



คณิตศาสตร์

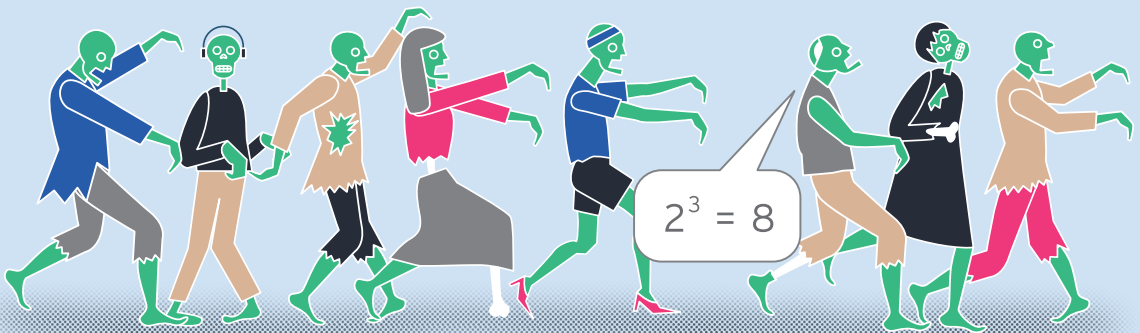
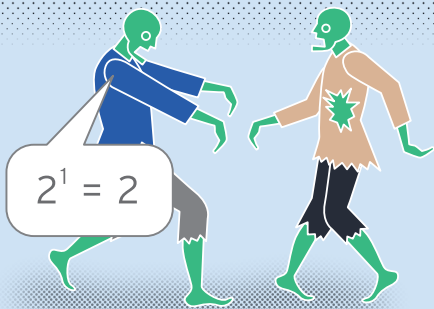
เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

๔





หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๒ พ.ศ. ๒๕๖๖

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ขึ้น โดยมีเนื้อหาเช่นเดียวกับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ ฉบับสื่อสิ่งพิมพ์ ที่จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ทุกประการ เพื่อให้นักเรียน ครู ผู้ปกครอง นักวิชาการ และผู้สนใจทั่วไป เข้าถึงได้ง่ายและสะดวก รวดเร็ว รวมทั้งสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับจุดประสงค์ต่าง ๆ ทั้งนี้ สสวท. ขอสงวนสิทธิ์ ในหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ ตามกฎหมายลิขสิทธิ์ ห้ามผู้ใดทำซ้ำ คัดลอก ดัดแปลง เลียนแบบ จำหน่าย หรือ เผยแพร่ โดยมิได้รับอนุญาต

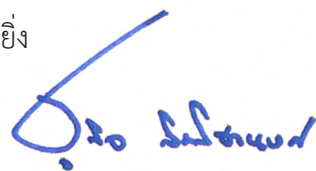
สามารถเข้าถึงสื่อดิจิทัลต่าง ๆ ของ สสวท. ได้ที่ <http://www.ipst.ac.th/ebook-resource/>

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปโรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ - ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๒ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และเรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พานิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการ อีสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชนจึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้นี้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง



(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ภาคเรียนที่ ๒

เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง

จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง กราฟของฟังก์ชัน การดำเนินการของฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เลขยกกำลัง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม การหาค่าลอการิทึม การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม สมการและอสมการลอการิทึม การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

เรขาคณิตวิเคราะห์ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณ์ญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน
๒. ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
๓. เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๔. แก่สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๕. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

รวมทั้งหมด ๕ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“

.....

.....

”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้



จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้



ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น



เสริมสมอง

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



กิจกรรม



เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์มือถือ สมาร์ทโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม



โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติม นอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้



แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ



แบบฝึกหัดท้ายบท

1.
2.
3.

บทที่ 1 จะใช้สี



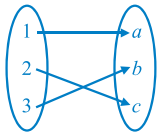
บทที่ 2 จะใช้สี



บทที่ 3 จะใช้สี



1



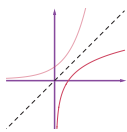
ความสัมพันธ์
และฟังก์ชัน

บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1

1.1 ความสัมพันธ์	3
1.2 ฟังก์ชัน	16
1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง	39
1.4 กราฟของฟังก์ชัน	53
1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน	67
1.6 ฟังก์ชันผกผัน	80

2



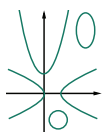
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
และฟังก์ชันลอการิทึม

บทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

99

2.1 เลขยกกำลัง	101
2.1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม	101
2.1.2 รากที่สองในระบบจำนวนจริง รากที่ n	104
ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์	
2.1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	116
2.2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	130
2.3 ฟังก์ชันลอการิทึม	149
2.4 การหาค่าลอการิทึม	159
2.5 การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม	162
2.6 สมการและอสมการลอการิทึม	166
2.7 การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	174

3



เรขาคณิตวิเคราะห์

บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์

195

3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

197

3.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

197

3.1.2 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง

206

3.1.3 ความชันของเส้นตรง

212

3.1.4 เส้นขนาน

218

3.1.5 เส้นตั้งฉาก

223

3.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

228

3.1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

239

3.2 ภาคตัดกรวย

248

3.2.1 วงกลม

251

3.2.2 วงรี

262

3.2.3 พาราโบลา

276

3.2.4 ไฮเพอร์โบลา

292

3.2.5 การเลื่อนกราฟ

308

บรรณานุกรม

334

ภาคผนวก

338

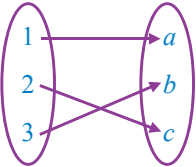
คณะผู้จัดทำ

343

บทที่

1

| ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



- 1.1 ความสัมพันธ์
- 1.2 ฟังก์ชัน
- 1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง
- 1.4 กราฟของฟังก์ชัน
- 1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน
- 1.6 ฟังก์ชันผกผัน



จุดมุ่งหมาย

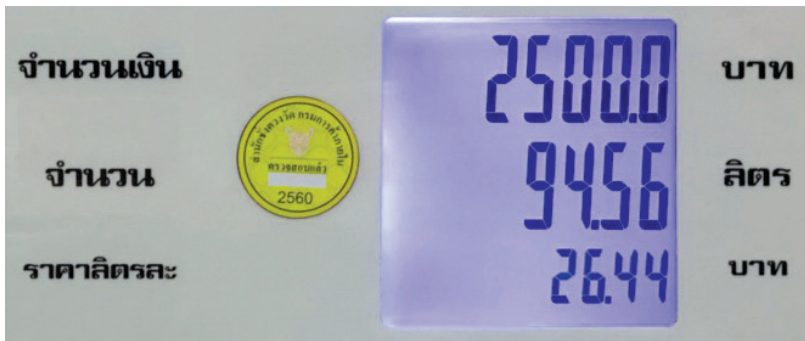
1. หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์
2. จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน
3. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน
4. ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด
5. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน
6. หาฟังก์ชันประกอบ
7. หาฟังก์ชันผกผัน
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

“

ในชีวิตจริง นักเรียนมักพบปริมาณสองปริมาณ ที่อยู่ในรูปตัวเลขหรือสัญลักษณ์อื่น ๆ ที่มีความสัมพันธ์กัน กล่าวคือ เมื่อปริมาณหนึ่งเปลี่ยนไป อีกปริมาณจะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย เช่น เมื่อสังเกตหน้าปัดบนตู้จ่ายน้ำมัน ณ สถานีบริการน้ำมันแห่งหนึ่ง จะพบว่าบนหน้าปัดมีตัวเลขบอกปริมาณ 3 ชนิด ได้แก่ จำนวนเงิน (บาท) จำนวน (ลิตร) และราคาต่อลิตร (บาท) โดยในขณะที่เติมน้ำมัน ตัวเลขบนหน้าปัดในช่องจำนวนและจำนวนเงินจะมีการเปลี่ยนแปลงเพื่อแสดงจำนวนลิตรของน้ำมันที่เติมในขณะนั้น และจำนวนเงินที่ลูกค้าจะต้องจ่ายในการเติมน้ำมัน ซึ่งได้จากผลคูณของจำนวนลิตรและราคาต่อลิตรของน้ำมันที่เติม ความสัมพันธ์ของจำนวนลิตรและจำนวนเงินดังกล่าวเป็นตัวอย่างหนึ่งของฟังก์ชัน



”



ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับสมการและกราฟในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต
- จำนวนจริง

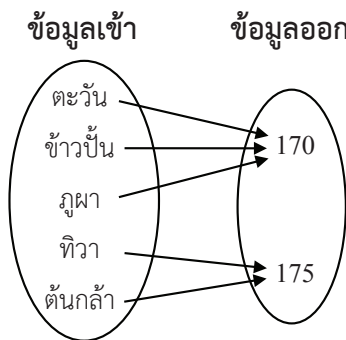


goo.gl/Hu9Stk

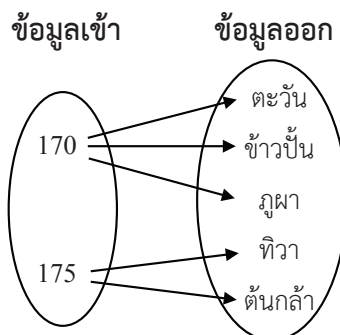
1.1 ความสัมพันธ์

ความหมายของความสัมพันธ์

เมื่อนักเรียนสอบถามความสูงของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน จากนั้นสร้างเซตของข้อมูลขึ้นมาสองเซต คือ เซตของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน และเซตของความสูงของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน จะเห็นว่าเซตของข้อมูลทั้งสองมีความเกี่ยวข้องกัน นั่นคือ เมื่อกำหนดชื่อของเพื่อน จะทราบความสูงของเพื่อนคนนั้น เช่น



ในทางกลับกันเมื่อกำหนดความสูง จะทราบว่าใครมีความสูงตามที่กำหนดบ้าง ดังนี้



ในทางคณิตศาสตร์ การจับคู่ระหว่างสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน เขียนแทนได้ด้วยคู่อันดับ โดยแต่ละคู่อันดับจะประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง เช่น คู่อันดับ (a, b) มี a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง คู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน และสมาชิกตัวหลังเท่ากัน นั่นคือ

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

เรียกเซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ a และ b มีความเกี่ยวข้องกันบางประการว่า **ความสัมพันธ์ (relation)** จากสถานการณ์ข้างต้น ความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหลังเป็นความสูงของสมาชิกตัวหน้า คือ

$$\{ (\text{ตะวัน}, 170), (\text{ข้าวปั้น}, 170), (\text{ภูผา}, 170), (\text{ทิวา}, 175), (\text{ต้นกล้า}, 175) \}$$

ในทางกลับกัน ความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหลังคือชื่อเพื่อนที่มีความสูงเป็นสมาชิกตัวหน้า คือ

$$\{ (170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูผา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า}) \}$$

บทนิยาม 1

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ (อ่านว่า เอ คูณ บี) เขียน $A \times B$ ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B \}$$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{a, b\}$ จงหา $A \times B$ และ $B \times A$

วิธีทำ $A \times B = \{ (1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b) \}$
 $B \times A = \{ (a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 5) \}$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า $A \times B \neq B \times A$

เนื่องจากความสัมพันธ์คือเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้า (จากเซต A) และสมาชิกตัวหลัง (จากเซต B) มีความเกี่ยวข้องกันบางประการ จึงอาจกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B หรือเขียนได้ว่า $r \subset A \times B$ และเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์จาก A ไป B**

บทนิยาม 2

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ถ้า $r \subset A \times A$ แล้วเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์บนเซต A**

จากบทนิยามจะเห็นว่า ความสัมพันธ์เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ สามารถเขียนแบบแจกแจงสมาชิก หรือแบบบอกเงื่อนไขก็ได้ เช่น

$$\text{ให้ } A = \{3, 5, 8, 10\} \text{ และ } B = \{2, 6, 9\}$$

$$A \times B = \{(3, 2), (3, 6), (3, 9), (5, 2), (5, 6), (5, 9), (8, 2), (8, 6), (8, 9), (10, 2), (10, 6), (10, 9)\}$$

ถ้า r_1 เป็นความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B

$$\text{จะได้ว่า } r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$$

$$\text{หรือ } r_1 = \{(3, 6), (3, 9), (5, 6), (5, 9), (8, 9)\}$$

ถ้า r_2 เป็นความสัมพันธ์ “เท่ากับ” จาก A ไป B

$$\text{จะได้ว่า } r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$$

$$\text{หรือ } r_2 = \emptyset$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตของจำนวนจริง อาจละการเขียน $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนจริง เช่น

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\} \text{ อาจเขียนเป็น } r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

หรือเขียนเฉพาะเงื่อนไขซึ่งบรรยายลักษณะของความสัมพันธ์ เช่น $x^2 + y^2 = 1$

กราฟของความสัมพันธ์

ในระบบพิกัดฉาก สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับของจำนวนจริง (x, y) กับจุดในระนาบ โดยให้ x เป็นพิกัดแรก และ y เป็นพิกัดหลัง

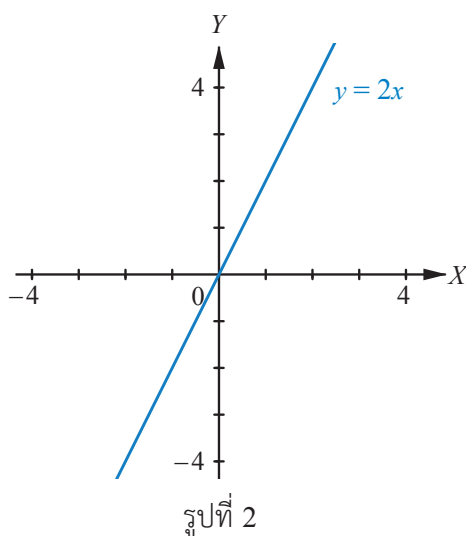
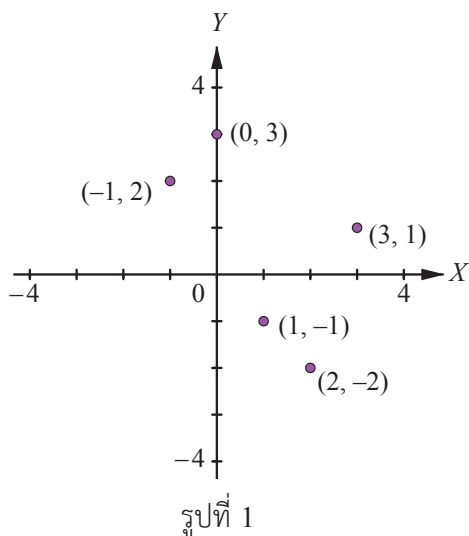
บทนิยาม 3

ให้ r เป็นสับเซตของ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบที่แสดงคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

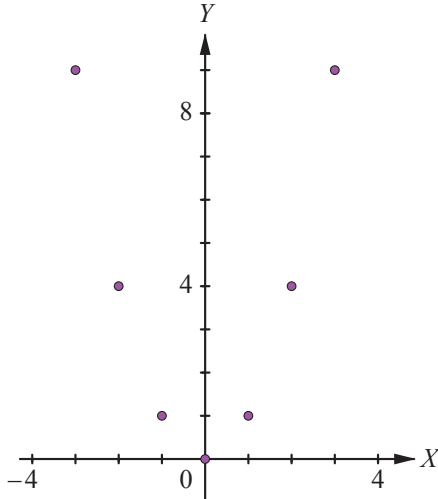
จากบทนิยามของกราฟของความสัมพันธ์ เมื่อทราบความสัมพันธ์แล้วจะเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่าง ๆ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$r_1 = \{(-1, 2), (0, 3), (1, -1), (2, -2), (3, 1)\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$$

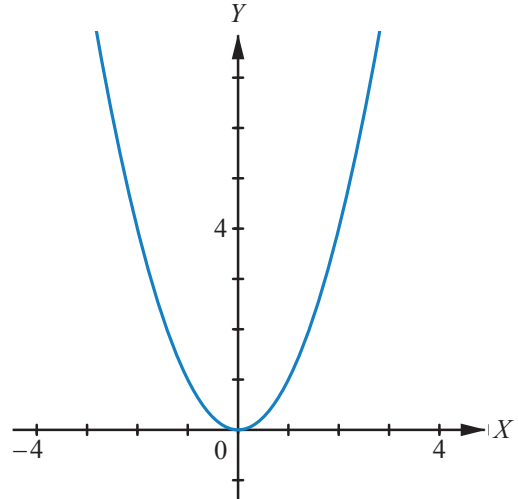


$$r_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2 \}$$



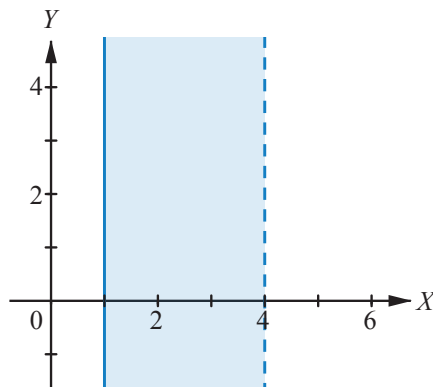
รูปที่ 3

$$r_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 \}$$



รูปที่ 4

$$r_5 = \{ (x, y) \mid 1 \leq x < 4 \}$$

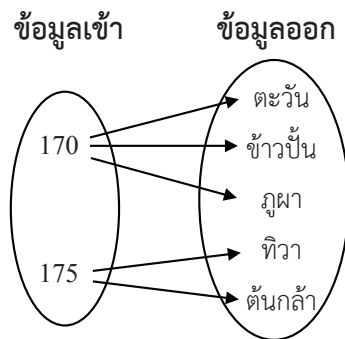


รูปที่ 5

หมายเหตุ จากรูปที่ 5 กราฟของ r_5 เป็นส่วนหนึ่งของระนาบที่แรเงาในรูป ส่วนที่เป็นเส้นทึบ แสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นนั้นรวมอยู่ในกราฟ ส่วนที่เป็นเส้นประแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นประนั้นไม่รวมอยู่ในกราฟ

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

พิจารณา



ความสัมพันธ์ r คือ $\{(170, \text{ตะขวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูเขา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า})\}$ จะเห็นว่า เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{170, 175\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **โดเมน (domain)** ของ r และเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{\text{ตะขวัน}, \text{ข้าวปั้น}, \text{ภูเขา}, \text{ทิวา}, \text{ต้นกล้า}\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **เรนจ์ (range)** ของ r

บทนิยาม 4

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r

โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r และเรนจ์ของ r เขียนแทนด้วย R_r เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

เขียน D_r และ R_r ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้

$$D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

$$R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และกำหนดให้ความสัมพันธ์ r บนเซต A คือ $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้

วิธีทำ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A หมายถึง $r \subset A \times A$

จะได้ $r = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

ดังนั้น $D_r = \{-1, 0, 1\}$

$R_r = \{0, 1\}$

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{16 - x^2}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{16 - x^2}$ จะเห็นว่า $16 - x^2$ ต้องไม่เป็นจำนวนลบ เพราะรากที่สองของจำนวนลบ ไม่เป็นจำนวนจริง

นั่นคือ $16 - x^2 \geq 0$ ซึ่งเป็นอสมการที่มีเซตคำตอบ คือ $\{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$

ดังนั้น $D_r = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\} = [-4, 4]$

เนื่องจาก $\sqrt{16 - x^2}$ ไม่เป็นจำนวนลบ และเมื่อแทน x ด้วย 0 จะได้ค่ามากที่สุดเป็น 4

ดังนั้น $R_r = \{y \mid 0 \leq y \leq 4\} = [0, 4]$

ตัวผกผันของความสัมพันธ์

พิจารณาความสัมพันธ์

$$r = \{ (170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูเขา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า}) \}$$

ถ้าสลับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับ จะได้ความสัมพันธ์

$$s = \{ (\text{ตะวัน}, 170), (\text{ข้าวปั้น}, 170), (\text{ภูเขา}, 170), (\text{ทิวา}, 175), (\text{ต้นกล้า}, 175) \}$$

โดเมนของ s คือ { ตะวัน, ข้าวปั้น, ภูเขา, ทิวา, ต้นกล้า } และเรนจ์ของ s คือ { 170, 175 } จะเห็นว่าโดเมนของ r คือ เรนจ์ของ s และเรนจ์ของ r คือ โดเมนของ s โดยที่ s ได้จากการสลับสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน r เรียก s ว่า **ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r**

บทนิยาม 5

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

เขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$r^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r \}$$

จากบทนิยาม ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A