



คณิตศาสตร์

๔

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑





หนังสือเรียน

รายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๔

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๒ พ.ศ. ๒๕๖๖

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ขึ้น โดยมีเนื้อหาเช่นเดียวกับหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ ฉบับสิ่งพิมพ์ ที่จัดทำตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ทุกประการ เพื่อให้นักเรียน ครู ผู้ปกครอง นักวิชาการ และผู้สนใจทั่วไป เข้าถึงได้ง่ายและสะดวก รวดเร็ว รวมทั้งสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับจุดประสงค์ต่าง ๆ ทั้งนี้ สสวท. ขอสงวนสิทธิ์ในหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ ตามกฎหมายลิขสิทธิ์ ห้ามผู้ใดทำซ้ำ คัดลอก ดัดแปลง เลียนแบบ จำหน่าย หรือ เผยแพร่ โดยมิได้รับอนุญาต

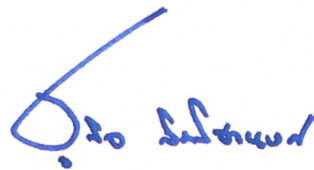
สามารถเข้าถึงสื่อดิจิทัลต่าง ๆ ของ สสวท. ได้ที่ <http://www.ipst.ac.th/ebook-resource/>

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไป โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ นี้ ประกอบด้วยเรื่อง เซต ตรรกศาสตร์เบื้องต้น หลักการนับเบื้องต้น และความน่าจะเป็น ซึ่งจัดเนื้อหาตามพัฒนาการของผู้เรียน ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน ผู้เรียนจะได้ทำกิจกรรมการเรียนรู้ การฝึกปฏิบัติ การตอบคำถาม การตรวจสอบความเข้าใจและสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ ตลอดจนมีกิจกรรมให้ผู้เรียนได้นำความรู้ที่เรียนในบทนั้น ๆ มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาอีกด้วย ในการจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้การจัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้ มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง



(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 4 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“

.....

.....

”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



จุดมุ่งหมาย



ความรู้ก่อนหน้า



เสริมสมอง



กิจกรรม



เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์มือถือ สมาร์ทโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม



โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติม นอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้



แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

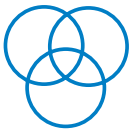
- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ



แบบฝึกหัดท้ายบท

1.
2.
3.

1



เซต

บทที่ 1 เซต

1

1.1 เซต

3

1.2 การดำเนินการระหว่างเซต

21

1.2.1 อินเตอร์เซกชัน

21

1.2.2 ยูเนียน

24

1.2.3 คอมพลีเมนต์

27

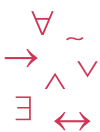
1.2.4 ผลต่างระหว่างเซต

29

1.3 การแก้ปัญหาโดยใช้เซต

38

2



ตรรกศาสตร์
เบื้องต้น

บทที่ 2 ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

53

2.1 ประพจน์

55

2.2 การเชื่อมประพจน์

57

2.2.1 นิเสธของประพจน์

59

2.2.2 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ”

60

2.2.3 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ”

63

2.2.4 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...”

65

2.2.5 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ”

67

3



หลักการนับ
เบื้องต้น

บทที่ 3 หลักการนับเบื้องต้น

77

3.1 หลักการบวกและหลักการคูณ

79

3.2 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

96

3.3 การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

103

4



ความน่าจะเป็น

บทที่ 4 ความน่าจะเป็น

110

4.1 การทดลองสุ่มและเหตุการณ์

112

4.2 ความน่าจะเป็น

120

บรรณานุกรม

143

ภาคผนวก

145

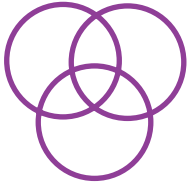
คณะผู้จัดทำ

149

บทที่

1

| เซต



- 1.1 เซต
- 1.2 การดำเนินการระหว่างเซต
 - 1.2.1 อินเตอร์เซกชัน
 - 1.2.2 ยูเนียน
 - 1.2.3 คอมพลีเมนต์
 - 1.2.4 ผลต่างระหว่างเซต
- 1.3 การแก้ปัญหาโดยใช้เซต

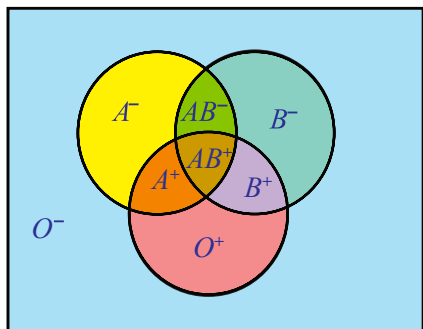
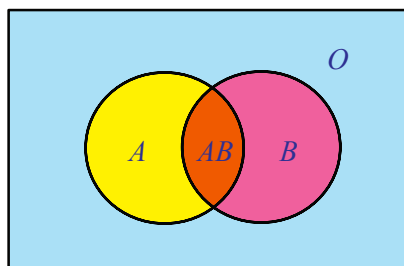


จุดมุ่งหมาย

1. ใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับเซต
2. หาผลการดำเนินการของเซต
3. ใช้แผนภาพเวนนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต
4. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเซตในการแก้ปัญหา



การจำแนกหมู่เลือดด้วยระบบ ABO จะจำแนกได้ 4 หมู่ ได้แก่ เลือดหมู่ A , B , AB และ O ตามชนิดของแอนติเจน (antigen) 2 ชนิด ซึ่งปรากฏบนผิวของเซลล์เม็ดเลือดแดง ได้แก่ แอนติเจน A และแอนติเจน B ซึ่งแต่ละคนอาจจะมีหรือไม่มีแอนติเจนชนิดใดชนิดหนึ่งก็ได้ ถ้ามีแอนติเจน A อย่างเดียว เรียกว่าเลือดหมู่ A ถ้ามีแอนติเจน B อย่างเดียว เรียกว่าเลือดหมู่ B ถ้ามีทั้งแอนติเจน A และ B เรียกว่าเลือดหมู่ AB และถ้าไม่มีทั้งแอนติเจน A และ B เรียกว่าเลือดหมู่ O สามารถเขียนแผนภาพเพื่ออธิบายหมู่เลือดทั้ง 4 หมู่ ดังกล่าว ได้ดังรูปทางด้านขวา



นอกจากนี้ยังมีการจำแนกหมู่เลือดด้วยระบบ Rh ซึ่งมีความสำคัญมาก ในการให้และรับเลือดจากผู้หนึ่งไปยังอีกผู้หนึ่ง ซึ่งพิจารณาจากแอนติเจนบนผิวของเซลล์เม็ดเลือดแดงอีกชนิดหนึ่ง เรียกว่า แอนติเจน Rh ถ้ามีแอนติเจน Rh แสดงว่ามีเลือดหมู่ Rh^+ ถ้าไม่มีแอนติเจน Rh แสดงว่ามีเลือดหมู่ Rh^- ในการบริจาคเลือดจะได้รับการตรวจหมู่เลือดทั้ง 2 ระบบ จึงอาจพบถุงบริจาคเลือดระบุเป็น

A^+ , B^+ , AB^+ , O^+ , A^- , B^- , AB^- และ O^- ซึ่งสามารถเขียนแผนภาพได้ดังรูปทางด้านซ้าย

ในชีวิตประจำวันมักพบการจัดกลุ่มสิ่งของอยู่ทั่วไป เช่น การจำแนกหมู่เลือดดังที่กล่าวข้างต้น การจัดกลุ่มของหนังสือแยกตามประเภทของหนังสือในห้องสมุด การจัดกลุ่มสิ่งของเหล่านี้ ทำให้เกิดความเป็นระเบียบ ความชัดเจน และมีความสะดวกต่อการใช้งาน





ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับจำนวนและสมการในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น



goo.gl/ZHStZ6

1.1 เซต

ในวิชาคณิตศาสตร์ ใช้คำว่า **เซต (set)** ในการกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ และเมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแล้วสามารถทราบได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่ม เช่น

เซตของชื่อวันในสัปดาห์

เซตของคำตอบของสมการ $x^2 - 4 = 0$

เรียก สิ่งที่อยู่ในเซต ว่า **สมาชิก (element or member)** เช่น

เซตของชื่อวันในสัปดาห์ มีสมาชิก ได้แก่ จันทร์ อังคาร พุธ พฤหัสบดี ศุกร์ เสาร์ และอาทิตย์

เซตของคำตอบของสมการ $x^2 - 4 = 0$ มีสมาชิก ได้แก่ -2 และ 2

การเขียนแสดงเซตอาจเขียนได้สองแบบดังนี้

1) แบบแจกแจงสมาชิก เขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในวงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 5 เขียนได้ดังนี้ $\{1, 2, 3, 4\}$

โดยทั่วไปจะแทนเซตด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C และแทนสมาชิกของเซตด้วยตัวพิมพ์เล็ก เช่น a, b, c

ตัวอย่างเช่น $A = \{a, b, c\}$ จะแทนเซต A ซึ่งมีสมาชิก 3 ตัว ได้แก่ a, b และ c

ให้ B แทนเซตของจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วได้ 16 เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$B = \{-4, 4\}$ อ่านว่า B เป็นเซตที่มี -4 และ 4 เป็นสมาชิก

ในกรณีที่สมาชิกของเซตมีจำนวนมาก การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกนั้นจะใช้จุดสามจุด (...) เพื่อแสดงว่ามีสมาชิกอื่น ๆ ซึ่งเป็นที่เข้าใจกันทั่วไปว่ามีอะไรบางอย่างอยู่ในเซตนั้น เช่น เซต $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ สัญลักษณ์ “...” แสดงว่ามี 4, 5, 6, 7 และ 8 เป็นสมาชิกของเซตนี้ด้วย

ให้ C เป็นเซตของพยัญชนะในภาษาไทย เขียนเซต C แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้

$$C = \{ก, ข, ข, \dots, ฮ\}$$

ให้ D เป็นเซตของจำนวนคู่ เขียนเซต D แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้

$$D = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก ต้องเขียนสมาชิกแต่ละตัวเพียงครั้งเดียวเท่านั้น เช่น

ให้ E เป็นเซตของเลขโดดที่ปรากฏในจำนวน 121 เขียนเซต E แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้

$$E = \{1, 2\}$$

2) แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก ใช้ตัวแปรแทนสมาชิกแล้วบรรยายสมบัติหรือเงื่อนไข เช่น

$$F = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับที่มีหลักเดียว}\}$$

อ่านว่า F เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิก x โดยที่ x เป็นจำนวนนับที่มีหลักเดียว

เครื่องหมาย “ $\mid$ ” แทนคำว่า “โดยที่” ซึ่งอาจจะใช้ “ $:$ ” แทน

ส่วนเซต B และ C ในตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว สามารถนำมาเขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยเขียนได้เป็น

$$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x^2 = 16\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ เป็นพยัญชนะในภาษาไทย}\}$$

กำหนดให้ $G = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ จะเห็นว่า 2 และ $\frac{1}{2}$ ต่างก็เป็นสมาชิกของเซต G

คำว่า “เป็นสมาชิกของ” หรือ “อยู่ใน” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “ $\in$ ” เช่น

2 เป็นสมาชิกของเซต G หรือ 2 อยู่ในเซต G เขียนแทนด้วย $2 \in G$

คำว่า “ไม่เป็นสมาชิกของ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “ $\notin$ ” เช่น

$\frac{1}{3}$ ไม่เป็นสมาชิกของเซต G หรือ $\frac{1}{3}$ ไม่อยู่ในเซต G เขียนแทนด้วย $\frac{1}{3} \notin G$

ตัวอย่างที่ 1

ให้ $A = \{0, 1, 2\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

- 1) $0 \in A$
- 2) $\{0\} \in A$
- 3) $\{1, 2\} \notin A$

วิธีทำ A เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิก 3 ตัว ได้แก่ 0, 1 และ 2 ดังนั้น

- 1) เป็นจริง
- 2) เป็นเท็จ
- 3) เป็นจริง

เรียกเซตที่ไม่มีสมาชิก ว่า **เซตว่าง (empty set or null set)**

เขียนแทน เซตว่าง ด้วยสัญลักษณ์ “ $\{ \}$ ” หรือ “ $\emptyset$ ” เช่น

ให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง และ } x + 1 = x\}$ จะได้ $A = \emptyset$

การหาจำนวนสมาชิกของเซตที่มีสมาชิกไม่มากนัก สามารถทำได้โดยการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก แล้วแจกนับจำนวนสมาชิกทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 2

จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

- 1) $\emptyset$
- 2) $A = \{x \mid x \text{ เป็นพยัญชนะในภาษาไทย}\}$
- 3) $B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่บวกที่มีสองหลัก}\}$

วิธีทำ 1) เนื่องจากเซตว่างไม่มีสมาชิก จะได้ว่าเซตว่างมีสมาชิก 0 ตัว

2) เขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก ดังนี้

$$A = \{ก, ข, ช, \dots, ฮ\}$$

จะได้ว่า A มีจำนวนสมาชิก 44 ตัว

3) เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิก ดังนี้

$$B = \{11, 13, 15, \dots, 99\}$$

จากการแจกแจงสมาชิกในเซต B จะได้ว่า B มีจำนวนสมาชิก 45 ตัว

เซตจำกัดและเซตอนันต์

เซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ หรือศูนย์ เรียกว่า **เซตจำกัด (finite set)** ตัวอย่างของเซตจำกัด เช่น

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, \dots, 20\} \\ &\{x \mid x \text{ เป็นชื่อจังหวัดในประเทศไทย}\} \\ &\{\} \end{aligned}$$

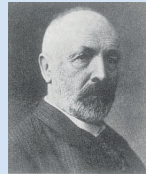
เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เรียกว่า **เซตอนันต์ (infinite set)**

ตัวอย่างของเซตอนันต์ เช่น

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, \dots\} \\ &\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\} \\ &\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\} \end{aligned}$$



เสริมสมอง : Georg Cantor



Georg Cantor (ค.ศ. 1845–1918)

นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ผู้ได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาของทฤษฎีเซต (set theory) เป็นคนแรกที่ศึกษาเซตอนันต์ โดยจัดจำแนกเซตอนันต์ออกเป็นเซตนับได้ (countable set) และเซตนับไม่ได้ (uncountable set) รวมทั้งพิสูจน์ว่าเซตของจำนวนจริงเป็นเซตนับไม่ได้

เอกภพสัมพัทธ์

ในการเขียนเซตจะต้องกำหนดเซตที่บ่งบอกถึงขอบเขตของสิ่งที่จะพิจารณา เรียกเซตนี้ว่า **เอกภพสัมพัทธ์ (relative universe)** ซึ่งมักเขียนแทนด้วย U โดยมีข้อตกลงว่า เมื่อกล่าวถึงสมาชิกของเซตใด ๆ จะไม่กล่าวถึงสิ่งอื่นที่นอกเหนือจากสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์

กำหนดให้ U คือ เซตของจำนวนจริง

$$A = \{x \mid x^2 = 4\}$$

และ $B = \{x \mid x^3 = -1\}$

จะได้ $A = \{-2, 2\}$ และ $B = \{-1\}$

แต่ถ้ากำหนดให้ U คือ เซตของจำนวนเต็มบวก

จะได้ $A = \{2\}$ และ $B = \emptyset$

เอกภพสัมพัทธ์ที่พบบ่อย ได้แก่

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

- $\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ
 $\mathbb{Q}'$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
 $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

บางครั้งเพื่อความสะดวก จะระบุเอกภพสัมพัทธ์ลงในการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข เช่น

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$$

จะได้ว่า $A = \{2\}$ แต่ $B = \{-2, 2\}$

หมายเหตุ ถ้ากล่าวถึงเซตของจำนวน ไม่ได้กำหนดว่าเซตใดเป็นเอกภพสัมพัทธ์ ในระดับชั้นนี้ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

เซตที่เท่ากัน

กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 0, 3, 2\}$ เซตทั้งสองนี้มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัวแม้ลำดับของสมาชิกจะต่างกันก็ถือว่าเซตทั้งสองคือเซตเดียวกัน หรือกล่าวได้ว่า เซต A กับ เซต B เป็นเซตที่เท่ากัน (equal sets or identical sets) หรือเซต A เท่ากับ เซต B เขียนแทนด้วย $A = B$

บทนิยาม 1

เซต A เท่ากับ เซต B หมายถึง สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และ สมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A

เซต A ไม่เท่ากับ เซต B หมายความว่า มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต B หรือมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต B ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $A \neq B$ เช่น

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ และ } B = \{1, 2\}$$

จะเห็นว่า $3 \in A$ แต่ $3 \notin B$

ดังนั้น $A \neq B$

ตัวอย่างที่ 3

จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดบ้างเท่ากันและเซตในข้อใดบ้างไม่เท่ากัน

- 1) $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{3, 2, 1\}$
- 2) $C = \{p, o, s, t\}$
 $D = \{s, t, o, p\}$
- 3) $E = \{i, d, e, a\}$
 $F = \{a, i, d\}$

- วิธีทำ**
- 1) $A = B$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A
 - 2) $C = D$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต C เป็นสมาชิกของเซต D และสมาชิกทุกตัวของเซต D เป็นสมาชิกของเซต C
 - 3) $E \neq F$ เพราะ $e \in E$ แต่ $e \notin F$

ตัวอย่างที่ 4

ให้ $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$, $B = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคี่บวก}\}$ และ $C = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
 จงพิจารณาว่าเซตใดบ้างเท่ากันและเซตใดบ้างไม่เท่ากัน

- วิธีทำ** เขียนเซต A และ B แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้
- $$A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \text{ และ } B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$
- จะได้ $A \neq B$ เพราะมีสมาชิกของเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B
 เช่น $0 \in A$ แต่ $0 \notin B$
- $B = C$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต C
 และสมาชิกทุกตัวของเซต C เป็นสมาชิกของเซต B
- และ $A \neq C$ เพราะ $A \neq B$ แต่ $B = C$

ตัวอย่างที่ 5

ให้ $S = \{2, 4, 6, \dots, 16\}$ และ $T = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า } 20\}$
จงพิจารณาว่าเซต S เท่ากับเซต T หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $18 \in T$ แต่ $18 \notin S$
ดังนั้น $S \neq T$



แบบฝึกหัด 1.1ก

- จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
 - เซตของสระในภาษาอังกฤษ
 - เซตของจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า 10
 - เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีสองหลัก
 - เซตของจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 100
 - เซตของจำนวนเต็มลบที่มีมากกว่า -100
 - $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 3 และน้อยกว่า 10}\}$
 - $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1}\}$
 - เซตของจำนวนเต็มลบที่มีค่ามากกว่า 5
 - เซตของจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วได้ 196
 - เซตของชื่อจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ “ช”
- จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
 - $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
 - $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 - $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$
 - $\{10, 20, 30, \dots\}$

3. จงบอกจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

- 1) $A = \{1234\}$
- 2) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- 3) $C = \{a, b, c, de, f, gh, ijk\}$
- 4) $D = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง } 10 \text{ และ } 20\}$
- 5) $E = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกและน้อยกว่า } 0\}$

4. ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

- 1) $\{a\} \in A$
- 2) $\{b, c\} \notin A$
- 3) $\emptyset \in A$

5. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตว่าง

- 1) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 4\}$
- 2) $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า } 3 \text{ แต่น้อยกว่า } 10\}$
- 3) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$
- 4) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$
- 5) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$

6. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตจำกัด เซตใดเป็นเซตอนันต์

- 1) $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$
- 2) $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$
- 3) $\{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{N}\}$
- 4) $\{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{N} \text{ และ } n < 999\}$
- 5) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$
- 6) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 200 \text{ และ } 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$