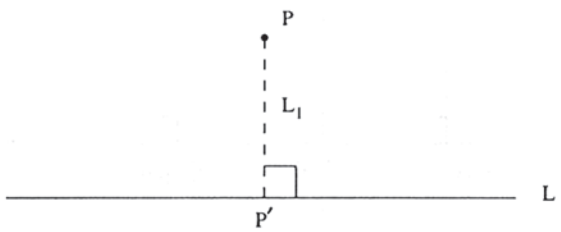
## เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส I

# 1 เรขาคณิตวิเคราะห์

ในบทนี้จะกล่าวถึงเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ว่าด้วยเส้นตรงและวงกลมเท่านั้น โดยจะไม่กล่าวถึงพาราโบลา วงรี ไฮเพอร์โบลา และอื่นๆ ซึ่งเนื้อหาเหล่านั้นอยู่ในขอบเขตของ "เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส II" โดยผู้เรียบเรียงได้มอบให้สำนักพิมพ์เดียวกันนี้พิมพ์เผยแพร่ทั่วประเทศแล้ว เนื้อหาของบทนี้เป็นเรื่องเกี่ยวกับการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างพีชคณิตกับเรขาคณิตเข้าด้วยกัน

## 1.1 โพรเจกชันหรือภาพฉาย (Projection)

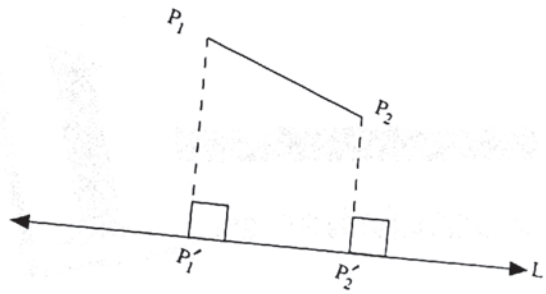
ให้ P เป็นจุด และ L เป็นเส้นตรง $P'$ เป็นโพรเจกชัน (projection) ของจุด P บนเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อ $P'$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง $L_1$ ที่ลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L ดังรูป 1.1.1




*รูป 1.1.1*

ดังนั้น โพรเจกชันของจุด (5, 1) บนแกน x คือจุด (5, 0)
โพรเจกชันของจุด (10, 2) บนแกน x คือจุด (10, 0)
โพรเจกชันของจุด (5, 3) บนแกน y คือจุด (0, 3)

ให้ $\overline{P_1P_2}$ เป็นส่วนของเส้นตรง และ L เป็นเส้นตรง โพรเจกชันของส่วนของเส้นตรง $P_1P_2$ บนเส้นตรง L คือส่วนของเส้นตรง $P_1'P_2'$ โดยที่ $P_1'$ เป็นโพรเจกชันของจุด $P_1$ บนเส้นตรง L และ $P_2'$ เป็นโพรเจกชันของจุด $P_2$ บนเส้นตรง L ดังรูป 1.1.2

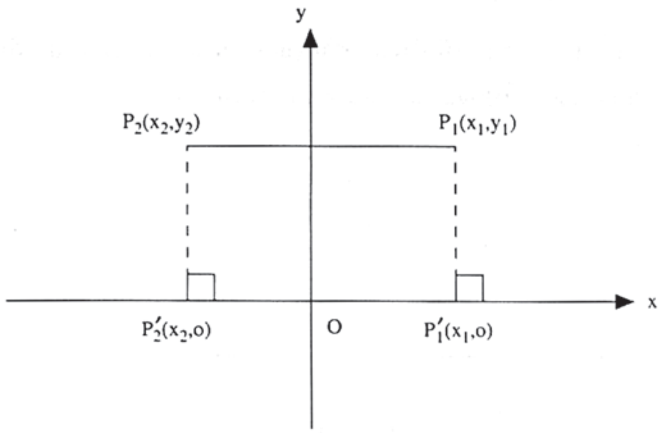



*รูป 1.1.2*

ดังนั้น โพรเจกชันของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด (0, 5) กับจุด (4, 5) บนแกน x คือส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด (0, 0) กับ (4, 0)

## 1.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด (Distance Between Two Points)

ในระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinates) โดยมีแกน x เป็นแกนนอน และแกน y เป็นแกนตั้ง จุด 0 เป็นจุดกำเนิด (origin) ถ้าให้จุด $P_1(x_1\ ,\ y_1)$ และ $P_2(x_2\ ,\ y_2)$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน x โดยที่ $y_1 = y_2$ จะได้ $P_1'\ (x_1\ ,\ 0)$ และ $P_2'\ (x_2\ ,\ 0)$ เป็นโพรเจกชันของ $P_1(x_1\ ,\ y_1)$ และ $P_2(x_2\ ,\ y_2)$ บนแกน x ดังรูป 1.2.1



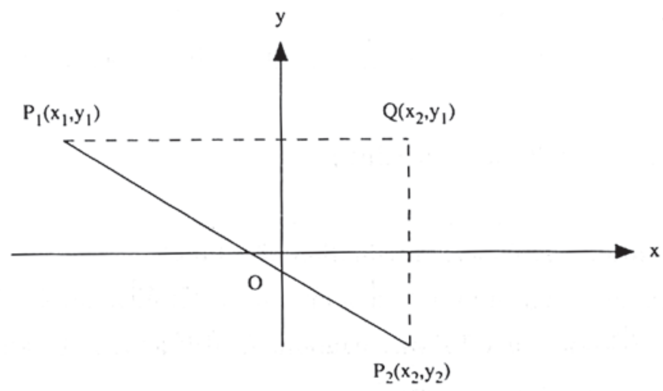

*รูป 1.2.1*

เนื่องจากส่วนของเส้นตรง $P_1P_2$ และส่วนของเส้นตรง $P_1'P_2'$ เป็นด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $P_1$ และ $P_2$ เท่ากับระยะทางระหว่างจุด $P_1'$ และ $P_2'$ (ระยะทางระหว่างจุด $P_1$ และ $P_2$ เขียนแทนด้วย $|P_1P_2|$ )

นั่นคือ $|P_1P_2| = |P_1'P_2'| = |x_1-x_2|$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าจุด $P_1(x_1\ ,\ y_1)$ และ $P_2(x_2\ ,\ y_2)$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน y โดยที่ $x_1 = x_2$ จะได้ $|P_1P_2| = |P_1'P_2'| = |y_1-y_2|$

ในกรณีที่จุด $P_1(x_1 , y_1)$ และ $P_2(x_2 , y_2)$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน x และไม่ขนานกับแกน y เราสามารถหาระยะทางระหว่างจุด $P_1$ และ $P_2$ ได้ดังนี้




*รูป 1.2.2*

ลากส่วนของเส้นตรง $\overline{P_1Q}$ และ $\overline{P_2Q}$ ให้ขนานกับแกน x และแกน y ตามลำดับ จุด Q จะมีพิกัดเป็น $(x_2 , y_1)$ และมุม $P_1\hat{Q}Q_2$ เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส จะได้ว่า

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1Q|^2 + |P_2Q|^2}$$

$$= \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \qquad \text{เนื่องจาก } |a|^2 = a^2$$

**ทฤษฎีบท 1.2.1** ถ้า $P_1(x_1 , y_1)$ และ $P_2(x_2 , y_2)$ เป็นจุดในระนาบ ระยะทางระหว่างจุด $P_1$ และ $P_2$ เท่ากับ $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

**ตัวอย่าง 1.2.1** จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(7, 3)$ และ $P_2(4, -1)$

<u>*วิธีทำ*</u>

$$|P_1P_2| = \sqrt{(7-4)^2 + (3-(-1))^2} \text{ หน่วย}$$

$$= \sqrt{9+16} \text{ หน่วย}$$

$$= 5 \text{ หน่วย}$$

**ตัวอย่าง 1.2.2** จงแสดงว่าจุด A(3, 8), B(-11, 3), C(-8, -2) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (an isosceles triangle)

<u>*วิธีทำ*</u>

$$|AB| = \sqrt{(3+11)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{221}$$

$$|BC| = \sqrt{(-11+8)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}$$

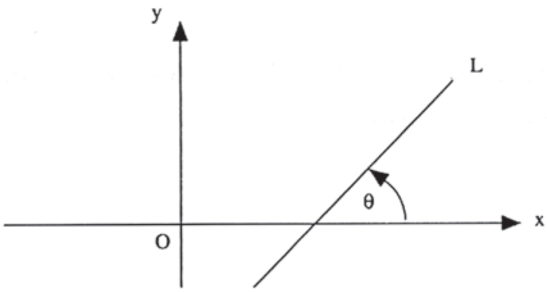
$$|AC| = \sqrt{(3+8)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{221}$$

เพราะว่า $|AB| = |AC|$ ดังนั้นจุด A, B, C เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

## 1.3 ความชันของเส้นตรง (Slope of a Line)

**บทนิยาม 1.3.1 มุมเอียงของเส้นตรง (Inclination of a Line)**

มุมเอียง (inclination) ของเส้นตรง L ซึ่งตัดกับแกน x (ในที่นี้จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\theta$ อ่านว่า ทีตา (theta)) คือมุมที่วัดจากแกน x ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปยังเส้นตรง L โดยที่ $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ เส้นตรงที่ขนานกับแกน x ทุกเส้นมีมุมเอียงเท่ากับ $0^\circ$




รูป 1.3.1 มีมุม $\theta$ เป็นมุมเอียงของเส้นตรง L

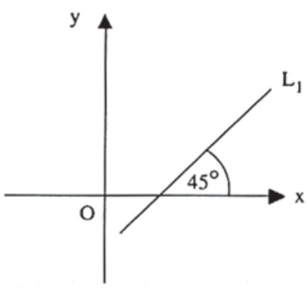
*รูป 1.3.1*

**บทนิยาม 1.3.2 ความชันของเส้นตรง (Slope of a Line)**

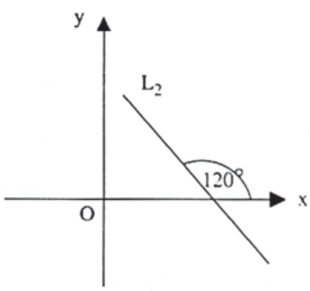
ความชันของเส้นตรง L (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ m) คือค่าแทนเจนต์ของมุมเอียง (the tangent of the inclination) ของเส้นตรง L

นั่นคือ ความชันของ L = m = $\tan \theta$

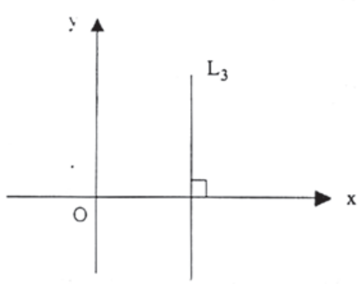
พิจารณารูปต่อไปนี้




*รูป 1.3.2*




*รูป 1.3.3*




*รูป 1.3.4*

จากรูป 1.3.2 ความชันของ $L_1$ = tan 45° = 1

จากรูป 1.3.3 ความชันของ $L_2$ = tan 120° = $-\sqrt{3}$

จากรูป 1.3.4 ความชันของ $L_3$ = tan 90° หาค่าไม่ได้

ให้สังเกตว่า ถ้า $0° < \theta < 90°$ จะได้ $\tan\theta > 0$ ดังนั้นความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นบวก ถ้า $90 < \theta < 180°$ จะได้ $\tan\theta < 0$ ดังนั้น ความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นลบ และถ้า $\theta = 90°$ แล้ว เราไม่สามารถหาความชันของเส้นตรงได้

ไม่จำเป็นเสมอไปว่าถ้าเราทราบมุมเอียงของเส้นตรงแล้วเราจะหาค่าความชันของเส้นตรงได้ ในกรณีที่เราทราบจุดเพียงสองจุดที่เส้นตรงผ่านเราก็สามารถหาค่าความชันของเส้นตรงเส้นนั้นได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1.3.1 สูตรของความชัน (Slope Formula)**

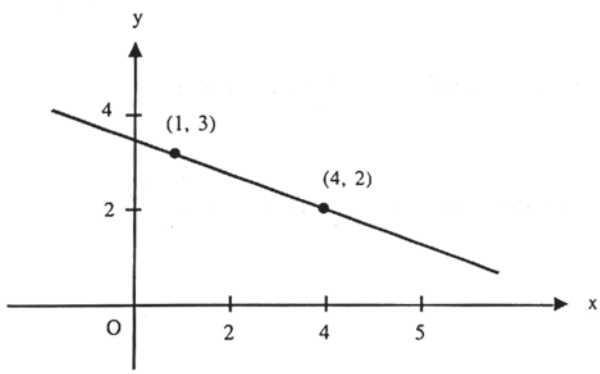
เส้นตรง L ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$ มีความชันเท่ากับ

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

**พิสูจน์** ให้เป็นแบบฝึกหัด

**ตัวอย่าง 1.3.1** จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 3) และ (4, 2)

*วิธีทำ*




*รูป 1.3.5*

ให้ $(x_1, y_1) = (1, 3)$ และ $(x_2, y_2) = (4, 2)$

$$\text{ความชัน} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{3-2}{1-4} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{หรือ ความชัน} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-3}{4-1} = -\frac{1}{3}$$