

คณิตศาสตร์ช่าง

ระดับ ปว.ช. - ปว.ส.

เรื่องเวกเตอร์ใน 3 มิติ

พิมพ์และจัดจำหน่ายโดย

ผศ.สุชาติ สุภาพ

250/1 หมู่ 1 ถ.บ้านแพ้ว อำเภอบ้านแพ้ว จังหวัดสมุทรสาคร 74120

E - mail suchart11111@hotmail.com

พิมพ์ที่ หจก.SPS 1999 ม.เพชรอนันต์ เขตคันนาวา กรุงเทพฯ ๑ 10230 โทร 086-341-1410

ข้อมูลทางบรรณานุกรม

สุชาติ สุภาพ

คณิตศาสตร์ 3 เรื่องเวกเตอร์ใน 3 มิติ

510

ISBN 978-616-474-990-6

คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์ช่วง เรื่องเวกเตอร์ใน 3 มิติ เล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นโดยเน้นการสื่อความหมายด้วยภาพเพราะเชื่อว่าถ้าผู้เรียนได้เรียนรู้จากภาพ จะทำให้เข้าใจเนื้อหาได้อย่างขึ้น นอกจากนั้นยังมีการบูรณาการความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์เข้าด้วยกัน ราคาของหนังสืออาจจะแพงไปบ้างเนื่องจากเป็นการจัดทำแบบปรี้นท์จำนวนน้อย หวังว่าท่านคงจะเข้าใจและให้การสนับสนุน

หนังสือนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือจาก ผศ.วัฒนา เดชณะ ม.ราชภัฏสงขลา และผศ.จรัส บุณยธรรมา ครูวิทยาศาสตร์ดีเด่นระดับอุดมศึกษา ที่ได้ให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ รวมถึงผู้บริหารมหาวิทยาลัย ฯ ทุกระดับชั้นที่สนับสนุนส่งเสริมการทำผลงานวิชาการและส่งเสริมการให้บริการทางวิชาการแก่ชุมชนและสังคม จึงขอขอบพระคุณทุกท่าน มา ณ โอกาสนี้

สำหรับท่านที่สนใจหนังสือของกระผมแต่หาซื้อไม่ได้ สามารถสั่งซื้อได้ทางไลน์หรือเฟสบุ๊คสุชาติ สุภาพ

สุชาติ สุภาพ

โทรศัพท์ 084-091-9310



ID LINE

สารบัญ

	หน้า
เวกเตอร์ใน 3 มิติ	5
ทำไมต้องเรียนเรื่องเวกเตอร์	10
ระบบพิกัด	12
การบอกตำแหน่งของจุดใน 2 และ 3 มิติ	13
ปริมาณเวกเตอร์ คืออะไร	22
เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก	23
มุมของเวกเตอร์	35
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	36
องค์ประกอบของเวกเตอร์	46
เวกเตอร์ตำแหน่ง	61
ขนาดของเวกเตอร์	68
ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิ 2 มิติ	70
จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด	79
การหาจุดตัดของเส้นมีฐานทั้งสามของสามเหลี่ยม	82
การหาจุดแบ่งบนส่วนของเส้นตรง	86
เวกเตอร์ที่เท่ากัน	90
นิเสธของเวกเตอร์ (เวกเตอร์ตรงข้ามกัน)	92
กฎสี่เหลี่ยมด้านขนานของแรง	97
กฎของไซน์	98
การบวกและการลบเวกเตอร์	100
เวกเตอร์คูณ	141
เวกเตอร์คูณกับสมมูลของแรง	143
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	147

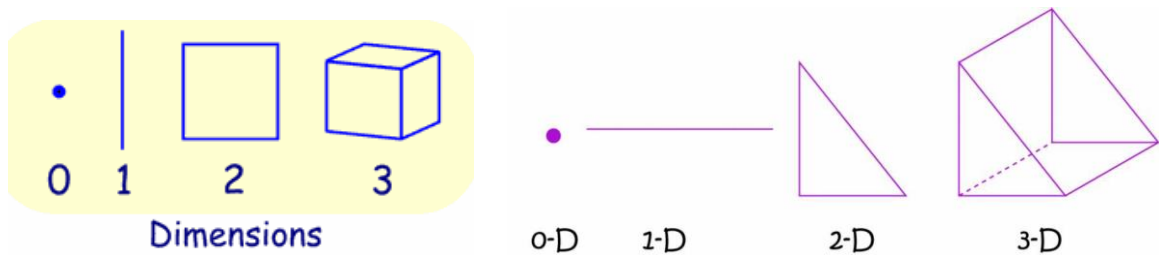
สารบัญ

	หน้า
เวกเตอร์ที่ขนานกัน	156
เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน	161
มุมก้ำกนดทิศทางและโคไซน์แสดงทิศทาง	166
การคูณเวกเตอร์	177
กฎของโคไซน์	213
การใช้วิธีการทางเวกเตอร์ในการคำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	227
การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน	237

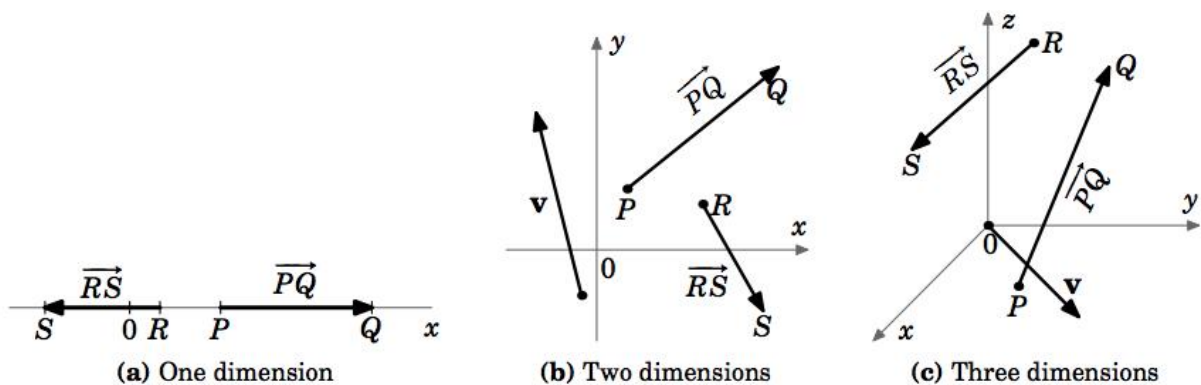
เวกเตอร์ใน 3 มิติ

มิติ คืออะไร

มิติหมายถึงขนาดซึ่งวัดไปตามทิศทางใดทิศทางหนึ่ง โดยถือขนาดยาวเป็นมิติที่ 1 ขนาดกว้างเป็น มิติที่ 2 ขนาดหนาหรือสูงเป็นมิติที่ 3 และถือว่าเวลาเป็นมิติที่ 4 ในทางศิลปะอาจใช้ หนาหรือลึก แทน กว้างหรือยาว ก็ได้



จุดไม่มีมิติ เส้นตรงมี 1 มิติ ระนาบมี 2 มิติ ลูกบาศก์มี 3 มิติ

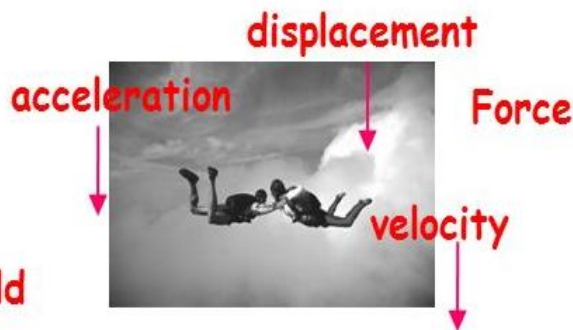


เวกเตอร์ใน 1, 2 และ 3 มิติ

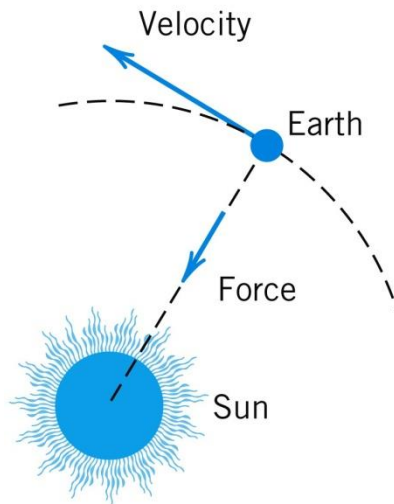
ในธรรมชาติมีปริมาณต่างๆ มากมาย เช่น แรงแม่เหล็กของโลก น้ำหนักของสิ่งของต่างๆ ความดันอากาศ ความดันของของเหลว อุณหภูมิของสิ่งต่างๆ ความเร่งของวัตถุที่ตกลงบนพื้นโลก ความเข้มของสนามแม่เหล็กโลก ความเข้มของสนามโน้มถ่วงของโลก พลังงานจลน์ของรถที่กำลังแล่น พลังงานศักย์ของน้ำในเขื่อน ปริมาณของกระแสไฟฟ้าในสายไฟฟ้า ช่วงเวลาของเหตุการณ์ต่างๆ ความหนาแน่นของสิ่งต่างๆ ฯลฯ

ปริมาณต่างๆ เหล่านี้บางปริมาณก็เป็นปริมาณสเกลาร์ หรือปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น พลังงาน เวลา ความหนาแน่น อุณหภูมิ ฯลฯ แต่ปริมาณบางอย่างก็เป็นปริมาณที่มีทิศทางด้วย เช่น แรงแม่เหล็กของโลกมีทิศเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลก สนามแม่เหล็กโลกมีทิศมีทิศจากขั้วโลกใต้ไปยังขั้วโลกเหนือเป็นต้น

direction.



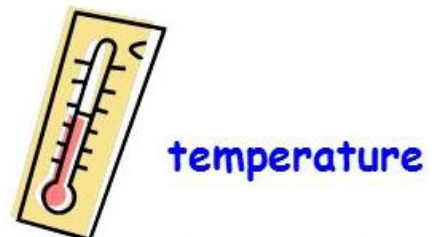
Magnetic Field



รูป 1 ปริมาณเวกเตอร์

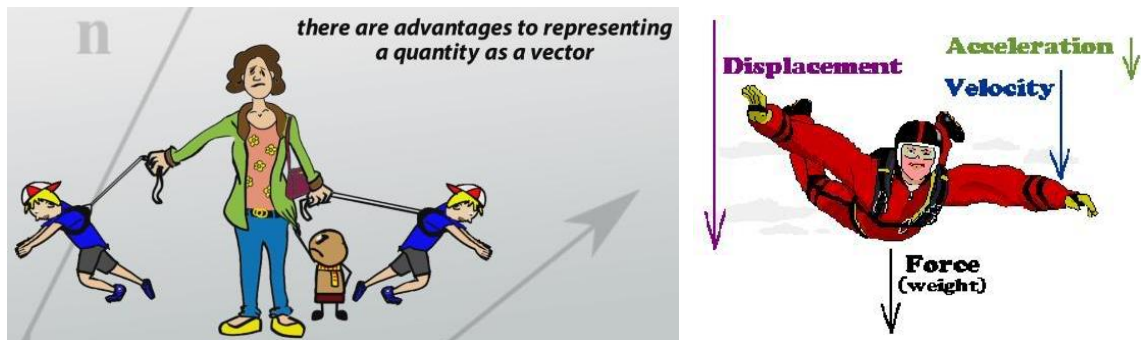
ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว หรือปริมาณที่บอกแต่เพียงขนาดเพียงอย่างเดียวก็เข้าใจความหมายได้ชัดเจนเร็วกว่าปริมาณสเกลาร์ ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางหรือปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะเข้าใจความหมายได้ชัดเจนเราเร็วกว่าปริมาณเวกเตอร์

สเกลลาร์ คือ ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น ระยะทาง เวลา พื้นที่ งาน พลังงาน กระแสไฟฟ้า ฯลฯ การคำนวณปริมาณสเกลลาร์ สามารถดำเนินการ บวก ลบ คูณ หาร เหมือนกับการคำนวณในระบบจำนวนทั่ว ๆ ไป

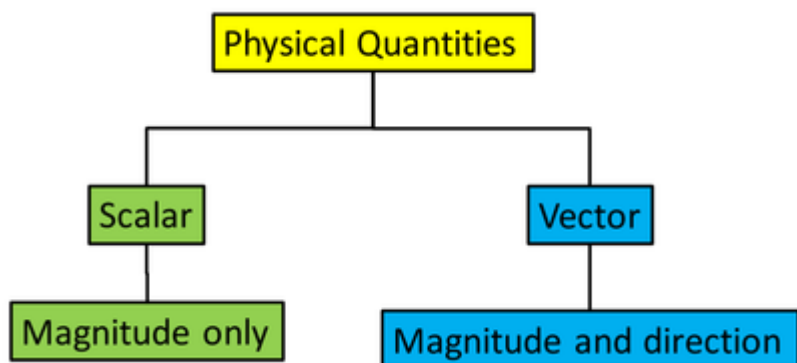


รูป 2 ปริมาณสเกลลาร์

ปริมาณเวกเตอร์ คือปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะเข้าใจความหมายได้ชัดเจน เช่น ถ้าบอกว่าเราคนหนึ่งถูกผลักล้มลง ถ้าไม่บอกว่าเราคนนั้นได้รับแรงผลักในทิศทางใด ผู้ฟังก็จะไม่ทราบเราคนนั้นล้มลงในทิศทางใดเป็นต้น ดังนั้นแรงจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์ ที่ต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะเข้าใจความหมายได้ชัดเจน ตัวอย่างของปริมาณเวกเตอร์ยังมีอีกหลายปริมาณได้แก่ การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง เป็นต้น



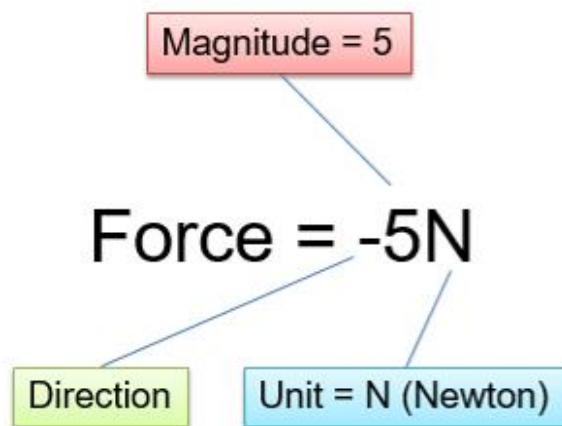
รูป 3 ปริมาณเวกเตอร์



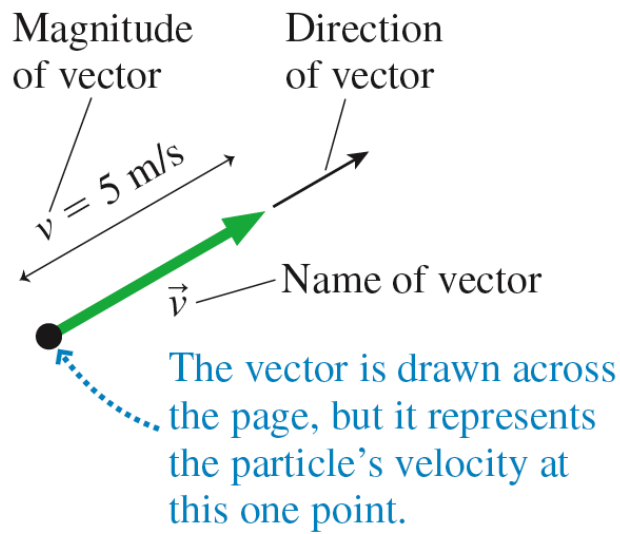
ปริมาณต่าง ๆ ในธรรมชาติมี 2 ประเภท

ปริมาณเวกเตอร์ไม่ใช่ปริมาณที่ตัวเลขเดี่ยว ๆ ที่เรารู้จัก แต่จะต้องเป็นตัวเลขที่สามารถบอกทิศทางได้ด้วย
 เช่น $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ หรือ $i + 2j + 3k$ ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

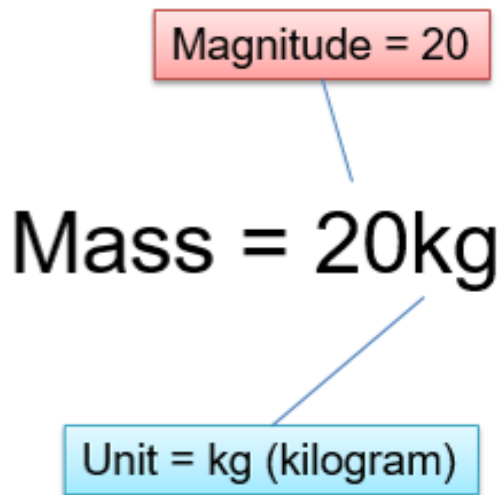
การบอกทิศทางของปริมาณเวกเตอร์อย่างง่าย ๆ จะบอกด้วยเครื่องหมาย + หรือ - เครื่องหมาย + หมายถึง แรงมีทิศไปทางขวามือ ส่วนเครื่องหมาย - หมายถึงแรงมีทิศไปทางซ้ายมือ ดังรูป



การบอกทิศทางของแรง



ปริมาณเวกเตอร์ต้องมีทั้งขนาดและทิศทาง
ส่วนปริมาณสเกลาร์จะมีขนาดและหน่วยเท่านั้น ดังรูป



ขนาดของปริมาณสเกลาร์
ปริมาณเวกเตอร์มักจะนำไปใช้ประโยชน์ในการศึกษาฟิสิกส์ หรือวิชาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์
ในการศึกษาเกี่ยวกับปริมาณเวกเตอร์อย่างต่างๆ อาจแทนปริมาณเวกเตอร์ ด้วยขนาดและทิศทางของลูกศร
ดังรูป



รูป 4 สัญลักษณ์ แทนปริมาณเวกเตอร์

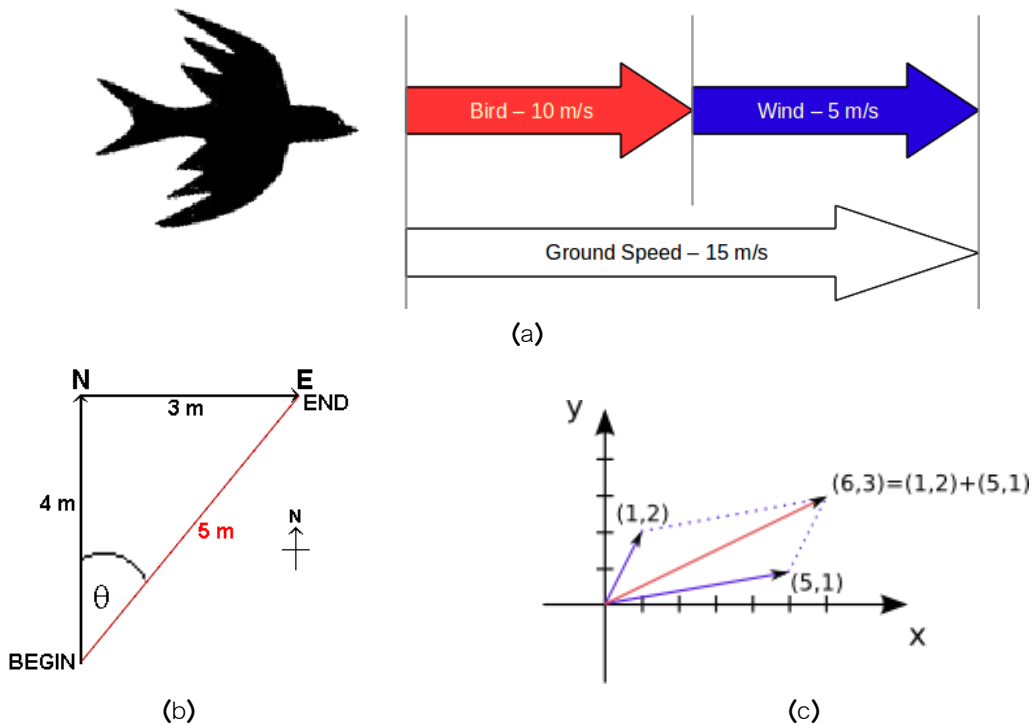
- ความยาวของลูกศรหมายถึงขนาดของเวกเตอร์

- ทิศทางของลูกศรคือทิศทางของเวกเตอร์



รูป 5 เปรียบเทียบ ปริมาณสเกลาร์ กับปริมาณเวกเตอร์

ข้อดีของการใช้ขนาดและทิศทางของลูกศรแทนปริมาณเวกเตอร์ คือเราสามารถบวกหรือลบปริมาณเวกเตอร์ได้ง่าย และมองเห็นขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์ได้เลย ดังรูป 6

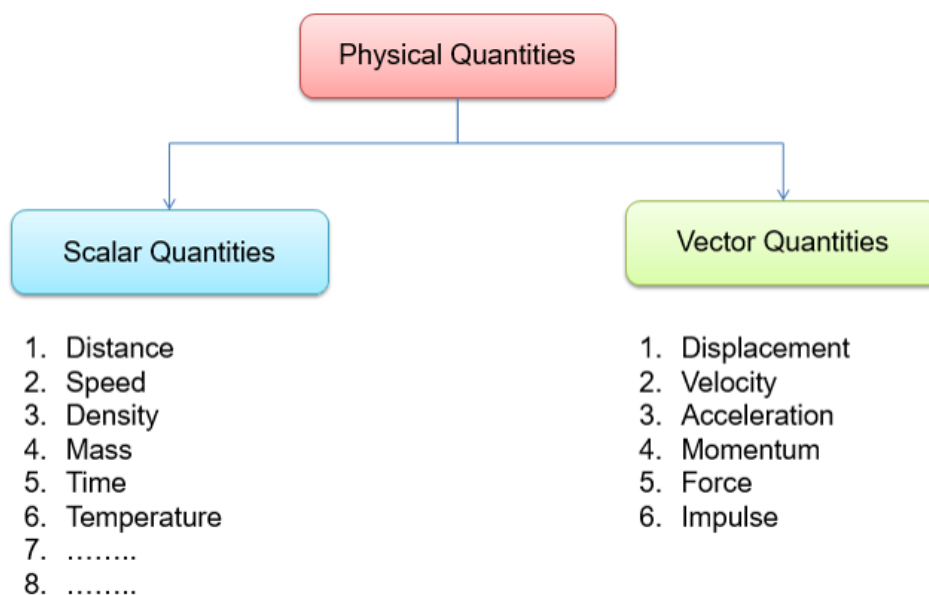


รูป 6 การบวกเวกเตอร์โดยใช้ขนาดและทิศทางของลูกศรแทนปริมาณเวกเตอร์

แต่ข้อเสียของการใช้ขนาดและทิศทางของลูกศรแทนปริมาณเวกเตอร์ คือถ้าเป็นเวกเตอร์ใน 3 มิติเราอาจไม่สามารถวาดภาพขนาดและทิศทางให้ถูกต้องได้

ปริมาณเวกเตอร์ที่นำไปใช้ได้สะดวกคือปริมาณเวกเตอร์ที่เขียนให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบ ในแนวแกน x , y และ z ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

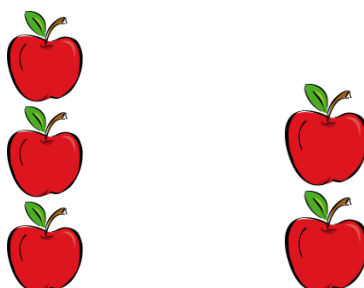
เนื่องจากปริมาณเวกเตอร์มีทั้งขนาดและทิศทาง การนำปริมาณเหล่านี้มาบวก ลบ หรือคูณกัน จึงต้องมีวิธีการที่แตกต่างจากวิธีการบวก ลบ คูณหารที่เราเคยเรียนมา เพราะว่าการบวก ลบ คูณ หาร ที่เราเรียนมาในวิชาคณิตศาสตร์นั้นใช้ได้กับปริมาณสเกลาร์เท่านั้น สำหรับการบวก ลบ คูณ ปริมาณเวกเตอร์ จะมีวิธีการที่ต่างกัน



ปริมาณต่าง ๆ ในธรรมชาติมีสองชนิดคือปริมาณที่มีทิศทางและปริมาณที่ไม่มีทิศทาง

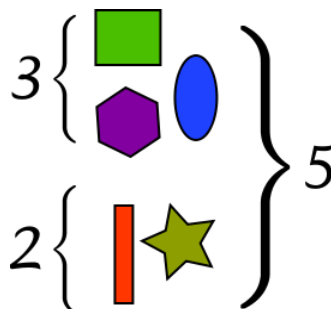
ทำไมต้องเรียนเรื่องเวกเตอร์

แน่นอนว่าถ้าเราซึ่งเป็นมนุษย์โบราณและยังอาศัยอยู่ในถ้ำ เราคงไม่มีความจำเป็นต้องเรียนเรื่องเวกเตอร์อย่างแน่นอน เพราะว่าเรื่องนี้คงไม่จำเป็นสำหรับมนุษย์ถ้ำ แต่เนื่องจากเราเกิดมาในยุคนี้การไม่เรียนรู้อะไรเลยคงไม่ได้ เพราะว่าวิทยาการในปัจจุบันก้าวหน้าไปอย่างมาก และการเรียนรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ก็มีความจำเป็น เพราะว่าปริมาณหลายปริมาณที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของเราเป็นปริมาณเวกเตอร์ เช่น แรง ความเร็ว ฯลฯ



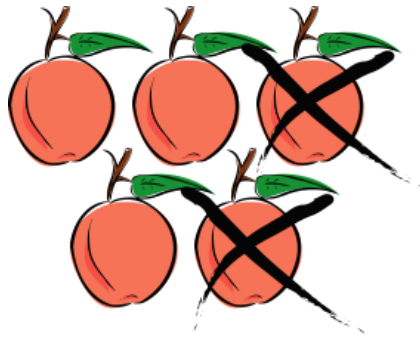
รูป 7 แอปเปิ้ลขนาดใหญ่ 3 ลูก ขนาดเล็ก 2 ลูก

ถ้าถามว่ามีแอปเปิ้ลทั้งหมดกี่ลูก ทุกคนก็ตอบได้ ในทำนองเดียวกัน ถ้าถามว่ารูปทรงเรขาคณิตในรูปข้างล่างมีกี่ชิ้น เราก็ตอบได้



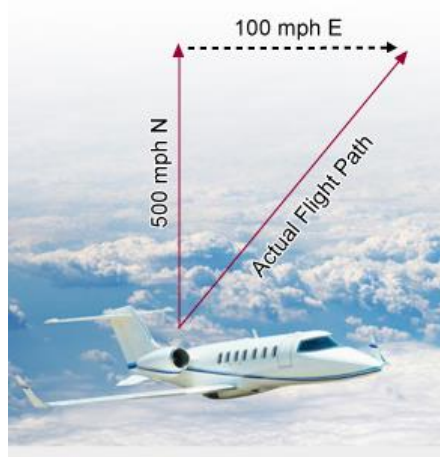
รูป 8 การรวมจำนวนทั้งหมด

หรือถ้าถามว่ามีลูกท้ออยู่ 5 ลูก รับประทานไป แล้ว 2 ลูก ถอนนี้เหลือลูกท้อกี่ลูก ทุกคนก็ตอบได้



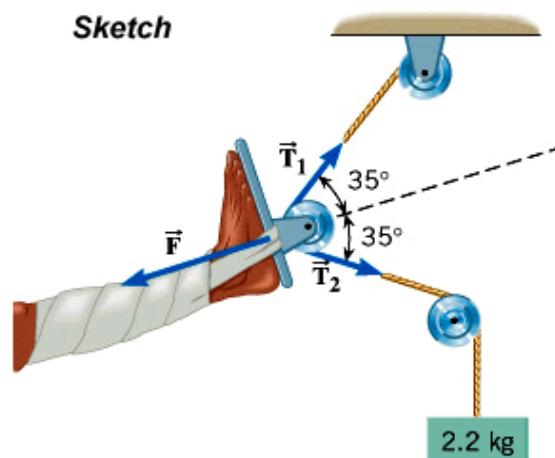
รูป 9 ลูกห่อ

แต่ถ้าถามว่าเครื่องบิน บินไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 500 ไมล์ต่อชั่วโมง ในขณะที่เลี้ยวกันลมก็พัดไปทางทิศ ตะวันออกด้วยความเร็ว 100 ไมล์ต่อชั่วโมง จากทราบว่าในขณะนั้นเครื่องบินมีความเร็วเท่าไร ? เมื่อเทียบกับ พื้นดิน และเครื่องบิน เคลื่อนที่ไปในทิศทางใด ? เราคงตอบได้ลำบากแน่ ถ้าไม่ได้เรียนเรื่องเวกเตอร์



รูป 10 การเดินทางของเครื่องบิน

หรือถ้าถามว่ามีเชือกคล้องผ่านรอกและมีน้ำหนักห้อยดังรูป 11 จากทราบว่าเกิดแรงดึงเท่าไร ?



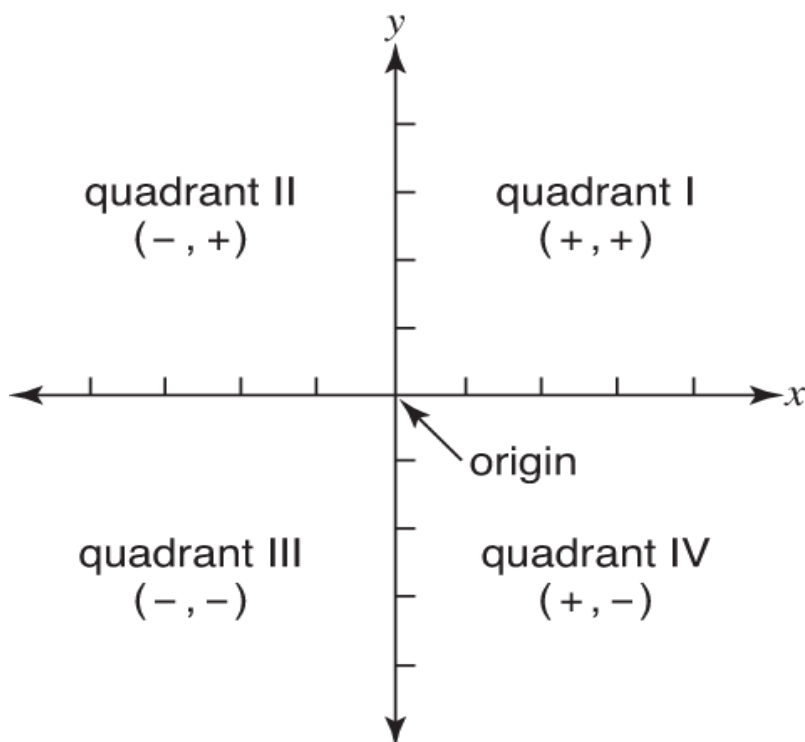
รูป 11 แรงกระทำมากกว่า 1 แรง

จากทราบว่าเกิดแรงดึงเท่าไร ? เราก็คงตอบคำถามนี้ไม่ได้ถ้าไม่ได้เรียนเรื่องเวกเตอร์ เมื่อนักเรียนทราบประโยชน์ ของการเรียนเรื่องเวกเตอร์แล้ว ก็เริ่มเรียนได้เลย ดังนี้

ระบบพิกัด (coordinate systems)

การศึกษาด้านทางวิทยาศาสตร์ในหลายเรื่อง เช่น การศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ จำเป็นต้องทราบตำแหน่งของวัตถุที่เวลาต่างๆ ระบบพิกัดที่นำมาใช้ในการบอกตำแหน่งของวัตถุที่ใช้กันมากในทางวิทยาศาสตร์มีหลายระบบ แต่ในที่นี่จะกล่าวถึงเพียงระบบเดียว คือระบบพิกัดฉากสองและสามมิติ

ระบบพิกัดฉากสองมิติ ประกอบด้วยเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก และเรียกจุดตัดว่า 'จุดกำเนิด' หรือจุด $(0,0)$ เส้นที่อยู่แนวนอน เรียกว่า แกน x เส้นที่อยู่แนวตั้งเรียกว่าแกน y พื้นที่ในระนาบที่แบ่งโดยแกน x และแกน y แบ่งออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้



รูป 12 แบ่งพื้นที่ระนาบออกเป็น 4 ส่วน

ส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน y และเหนือแกน x เรียกว่าควอดรันต์ที่ 1 ค่า x เป็น $+$, y เป็น $+$
 ส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน y และเหนือแกน x เรียกว่าควอดรันต์ที่ 2 ค่า x เป็น $-$, y เป็น $+$
 ส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน y และใต้แกน x เรียกว่าควอดรันต์ที่ 3 ค่า x เป็น $-$, y เป็น $-$
 ส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน y และใต้แกน x เรียกว่าควอดรันต์ที่ 4 ค่า x เป็น $+$, y เป็น $-$