



หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

๓

คณิตศาสตร์

เล่ม ๒

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑





หนังสือเรียน

รายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๒ พ.ศ. ๒๕๖๖

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ขึ้น โดยมีเนื้อหาเช่นเดียวกับหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ ฉบับสิ่งพิมพ์ ที่จัดทำตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ทุกประการ เพื่อให้นักเรียน ครู ผู้ปกครอง นักวิชาการ และผู้สนใจทั่วไป เข้าถึงได้ง่ายและสะดวกรวดเร็ว รวมทั้งสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับ จุดประสงค์ต่าง ๆ ทั้งนี้ สสวท. ขอสงวนสิทธิ์ในหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ ตามกฎหมายลิขสิทธิ์ ห้ามผู้ใดทำซ้ำ คัดลอก ดัดแปลง เลียนแบบ จำหน่าย หรือ เผยแพร่ โดยมีได้รับอนุญาต

สามารถเข้าถึงสื่อดิจิทัลต่าง ๆ ของ สสวท. ได้ที่ <http://www.ipst.ac.th/ebook-resource/>

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผลและเป็นระบบ สามารถคิดวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมและสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ นี้ ประกอบด้วยบทเรียนเรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปร วงกลม พีระมิด กรวย และทรงกลม ความน่าจะเป็น และอัตราส่วนตรีโกณมิติ เนื้อหาสาระในแต่ละบทเรียน สอดคล้องครบถ้วนตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้ตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่ได้กำหนดไว้ในหลักสูตร และสะท้อนภาพความเชื่อมโยงที่คาดหวังระหว่างหลักสูตรแกนกลางกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียน ผู้สอนสามารถใช้หนังสือเรียนเล่มนี้เป็นเครื่องมือในการจัดการเรียนรู้ บนพื้นฐานของความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติการเรียนรู้ของวัยรุ่น ความเชื่อมั่นในศักยภาพของผู้เรียน ความมุ่งมั่นให้ผู้เรียนทุกคนมีความรู้และทักษะที่จำเป็นและเพียงพอต่อการดำรงชีวิตในโลกอนาคตที่มีการพัฒนาและเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว มีความพร้อมในการศึกษาต่อระดับที่สูงขึ้น และสนับสนุนให้ผู้เรียนมีสิทธิ์ในการเรียนรู้และให้โอกาสในการเรียนรู้ในบริบทที่ทำนาย หนังสือเรียนเล่มนี้นำเสนอรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่หลากหลายตามบริบทที่เหมาะสมในแต่ละเนื้อหา เช่น การลงมือปฏิบัติเพื่อสร้างข้อมูลและใช้ข้อมูลดังกล่าวสร้างข้อความคาดการณ์จนเกิดเป็นข้อสรุป การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหาย่างเป็นเหตุเป็นผล เพื่อให้ตอบสนองกับรูปแบบการเรียนรู้ที่แตกต่างกันของผู้เรียน มีการใช้สื่อการเรียนรู้ที่มีความทันสมัย เช่น ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต สื่อวัตถุดิจิทัลเสมือนจริง ด้วยมุ่งหวังที่จะกระตุ้นความสนใจของผู้เรียน ให้เปิดรับโอกาสในการเรียนรู้ ช่วยให้ผู้เรียนเห็นภาพและเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ และเข้าถึงแก่นของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีธรรมชาติเป็นนามธรรมได้ในที่สุด โดยยึดหลักการของการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองควบคู่กับการชี้แนะของผู้สอน

ในการจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ ครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์เล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่ายในการจัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้นี้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วยจะขอบคุณยิ่ง



(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิ้มปิจำนงค์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

การสื่อความหมายของรูปภาพและกรอบที่ควรรู้

1

จุดประสงค์ของบทเรียน



ความรู้และทักษะที่นักเรียนควรทำได้
เมื่อเรียนจบบทนี้

2

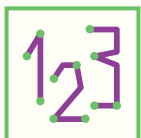
ทบทวนความรู้ก่อนเรียน



ทบทวนเนื้อหาหรือความรู้ก่อนเรียน
เพื่อเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียน
เนื้อหาใหม่ ซึ่งจะมีลิงก์ และ QR-code
สำหรับเข้าไปทำแบบทดสอบออนไลน์ เพื่อ
ตรวจสอบความรู้พื้นฐานก่อนเข้าสู่บทเรียน

3

มุมคณิต



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เพิ่มเติมจาก
เนื้อหา เพื่อเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์
ให้กับนักเรียน

4

ชวนคิด



คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้หรือขยาย
ความรู้จากเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด
โดยเน้นให้เกิดการอภิปรายร่วมกันใน
ชั้นเรียน เพื่อขยายความคิดเพิ่มเติม และ
แลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน

5

ข้อสังเกต



ข้อมูลหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สังเกต
และสรุปได้จากเนื้อหาหรือตัวอย่าง
เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกการสังเกต
คาดการณ์ และลงข้อสรุป

6

ข้อควรระวัง



ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่อาจเข้าใจผิด
หรือนำไปใช้โดยไม่ระวัง เพื่อให้เกิดความ
เข้าใจที่ถูกต้อง และย้ำเตือนให้นักเรียน
เกิดความรอบคอบในการนำไปใช้

7

กิจกรรม



กิจกรรมที่เน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ
เพื่อฝึกการสังเกต ฝึกการคิด และเพื่อให้
เกิดการเรียนรู้หรือสร้างองค์ความรู้ใหม่ ๆ
ทั้งยังช่วยพัฒนาทักษะและกระบวนการ
ทางคณิตศาสตร์

8

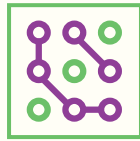
คำถามท้ายกิจกรรม



คำถามเพื่อสรุปความรู้ หรือขยายความรู้
จากกิจกรรมที่ได้ทำ

9

มุมเทคโนโลยี



ความรู้หรือกิจกรรมที่ใช้เทคโนโลยีเป็น
เครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เช่น
เครื่องคิดเลข หรือซอฟต์แวร์เรขาคณิต
พลวัต เพื่อให้นักเรียนมีทักษะในการใช้
เทคโนโลยีในการแก้ปัญหา

10

สื่อเสริม เพิ่มความรู้



ข้อมูลหรือวีดิทัศน์เสริมความรู้ที่เพิ่มเติม
จากเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด
เพื่อแนะนำแหล่งการเรียนรู้ให้นักเรียน
ได้ศึกษาเพิ่มเติม

การสื่อความหมายของรูปภาพและกรอบที่ควรรู้

11

เกร็ดน่ารู้



ความรู้ทั่วไปในชีวิตจริงที่สอดคล้องกับเนื้อหา ตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด

12

เครื่องคิดเลข



แนะนำให้ใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคำนวณ

13

ซอฟต์แวร์ตารางทำงาน



แนะนำให้ใช้ซอฟต์แวร์ตารางทำงานในการทำกิจกรรม หรือการแก้ปัญหา

14

The Geometer's Sketchpad



แนะนำให้ใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad ในการทำกิจกรรม การสำรวจ หรือการแก้ปัญหา

15

ท้าทาย



แบบฝึกหัดข้อที่มีความยากหรือซับซ้อนมากกว่าตัวอย่างที่มีให้ แต่ยังสามารถใช้เนื้อหาความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

16

ตรวจสอบความเข้าใจ



ตรวจสอบความเข้าใจของตนเองภายหลังจากเรียนจบบทเรียน เพื่อตรวจสอบว่าเนื้อหาใดที่เข้าใจ และเนื้อหาใดต้องทบทวนหรือเรียนรู้เพิ่มเติม

17

สรุปท้ายบท



สรุปเนื้อหาของบทเรียน เพื่อสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในบทเรียนนั้น ๆ

18

กิจกรรมท้ายบท



กิจกรรมท้ายบทเรียน เพื่อให้นักเรียนได้นำความรู้ในบทเรียนมาใช้ในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่หลากหลาย

19

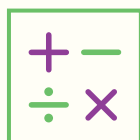
แบบฝึกหัดท้ายบท



แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้ที่ได้จากหัวข้อต่าง ๆ ในบทเรียนนี้ รวมทั้งบทเรียนก่อนหน้ามาใช้ในการแก้ปัญหา

20

กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะเต็ม



กิจกรรมที่เน้นการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาในชีวิตจริง โดยให้นักเรียนได้บูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี รวมทั้งกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม

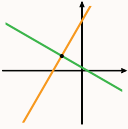
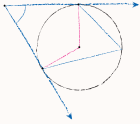
21

สื่อ AR (Augmented Reality)



สื่อเสริมการเรียนรู้ด้านเทคโนโลยีแอปพลิเคชัน “AR สสวท. คณิต มัธยม” เพื่อใช้งานได้ที่ <http://ipst.me/9075>



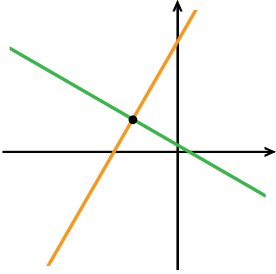
สารบัญ	บทที่ 1-3	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
1	บทที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 10 1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 13 1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 24 1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 30	
 ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปร		
2	บทที่ 2 วงกลม 48 2.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม 52 2.2 คอร์ดของวงกลม 72 2.3 เส้นสัมผัสวงกลม 85	
 วงกลม		
3	บทที่ 3 พีระมิด กรวย และทรงกลม 114 3.1 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด 117 3.2 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย 134 3.3 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม 148	
 พีระมิด กรวย และทรงกลม		

สารบัญ	บทที่ 4-5	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
4  ความน่าจะเป็น	บทที่ 4 ความน่าจะเป็น	164
	4.1 โอกาสของเหตุการณ์	167
	4.2 ความน่าจะเป็น	173
5  อัตราส่วนตรีโกณมิติ	บทที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	204
	5.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ	207
	5.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม	218
	5.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา	233
กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะสม		250
บรรณานุกรม		252
ภาคผนวก	ดัชนี	254
	บัญชีสัญลักษณ์	257
	คณะผู้จัดทำ	258

บทที่

1

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



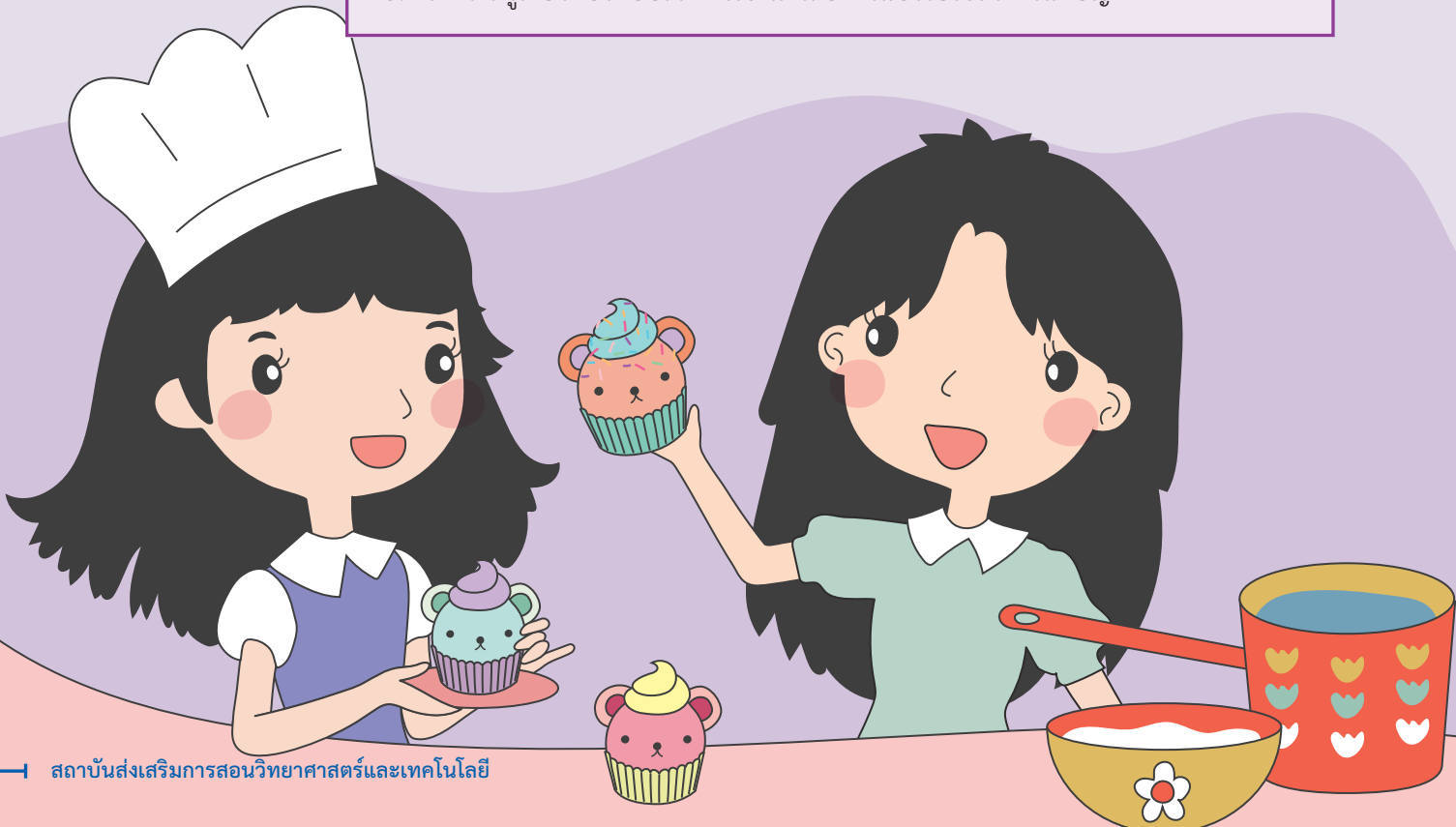
- 1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
- 1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
- 1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

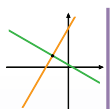


จุดประสงค์ของบทเรียน

เมื่อเรียนจบบทนี้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

1. ใช้กราฟเพื่อวิเคราะห์เกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
3. นำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา





บทที่ 1

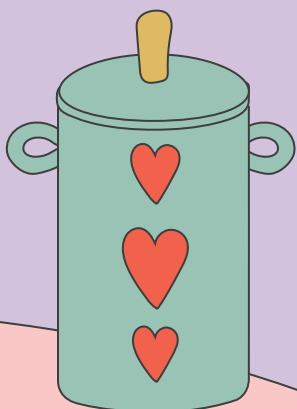
ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



“

การทราบความสัมพันธ์ของปริมาณสองปริมาณอย่างน้อย 2 ความสัมพันธ์ มีความสำคัญต่อการตัดสินใจในสถานการณ์ต่าง ๆ เช่น การเลือกซื้อสินค้าให้คุ้มค่า การวางแผนการลงทุน การหาอัตราเร็วเพื่อให้ไปถึงจุดหมายพร้อมกัน เราสามารถนำความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการตัดสินใจหรือใช้ในการแก้ปัญหาได้

”



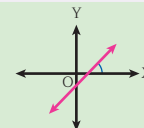


ทบทวนความรู้ก่อนเรียน

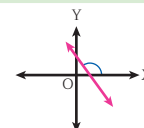
- ❖ **คำตอบของสมการ** คือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง
- ❖ **การแก้สมการ** คือ การหาคำตอบทั้งหมดของสมการ
- ❖ **สมบัติของการเท่ากัน**
 - ◆ สมบัติสมมาตร
ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนจริง
 - ◆ สมบัติถ่ายทอด
ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริง
 - ◆ สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก
ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริง
 - ◆ สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ
ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริง
- ❖ **สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว** เป็นสมการที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น $ax + b = 0$ เมื่อ x เป็นตัวแปร a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$
- ❖ ความสัมพันธ์ของปริมาณสองปริมาณที่มีกราฟอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เรียกว่า **ความสัมพันธ์เชิงเส้น**
- ❖ สมการของความสัมพันธ์เชิงเส้นที่แสดงความเกี่ยวข้องระหว่างปริมาณสองปริมาณ จะเรียกว่า **สมการเชิงเส้นสองตัวแปร** และเมื่อตัวแปรทั้งสองแทนจำนวนจริงใด ๆ กราฟของสมการนี้จะเป็นเส้นตรงที่เรียกว่า **กราฟเส้นตรง**
- ❖ สมการเชิงเส้นสองตัวแปรเป็นสมการที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น $Ax + By + C = 0$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปร A, B และ C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน
- ❖ สมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่อยู่ในรูป $y = mx + b$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ m และ b เป็นค่าคงตัว จะมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ m ซึ่งมีลักษณะของกราฟ ดังนี้

เมื่อ $m > 0$

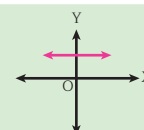
กราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ทำมุมแหลมกับแกน X
โดยวัดจากแกน X ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อ $m < 0$

กราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ทำมุมป้านกับแกน X
โดยวัดจากแกน X ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อ $m = 0$

กราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X

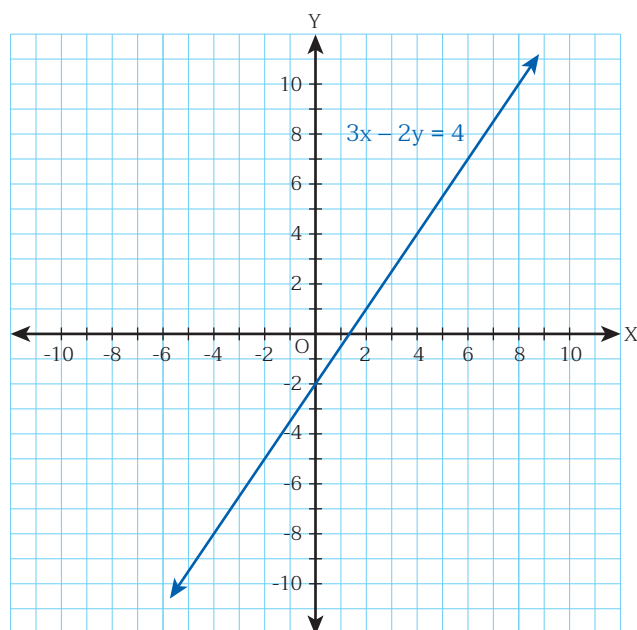


นักเรียนสามารถทำแบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียนได้ที่ <http://ipst.me/10710>



1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่าสมการ เช่น $2x + 4y = 5$, $3x - 8 = 2y$, $y = -x + \frac{1}{2}$ และ $5x - 2y - 4 = 0$ เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มีรูปทั่วไปเป็น $Ax + By + C = 0$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ โดย A, B, C เป็นค่าคงตัว ที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรดังกล่าวจะเป็นเส้นตรง เช่น สมการเชิงเส้นสองตัวแปร $3x - 2y = 4$ เมื่อ x และ y แทนจำนวนจริงใด ๆ จะมีกราฟเป็นเส้นตรง ดังนี้



สำหรับคู่อันดับ (x, y) ใด ๆ จะเป็นคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $3x - 2y = 4$ ก็ต่อเมื่อแทนค่า x และค่า y ของแต่ละคู่อันดับนั้น ในสมการ $3x - 2y = 4$ แล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง เราเรียกคู่อันดับที่สอดคล้องเหล่านั้นว่า คำตอบของสมการ $3x - 2y = 4$

คู่อันดับ (x, y) ที่เป็นคำตอบเหล่านั้นจะเป็นพิกัดของจุดที่อยู่บนเส้นตรง $3x - 2y = 4$ ในทางกลับกันคู่อันดับ (x, y) ที่เป็นพิกัดของจุดที่อยู่บนเส้นตรง $3x - 2y = 4$ ก็จะเป็นคำตอบของสมการ $3x - 2y = 4$ ด้วย

เนื่องจากคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ $3x - 2y = 4$ มีมากมายไม่จำกัด ดังนั้น สมการ $3x - 2y = 4$ จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัดด้วย

โดยทั่วไปเราเรียกคู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการเชิงเส้นสองตัวแปร $Ax + By + C = 0$ ว่า คำตอบของสมการ และกราฟแสดงคำตอบของสมการ $Ax + By + C = 0$ จะเป็นเส้นตรง เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นตรง $Ax + By + C = 0$



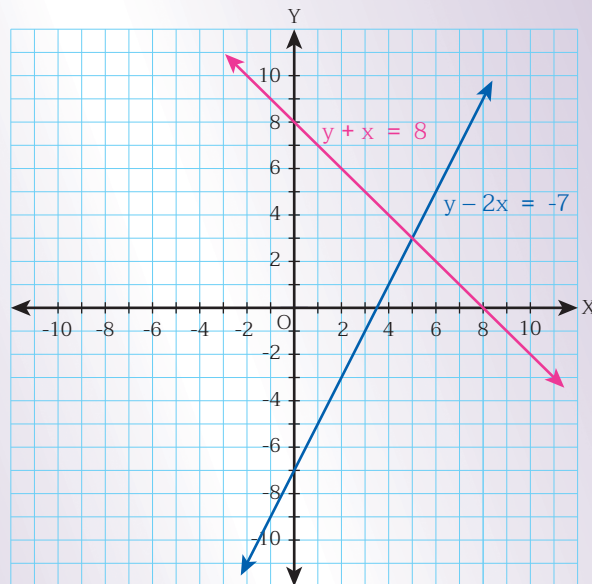
กิจกรรม : ดูกราฟทราบคำตอบ

1. พิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ต่อไปนี้

$$y + x = 8$$

$$y - 2x = -7$$

เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสองโดยใช้แกนคู่เดียวกัน จะได้กราฟดังรูป



จากกราฟของสมการทั้งสอง

1) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $y + x = 8$ มา 2 พิกัด

2) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $y - 2x = -7$ มา 2 พิกัด

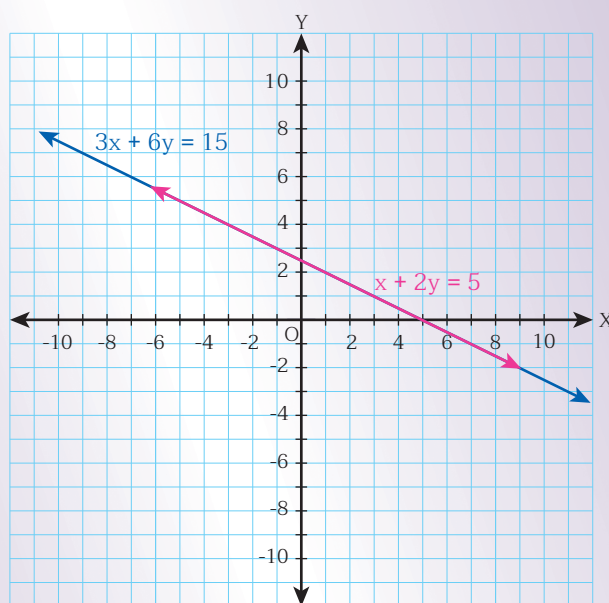
3) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของทั้งสมการ $y + x = 8$ และ $y - 2x = -7$

2. พิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ต่อไปนี้

$$x + 2y = 5$$

$$3x + 6y = 15$$

เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสองโดยใช้แกนคู่เดียวกัน จะได้กราฟดังรูป



จากกราฟของสมการทั้งสอง

1) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $x + 2y = 5$ มา 2 พิกัด

2) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $3x + 6y = 15$ มา 2 พิกัด

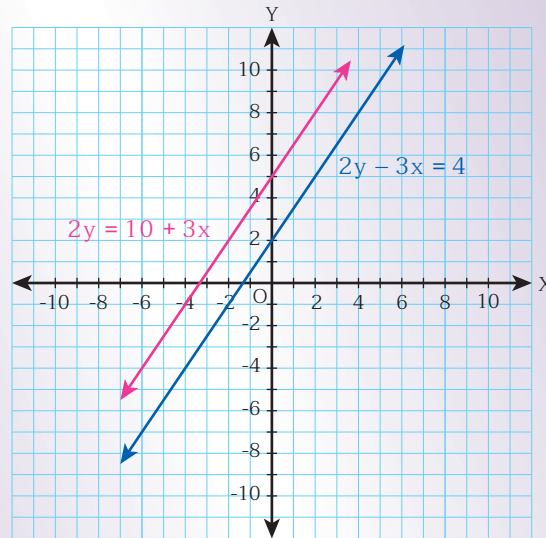
3) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของทั้งสมการ $x + 2y = 5$ และ $3x + 6y = 15$

3. พิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ต่อไปนี้

$$2y = 10 + 3x$$

$$2y - 3x = 4$$

เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสองโดยใช้แกนคู่เดียวกัน จะได้กราฟดังรูป



จากกราฟของสมการทั้งสอง

1) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $2y = 10 + 3x$ มา 2 พิกัด

.....

2) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการ $2y - 3x = 4$ มา 2 พิกัด

.....

3) ระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของทั้งสมการ $2y = 10 + 3x$ และ $2y - 3x = 4$

.....



คำถามท้าทายกิจกรรม

จากกิจกรรมในแต่ละข้อ นักเรียนได้ข้อสังเกตจากกราฟเกี่ยวกับคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรของทั้งสองสมการอย่างไรบ้าง



มุมเทคโนโลยี

จากกิจกรรม : ดูกราฟหาคำตอบ
นักเรียนสามารถพิจารณากราฟของสมการ
เชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการอื่น ๆ เพิ่มเติม
โดยดาวน์โหลดไฟล์ GSP ได้ที่
<http://ipst.me/10711>



ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

“เศษสามส่วนสี่ของผลบวกของจำนวนสองจำนวนเป็น 57 และสามเท่าของจำนวนน้อย มากกว่าจำนวนมากอยู่ 40 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น”

จากปัญหาดังกล่าว เมื่อกำหนดให้ x แทนจำนวนน้อย และ y แทนจำนวนมาก จะเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{3}{4}(x + y) = 57 \quad \underline{\hspace{2cm}} \text{ ①}$$

$$3x - y = 40 \quad \underline{\hspace{2cm}} \text{ ②}$$

เราเรียกชุดของสมการทั้งสองที่พิจารณาคำตอบร่วมกัน ดังตัวอย่างข้างต้นนี้ว่า **ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร (system of linear equations with two variables)**

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง ที่ a, b ไม่เป็นศูนย์
พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ระบบที่ประกอบด้วยสมการ

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มี x และ y เป็นตัวแปร
โดยที่ a และ c เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

b และ d เป็นสัมประสิทธิ์ของ y

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y)
ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองของระบบสมการ หรือกล่าวได้ว่าคำตอบ
ของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y) ที่ค่า x และ
ค่า y ทำให้ได้สมการที่เป็นจริงทั้งสองสมการ



มุมคณิต

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะ
ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
อย่างน้อย 2 สมการ ที่มีตัวแปรชุดเดียวกัน

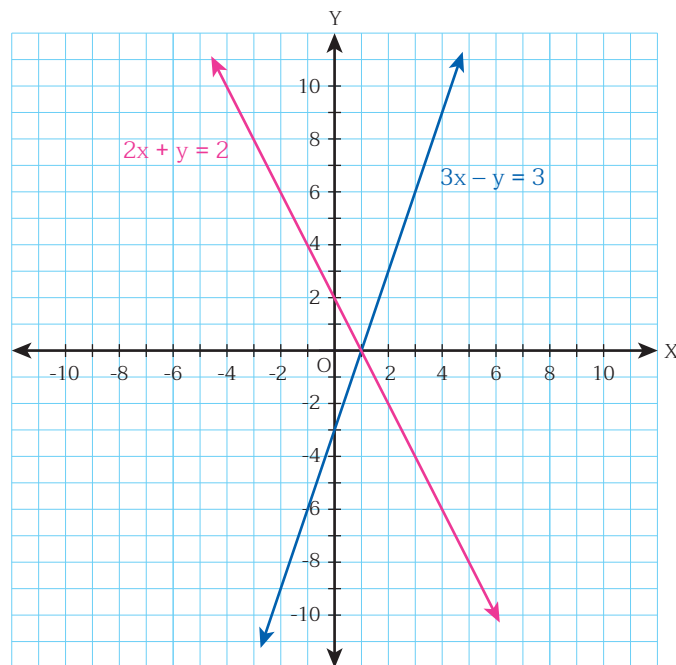
ให้นักเรียนพิจารณาการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรด้วยการเขียนกราฟของแต่ละสมการบนระนาบโดยใช้แกนคู่เดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. กำหนดให้

$$3x - y = 3 \quad \text{_____ ①}$$

$$2x + y = 2 \quad \text{_____ ②}$$

เขียนกราฟของสมการทั้งสอง ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x - y = 3$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x + y = 2$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกันที่จุด $(1, 0)$ เพียงจุดเดียว แสดงว่ามีคู่อันดับเพียงคู่เดียว คือ $(1, 0)$ ที่เป็นคำตอบของทั้งสองสมการ

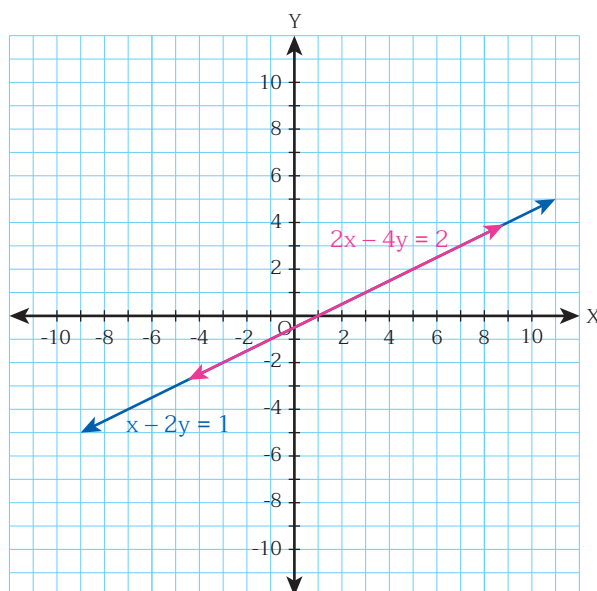
ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว คือ $(1, 0)$

2. กำหนดให้

$$x - 2y = 1 \quad \underline{\hspace{2cm}} \text{ ①}$$

$$2x - 4y = 2 \quad \underline{\hspace{2cm}} \text{ ②}$$

เขียนกราฟของสมการทั้งสอง ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $x - 2y = 1$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x - 4y = 2$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งทับกันหรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน แสดงว่าคู่อันดับทุกคู่อันดับที่เป็นพิกัดของจุดบนเส้นตรงที่ทับกันนี้ เป็นคำตอบของทั้งสองสมการ

ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัด โดยทุกคู่อันดับที่เป็นคำตอบต้องสอดคล้องกับสมการ $x - 2y = 1$ หรือสมการ $2x - 4y = 2$



จากกราฟและสมการที่แสดงข้างต้น ข้าวหอมสังเกตเห็นอะไรไหมจ๊ะ



ใช่จ๊ะ หรือเราอาจกล่าวได้ว่า สมการทั้งสองสมมูลกันนั่นเอง

เห็นจ๊ะ... เห็นว่ากราฟที่สร้างจากสมการทั้งสองที่ทับกันสนิทนั้น สัมประสิทธิ์และค่าคงตัวของสมการทั้งสองก็ยังคงมีความสัมพันธ์กันด้วย โดยสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวในสมการที่ 2 เป็นสองเท่าของสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวในสมการที่ 1 จ๊ะ

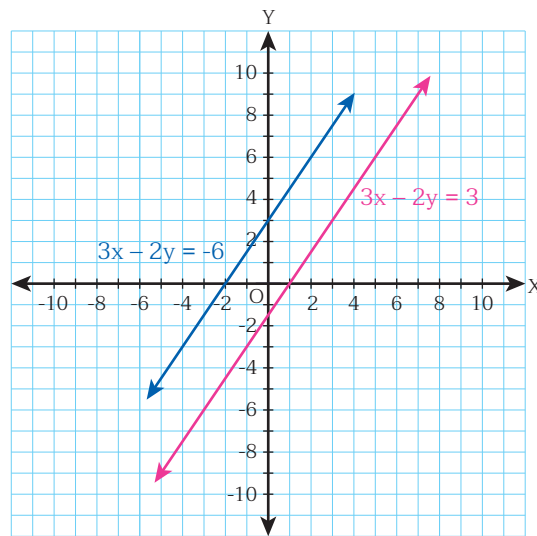


3. กำหนดให้

$$3x - 2y = -6 \quad \underline{\hspace{2cm}} \text{ ①}$$

$$3x - 2y = 3 \quad \underline{\hspace{2cm}} \text{ ②}$$

เขียนกราฟของสมการทั้งสอง ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x - 2y = -6$ และคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x - 2y = 3$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งขนานกัน จึงไม่ตัดกัน ทำให้ไม่มีจุดตัด ดังนั้นจึงไม่มีคู่อันดับใดเป็นคำตอบของทั้งสองสมการ ระบบสมการนี้จึงไม่มีคำตอบ



กราฟและสมการที่แสดงข้างต้นนี้ก็น่าสนใจนะ
ข้าวหอมสังเกตเห็นอะไรไหมจ๊ะ

อิม... เห็นว่ากราฟที่สร้างขึ้นจากสมการทั้งสองที่มีลักษณะขนานกันนั้น
สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวเดียวกันในสมการทั้งสองนั้นก็เท่ากันด้วย
แต่ค่าคงตัวของสมการทั้งสองไม่เท่ากันจ๊ะ



จากตัวอย่างในข้อ 1 ถึง 3 ข้างต้น จะเห็นว่าระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอาจมีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมาย ไม่จำกัด หรือไม่มีคำตอบเลยก็ได้