



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

การสำรวจ

PRECALCULUS

ด้วย

THE GEOMETER'S
SKETCHPAD®



DANIEL SCHER • SCOTT STEKETEE
PAUL KUNKEL • IRINA LYUBLINSKAYA

การสำรวจ

PRECALCULUS

ด้วย



*DANIEL SCHER
SCOTT STEKETEE
PAUL KUNKEL
IRINA LYUBLINSKAYA*



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ



Key Curriculum Press
Innovators in Mathematics Education

การสำรวจ Precalculus ด้วย The Geometer's Sketchpad

แปลและเรียบเรียงจาก : Exploring Precalculus with The Geometer's Sketchpad โดย Daniel Scher, Scott Steketee, Paul Kunkel, Irina Lyublinskaya

แปลและเรียบเรียงโดย : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

พิมพ์ครั้งที่ 1 : กันยายน 2552 จำนวน 1,000 เล่ม

หนังสือ Exploring Precalculus with the Geometer's Sketchpad เป็นลิขสิทธิ์ของ Key Curriculum Press แต่เพียงผู้เดียว

หนังสือการสำรวจ Precalculus ด้วย The Geometer's Sketchpad และโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ฉบับภาษาไทยเป็นลิขสิทธิ์ของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) แต่เพียงผู้เดียว

การอนุญาตให้ทำสำเนาโดยมีเงื่อนไขจำกัด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) อนุญาตให้ผู้สอนที่ซื้อหนังสือ การสำรวจ Precalculus ด้วย The Geometer's Sketchpad มีสิทธิ์ทำสำเนากิจกรรมและแบบร่างตัวอย่างสำหรับใช้กับผู้เรียนเท่านั้น การคัดลอกหนังสือ การสำรวจ Precalculus ด้วย The Geometer's Sketchpad หรือแบบร่างของการสำรวจ Precalculus โดยไม่ได้รับอนุญาตมีความผิดตามกฎหมาย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

924 ถ.สุขุมวิท เขตคลองเตย กรุงเทพฯ 10110 www3.ipst.ac.th

ISBN 978-616-7235-04-2

จัดพิมพ์และจัดจำหน่าย

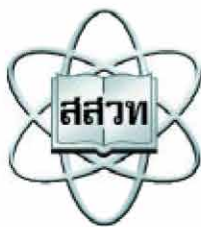
ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท

แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ 0-2255-4433, 0-2218-9891

Website : [http : // www.chulabook.com](http://www.chulabook.com)



คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตระหนักในความสำคัญของการใช้เทคโนโลยีช่วยในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น มีเจตคติที่ดีในการเรียนรู้ เรียนรู้อย่างมีความหมาย เกิดการพัฒนาทักษะด้านเทคโนโลยีสารสนเทศ และสามารถนำไปใช้ในการเรียนรู้ตลอดชีวิต ซึ่งเป็นไปตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542

สสวท. จึงได้แปลหนังสือการสำรวจ Precalculus ด้วย The Geometer's Sketchpad ขึ้นเพื่อช่วยครูคณิตศาสตร์ ในการค้นคว้าเพิ่มเติม และนำแนวคิดที่ได้ไปบูรณาการกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลายสำหรับนักเรียนที่สนใจ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนั้นหนังสือเล่มนี้ยังจะช่วยให้ นักเรียนที่สามารถศึกษาด้วยตนเอง สามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมจากชั้นเรียนได้ตามความสนใจ ส่งผลให้มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์มีทักษะในการจินตนาการ เกิดทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง ตามความสามารถของตน ซึ่งสอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้ที่สนับสนุนการพัฒนาการตามความแตกต่างระหว่างบุคคล นอกจากนี้ นักเรียนยังสามารถมีปฏิสัมพันธ์กับสื่อการสอนที่สร้างไว้ให้แล้ว

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือ การสำรวจ Precalculus ด้วย The Geometer's Sketchpad นี้ จะเป็นประโยชน์แก่นักศึกษาคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัย ครูคณิตศาสตร์และนักเรียน ตลอดจนผู้เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกท่าน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มีนาคม 2552

สารบัญ

บทนำ	vii
เกี่ยวกับ ซีดี-รอม	vii
คำถามเกี่ยวกับการใช้หนังสือเล่มนี้.....	vii
คำถามเกี่ยวกับกิจกรรม Precalculus	viii
ถึงผู้เรียน	xi
ถึงผู้สอน	xii
กิตติกรรมประกาศ	xiii
บทที่ 1: การแปลงฟังก์ชัน	1
การเลื่อนขนานฟังก์ชัน	3
การย่อ/ขยายฟังก์ชัน	8
การสะท้อนฟังก์ชัน	12
ค่าสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน	14
การประกอบกันของฟังก์ชัน	16
อินเวอร์สของฟังก์ชัน	19
ปัญหาท้าทายของการแปลง	22
บทที่ 2: ฟังก์ชันเชิงวงกลม	23
แนะนำเรเดียน	25
ตัวสร้างรอยของตรีโกณมิติ	27
ฟังก์ชันเชิงวงกลมทั้งหก	29
การแปลงของฟังก์ชันเชิงวงกลม	31
ปัญหาท้าทายของไซน์	32
บทที่ 3: สมบัติทางตรีโกณมิติ	33
กฎของไซน์	35
กฎของโคไซน์	36
ผลบวกของฟังก์ชันรูปไซน์	38
ผลคูณของฟังก์ชันรูปไซน์	42



บทที่ 4: ฟังก์ชันอื่น ๆ	47
การสำรวจรากของสมการกำลังสอง	49
ภาคตัดกรวย	51
ฟังก์ชันอิงพารามิเตอร์	53
ผิว	56
ดอกเบี๋ยทบตัน	59
ความชันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	62
ลำดับที่ลู่เข้าสู่ลอการิทึม	64
กราฟ Semilog	66
กราฟ Log-Log	70
ฟังก์ชันลอจิสติก	73
บทที่ 5: ข้อมูลและความน่าจะเป็น	77
การถดถอยเชิงเส้น	79
รอนด์	81
การปรับเส้นโค้งของฟังก์ชันพหุนาม	83
บทที่ 6: เวกเตอร์และเมทริกซ์	85
การแปลงด้วยเมทริกซ์	87
การดำเนินการเวกเตอร์	89
ผลคูณของเมทริกซ์	92
พิกัดในสามมิติ	95
ฟังก์ชันอิงพารามิเตอร์ในสามมิติ	98
การดำเนินการของเวกเตอร์ในสามมิติ	101
การแปลงด้วยเมทริกซ์ในสามมิติ	103
ผลคูณของเมทริกซ์ในสามมิติ	106
บทที่ 7: พิกัดเชิงขั้วและจำนวนเชิงซ้อน	109
บทนำสู่พิกัดเชิงขั้ว	111
กราฟคาร์ทีเซียนและกราฟเชิงขั้ว	113
การคูณจำนวนเชิงซ้อน	115
ค้นหาขมทรัพย์	118
การแปลงในระนาบเชิงซ้อน	120
การยกกำลังจำนวนเชิงซ้อน	121
วิธีทางเรขาคณิตสำหรับ	123

บทที่ 8: ลำดับและอนุกรม	127
การสร้างลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตด้วยวิธีเชิงตัวเลข	129
พื้นที่แสดงแบบจำลองของอนุกรมเรขาคณิต	131
ชุดของอนุกรมเรขาคณิต	134
ขั้นบันไดของอนุกรมเรขาคณิต	137
อนุกรมเทย์เลอร์	139
บทที่ 9: บทนำสู่แคลคูลัส	143
อัตราขณะหนึ่ง	145
อินทิกรัลแบบหนึ่ง	147
การสะสมค่าแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากและแบบสี่เหลี่ยมคางหมู	149
ลิมิตจากตาราง	151
ลิมิตจากตารางและแอปพลิเคชัน	153
สร้างปฏิยานุพันธ์ด้วยตนเอง	155
สร้างปฏิยานุพันธ์แบบอัตโนมัติ	157
บันทึกกิจกรรม	159
บทที่ 1: การแปลงฟังก์ชัน	160
บทที่ 2: ฟังก์ชันเชิงวงกลม	168
บทที่ 3: สมบัติทางตรีโกณมิติ	171
บทที่ 4: ฟังก์ชันอื่น ๆ	176
บทที่ 5: ข้อมูลและความน่าจะเป็น	186
บทที่ 6: เวกเตอร์และเมทริกซ์	189
บทที่ 7: พิกัดเชิงขั้วและจำนวนเชิงซ้อน	197
บทที่ 8: ลำดับและอนุกรม	204
บทที่ 9: บทนำสู่แคลคูลัส	209



טורכ



เกี่ยวกับซีดี-รอม

ในซีดี-รอมมีไฟล์เตอร์สำหรับทุกบทในหนังสือเล่มนี้ ในแต่ละไฟล์เตอร์ จะมีแฟ้มที่ใช้สำหรับกิจกรรมในบทนั้น ๆ กิจกรรมหลายกิจกรรมจะมีแฟ้มสำหรับครูที่สามารถใช้เพื่อนำเสนอกิจกรรมเหล่านั้นด้วย

คำถามเกี่ยวกับการใช้หนังสือเล่มนี้

ถ้าใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์เป็นประจำไม่ได้ จะใช้กิจกรรมเหล่านี้ได้อย่างไร

ผู้สอนสามารถสาธิตกิจกรรมส่วนใหญ่ในห้องเรียนได้ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์หนึ่งเครื่องและเครื่องฉาย LCD หนึ่งเครื่อง ซึ่งเราได้เตรียมแฟ้มสำหรับผู้สอนไว้เพื่อการนี้ อีกทางเลือกหนึ่งสำหรับผู้เรียนบางคนที่มีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่บ้าน สามารถกำหนดกิจกรรมเหล่านี้ให้เป็นงานเพิ่มเติมได้

มีวิธีการในการใช้ CD-ROM ได้อย่างไร

ผู้สอนมีสิทธิ์ที่จะให้ผู้เรียนแต่ละคนใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ของผู้เรียนเปิดดูสิ่งต่าง ๆ ใน CD-ROM นี้ แต่เครื่องคอมพิวเตอร์ของผู้เรียนต้องมีลิขสิทธิ์ของ Sketchpad (มีโปรแกรม Sketchpad รายแยกต่างหาก) ผู้สอนสามารถทำสำเนาของสิ่งต่าง ๆ ใน CD-ROM นี้ลงในเครื่องคอมพิวเตอร์ หรือหากมีลิขสิทธิ์ของ Sketchpad สำหรับสถานศึกษา ก็ย่อมมีสิทธิ์ทำสำเนาสิ่งต่าง ๆ ใน CD-ROM นี้ลงบนเครื่องแม่ข่ายได้

มีอะไรอยู่ภายใน CD-ROM นี้

CD-ROM นี้มีแฟ้มกิจกรรมและแฟ้มสำหรับผู้สอนที่ใช้กับกิจกรรมในหนังสือ ซึ่งได้จัดเป็นไฟล์เตอร์สำหรับแต่ละบท และยังมีกิจกรรม ในแบบร่าง และเครื่องมือเสริมอีกจำนวนหนึ่ง กิจกรรมเสริมมาพร้อมกับเอกสาร แบบร่าง และบันทึกกิจกรรมสำหรับผู้เรียน (อาจต้องใช้ Adobe Reader อ่านและพิมพ์เอกสารและบันทึกเหล่านี้)

ซึ่งดาวน์โหลดได้ฟรีจาก www.adobe.com/products/acrobat/readermal.html แบบร่างและเครื่องมือเสริมมีสิ่งต่าง ๆ ที่ช่วยให้สร้างกราฟสามมิติด้วยตนเองได้ง่ายขึ้น และมีเครื่องมือหาจุดตัดของกราฟของสองฟังก์ชัน รายการสิ่งต่าง ๆ โดยสมบูรณ์อยู่บน CD-ROM และมีในสารบัญของ CD-ROM ที่อยู่ต่อจากสารบัญของหนังสือ

วิธีใดง่ายที่สุดที่จะบอกได้ว่าผู้เรียนตอบคำถามได้ถูกต้องหรือไม่

อ่านบันทึกกิจกรรมในตอนท้ายของหนังสือเล่มนี้ แต่ละกิจกรรมจะมีบันทึกกิจกรรมที่มีทั้งคำอธิบายที่มีประโยชน์และคำตอบของทุกคำถามในกิจกรรม

ทำไมกิจกรรมบางอย่างไม่อยู่ในหัวข้อของรายวิชาที่สอน

หนังสือPrecalculusแต่ละเล่มครอบคลุมเนื้อหาแตกต่างกันและเรียงลำดับเนื้อหาแตกต่างกัน กิจกรรมต่าง ๆ ในหนังสือเล่มนี้ครอบคลุมหัวข้อเหล่านั้นหลายหัวข้อ หรือบางทีอาจมีหัวข้อที่ไม่อยู่ในหนังสือด้วยซ้ำ ผู้สอนควรพิจารณาว่ากิจกรรมใดที่ตรงกับหัวข้อในหนังสือหรือกิจกรรมใดไม่เหมาะที่จะเป็นกิจกรรมเสริม

มีบทสรุปของกิจกรรมทั้งหมดหรือไม่

ใน CD-ROM มีแฟ้มสองแฟ้ม (Contents.doc ในรูปแบบไมโครซอฟท์เวิร์ด และ Contents.pdf ในรูปแบบ Adobe Reader) ที่มีรายการของทุกกิจกรรม เครื่องมือ และแม่แบบ พร้อมทั้งความเชี่ยวชาญ Sketchpad ที่ต้องการ และคำอธิบายสั้น ๆ ถ้าไม่มี CD-ROM อยู่ใกล้ ๆ ให้เปิดคู่มือกิจกรรมในตอนท้ายของหนังสือเล่มนี้ บันทึกเหล่านี้มีคำอธิบายและข้อมูลความเชี่ยวชาญ Sketchpad ด้วย

มีผู้เรียนที่ไม่เคยใช้ Sketchpad มาก่อน ควรทำอย่างไรดี

กิจกรรมแรก (การเลื่อนขนานของฟังก์ชัน) ได้ออกแบบมาเพื่อนำให้ผู้เรียนเริ่มใช้ Sketchpad โดยไม่ได้ลัดลุลำของกิจกรรมลงในกรณี que ผู้เรียนบางคนคุ้นเคยกับโปรแกรมอยู่แล้ว นอกจากนี้ กิจกรรมหลายอย่างทำได้จากแฟ้มที่เตรียมไว้ให้แล้วและไม่ต้องใช้ความเชี่ยวชาญใด ๆ ใน Sketchpad เลย ให้ดูที่ย่อหน้า “ความเชี่ยวชาญ Sketchpad” ในบันทึกกิจกรรม (หรือคอลัมน์ ความเชี่ยวชาญในแฟ้มสารบัญของ CD-ROM) เพื่อดูระดับความเชี่ยวชาญที่ต้องใช้ในแต่ละกิจกรรม



คำถามเกี่ยวกับกิจกรรมPrecalculus

การแปลงฟังก์ชันเกี่ยวข้องกับการแปลงทางเรขาคณิตที่คุ้นเคยกันอย่างไร

ในกิจกรรมในบทที่ 1 ผู้เรียนสำรวจการแปลงทั้งแบบเรขาคณิตและแบบที่อาศัยสมการพีชคณิต ซึ่งทำให้ค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงฟังก์ชันทั้งสองวิธี

ผู้เรียนนิยามฟังก์ชันไซน์จากวงกลมหนึ่งหน่วยได้อย่างไร

ในกิจกรรมตัวสร้างรอยตรีโกณมิติ (บทที่ 2) ผู้เรียนเคลื่อนไหวจุดรอบ ๆ วงกลมวงหนึ่ง แล้ววัดพิสัย จากนั้นใช้ค่าที่วัดไว้สร้างกราฟของฟังก์ชันไซน์

ผู้เรียนเห็นภาพของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างบนด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ มีวิธีสร้างภาพในลักษณะนี้สำหรับกฎของโคไซน์หรือไม่

ในกิจกรรมกฎของโคไซน์ (บทที่ 3) ผู้เรียนสร้างแบบจำลองใน Sketchpad ที่ทำให้สูตร สัมพันธ์กับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสามรูปและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสองรูป

เครื่องคิดเลขกราฟิกเขียนกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมได้ในชั่วอึดใจ กิจกรรมใน Sketchpad จะทำให้เรื่องนี้มีชีวิตชีวาได้อย่างไร

ในกิจกรรมลำดับที่เข้าสู่ลอการิทึม (บทที่ 4) ผู้เรียนจะเขียนกราฟระหว่างลำดับเรขาคณิตกับลำดับเลขคณิตแล้วต่อจุดให้เป็นเส้นโค้งลอการิทึม และหลังจากนั้นจะแนะนำให้รู้จักกราฟ semilog และกราฟ log-log ในกิจกรรมลอการิทึม

Sketchpad มีบทบาทในการศึกษาสถิติและความน่าจะเป็นอย่างไร

ในกิจกรรมการถดถอยเชิงเส้น (บทที่ 5) ผู้เรียนลากจุดข้อมูลแล้วสังเกตว่าเส้นถดถอยเปลี่ยนไปอย่างไร ในกิจกรรมรอนด์มีการจำลองที่ใช้วิธีทางเรขาคณิตคำนวณความน่าจะเป็นที่คนสองคนจะพบกันภายในช่วงเวลาที่กำหนด

ผู้เรียนใช้เมทริกซ์ทำการแปลงทางเรขาคณิตเหมือนอย่างการหมุนและการย่อ/ขยายได้อย่างไร

ในกิจกรรมการแปลงด้วยเมทริกซ์ (บทที่ 6) ผู้เรียนใช้เมทริกซ์ขนาด 2x2 ทำการหมุน ย่อ/ขยาย และสะท้อนรูปต่าง ๆ ในระนาบ จะเรียนจำนวนเชิงซ้อนแบบที่เห็นภาพได้อย่างไร

ในกิจกรรมการคูณจำนวนเชิงซ้อน (บทที่ 7) ผู้เรียนใช้ความคล้ายกันของรูปสามเหลี่ยมทำความเข้าใจการคูณในระนาบเชิงซ้อน ในกิจกรรมวิธีทางเรขาคณิตสำหรับ ผู้เรียนพัฒนาแนวคิดแบบธรรมชาติด้วยวิธีทางเรขาคณิตว่าเหตุใด จึงมีค่าเท่ากับ -1 โดยใช้บทนิยามแบบลิมิตของ

มีอะไรที่เป็น “เรขาคณิต” ในอนุกรมเรขาคณิต

ในกิจกรรม “พื้นที่แสดงแบบจำลองของอนุกรมเรขาคณิต” และกิจกรรม “ขั้นบันไดของอนุกรมเรขาคณิต” (บทที่ 8) ผู้เรียนจะได้สร้างแบบจำลองทางเรขาคณิตที่น่าสนใจของอนุกรมเรขาคณิตนั้น

จะใส่แนวคิดพื้นฐานของแคลคูลัสลงในรายวิชา Precalculus ได้อย่างไร

กิจกรรม 7 กิจกรรมในบทที่ 9 เป็นบทนำที่สร้างภาพแบบพลวัตกับหัวข้อพื้นฐานต่าง ๆ เช่น ลิมิต อนุพันธ์ อัตราการเปลี่ยนแปลง และการสะสมค่า



ความสวยงามเป็นบททดสอบบทแรก
ไม่มีที่ใดในโลกที่ยินยอม
ต่อคณิตศาสตร์ที่ยี่เพ่ว

G.M. Hardy ใน *A Mathematician's Apology*

คณะผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผู้อ่านทุกท่านจะได้สำรวจกิจกรรมในหนังสือเล่มนี้อย่างเพลิดเพลิน และน่าจะมีสักกิจกรรมที่ทำให้ท่านเกิดความรู้สึกที่เรียกว่า “ใช่เลย!” ผู้เขียนมีความสุขในการเขียนกิจกรรมเหล่านี้ด้วยเพราะผู้เขียนได้พบว่าคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สวยงาม และเพราะผู้เขียนต้องการแบ่งปันคุณค่าเหล่านั้นให้กับผู้อ่านทุกคน ผู้เขียนเชื่อว่า ธรรมชาติที่ไม่หยุดนิ่งและลึกลับได้ ในกิจกรรมเหล่านี้จะช่วยให้ท่านได้ค้นพบการเชื่อมโยงใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ และยังได้ ชาบซึ่งไปกับความลึกซึ้งและพลังของตรีโกณมิติ จำนวนเชิงซ้อน รวมทั้งหัวข้ออื่น ๆ ใน Precalculus

คณะผู้เขียนมั่นใจว่าหลังจากที่ผู้อ่านได้ค้นหาและลงมือกับคณิตศาสตร์ด้วยตนเองจากการ ตั้งเกิดผลจากการกระทำต่าง ๆ บนหน้าจอเครื่องคอมพิวเตอร์ และจากการคิดไตร่ตรองอย่าง ถี่ถ้วนถึงผลที่ได้ ท่านจะรู้สึกพึงพอใจกับสิ่งที่ได้เรียนรู้ ซึ่งอาจบันดาลใจให้ทำการสำรวจต่อจาก กิจกรรมที่ผู้เขียนได้เขียนไว้ ใครขอให้ท่านได้แจ้งสิ่งที่ท่านค้นพบให้ผู้เขียนรับทราบ โดยส่งอีเมล ไปยัง exploring_precalc@keypress.com

Daniel Scher
Scott Steketee
Paul Kunkel
Irina Lyublinskaya





ถึงผู้สอน

คณะผู้เขียนได้สร้างกิจกรรมในหนังสือเล่มนี้ ด้วยเพราะผู้เขียนรู้สึกตื่นเต้นไปกับกิจกรรมเหล่านี้ ผู้เขียนมิได้เลือกกิจกรรมให้ตรงตามหลักสูตรใดหลักสูตรหนึ่งเป็นการเฉพาะ แม้ว่ากิจกรรมในหนังสือเล่มนี้จะครอบคลุมเนื้อหาส่วนใหญ่ในหนังสือ Precalculus ที่ตีพิมพ์กันทั่วไป หนังสือที่ว่านี้ มีความหลากหลายเป็นอย่างมาก ทั้งในเนื้อหาสาระ และการแยกแยะข้อแตกต่างระหว่างพีชคณิตขั้นสูง Precalculus และแคลคูลัส หากไม่คำนึงถึงขอบเขตของรายวิชาใดรายวิชาหนึ่งแล้ว ท่านจะพบว่ามีกิจกรรมมากมายในหนังสือเล่มนี้ที่ตรงตามหัวข้อที่ท่านสอนหลายหัวข้อ กิจกรรมเหล่านี้ จะช่วยให้หัวข้อเหล่านั้นน่าสนใจมากขึ้น และทำให้ผู้เรียนเข้าใจได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

หากเป็นไปได้ ขอให้ผู้เรียนทำกิจกรรมเหล่านี้โดยการลงมือปฏิบัติจริง ผู้เรียนจะเรียนรู้ได้ดีที่สุด และจะรู้สึกว่าได้เรียนรู้ด้วยตนเองเมื่อได้ลองคิดด้วยคณิตศาสตร์ก่อน ขอให้ใส่ใจการตอบคำถามในแต่ละกิจกรรมให้มากเป็นพิเศษ เพราะคำถามเหล่านี้มีไว้เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนรู้จักตั้งข้อคาดการณ์ และรู้จักคิดไตร่ตรองในสิ่งที่ทำ และสิ่งที่สังเกตเห็น คุณค่าของกิจกรรมเหล่านี้ขึ้นอยู่กับการใช้สติปัญญาในการสำรวจ ซึ่งจะได้จากการได้คิดไตร่ตรองเพื่อหาคำตอบให้กับคำถามเหล่านี้

ในทำนองเดียวกัน ขอให้กระตุ้นผู้เรียนให้มีการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ด้วยกัน กิจกรรมเหล่านี้ จะสำเร็จลุล่วงได้ เมื่อผู้เรียนได้จับคู่ทำกิจกรรม และได้อภิปรายข้อคาดการณ์ร่วมกับสมาชิกในกลุ่ม จุดประสงค์หลักประการหนึ่งของกิจกรรมในลักษณะนี้คือ เพื่อสร้างให้เกิดการสนทนาทางคณิตศาสตร์ภายในห้องเรียน

คณะผู้เขียนหวังว่าทั้งผู้สอนและผู้เรียนจะได้ประโยชน์ และรู้สึกเพลิดเพลินไปกับการสร้างภาพแบบพลวัตของหัวข้อต่าง ๆ ในPrecalculusที่เป็นพื้นฐานในกิจกรรมเหล่านี้ ผู้เขียนปรารถนาที่จะได้รับฟังประสบการณ์ และข้อเสนอแนะของท่าน โปรดส่งอีเมลล์มาที่ exploring_precalc@keypress.com

ด้วยความปรารถนาดีอย่างที่สุดต่อทุกท่าน

Daniel, Scott, Paul และ Irina



ขอขอบคุณ Nick Jackiw ที่เป็นผู้ริเริ่มสร้าง Sketchpad และทำให้เกิดการพัฒนาโปรแกรมนี้ไปสู่เครื่องมือที่น่าตื่นตาตื่นใจสำหรับสร้างภาพแบบพหุวัตของคณิตศาสตร์

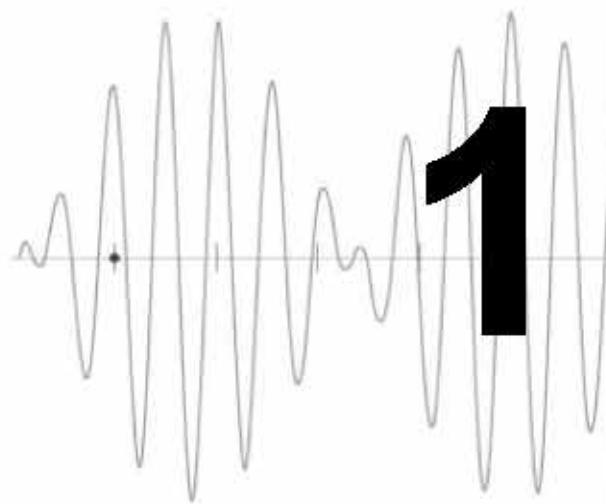
ขอขอบคุณ Paul Foerster ผู้เขียนหนังสือ *Calculus: Concepts and Applications* กิจกรรมหลายกิจกรรมในบทที่ 9 พัฒนาจากบทแรกในหนังสือเล่มนี้

Daniel ขอขอบคุณ Steven Chanan ที่ได้มีแนวคิดของหลักสูตรPrecalculusใน Sketchpad มาก่อนที่โครงการนี้จะป็นรูปเป็นร่าง ในระหว่างการจัดทำหนังสือเล่มนี้ Scott, Paul และ Irina ได้ให้การสนับสนุนเป็นอย่างมากเกี่ยวกับเนื้อหาและรูปเล่มของหนังสือ รวมทั้งได้แสดงให้เห็นถึงคุณค่าจากการร่วมมือทางไกล (จากนิวยอร์กถึงแคลิฟอร์เนียถึงประเทศจีน) และท้ายที่สุด Sara ซึ่งเป็นผู้ใกล้ชิดที่บ้านได้ทำหน้าที่เป็นผู้ให้กำลังใจตลอดระยะเวลาที่เขียนหนังสือเล่มนี้

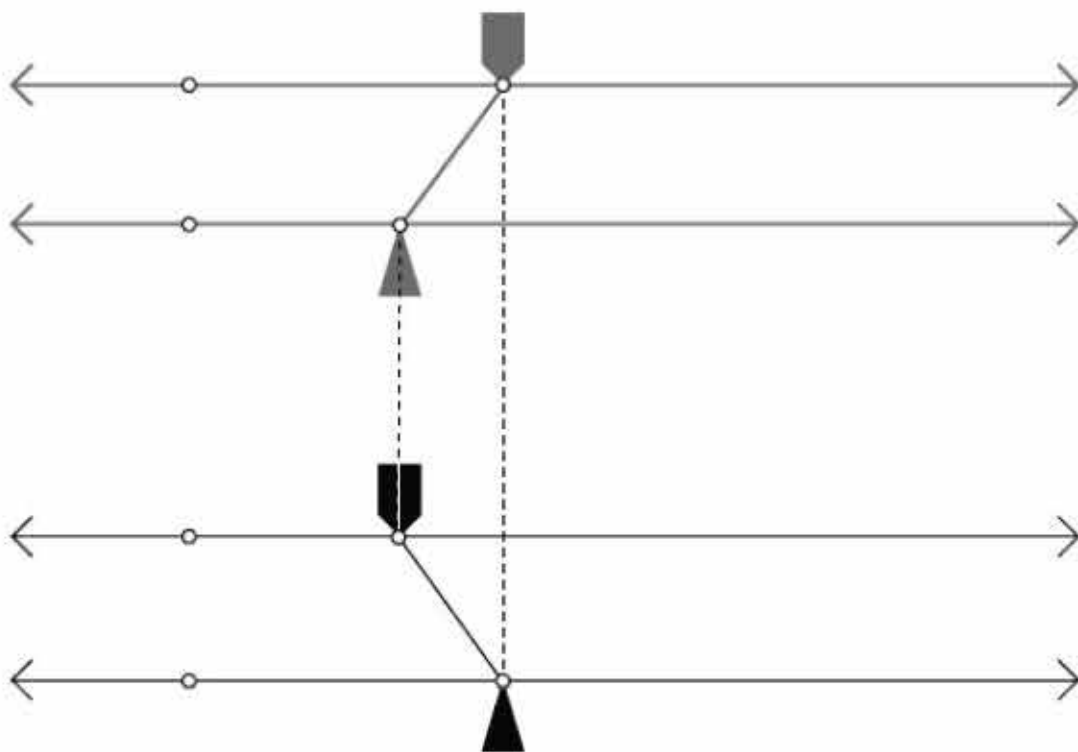
Scott ขอขอบคุณ Shannon Miller ที่ช่วยให้โครงการสำเร็จลุล่วงไปได้ โดยดูแลรายละเอียดปลีกย่อยต่าง ๆ ในโครงการ ขอขอบคุณ Chris David ที่อยู่เคียงข้างพร้อมที่จะรับฟังและให้คำแนะนำอันดีในยามที่ต้องการ ขอขอบคุณ Steven Chanan ที่สนับสนุนกิจกรรมอันดีเลิศ ขอขอบคุณ Nan Langen Staketeo ที่มีความอดทนที่วิเศษสุด และให้กำลังใจทั้งทางกายและทางใจ ในยามที่ต้องทำงานในโครงการนี้กลับมาทำต่อที่บ้าน และท้ายที่สุด ขอขอบคุณ Daniel, Paul และ Irina อย่างที่สุด หากปราศจากความรักและความปรารถนาดีจากบุคคลเหล่านี้แล้ว ก็คงไม่อาจมีหนังสือเล่มนี้ได้



טורכ



การแปลงฟังก์ชัน



טורכ

การเลื่อนขนานฟังก์ชัน

ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์
คือเซตของคู่อันดับ (x, y)
ซึ่งค่า x ใดๆ ไม่ได้นั้น
สัมพันธ์กับค่า y ในวิธี
เพียงค่าเดียว

เครื่องวัดทั่ว ๆ ไปหลายอย่างมีพื้นฐานจากฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น มาตราวัดระยะทางในรถยนต์ทำงานจากล้อที่หมุน ดังนั้นเมื่อกำหนดจำนวนรอบ (ค่า x) ที่ล้อหมุนหลังออกจากโรงงาน จะมีตัวเลข (ค่า y) เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ปรากฏบนมาตรวัด ในอีกนัยหนึ่ง มีฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรอบที่ล้อหมุนกับระยะทางเป็นไมล์ (หรือกิโลเมตร) ที่ปรากฏบนมาตรวัดในแผงหน้าปัด



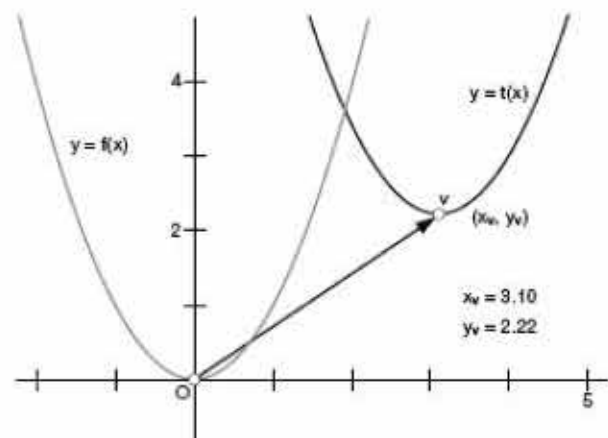
นอกเหนือจากมาตรวัดระยะทาง รถยนต์หลายคันยังมีมาตรวัดเฉพาะการเดินทางที่ทำให้เราสามารถวัดระยะทางในการเดินทางครั้งหนึ่งๆ ได้ ตัวเลขบนมาตรวัดระยะทางและตัวเลขบนมาตรวัดเฉพาะการเดินทางสัมพันธ์กับฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์สองฟังก์ชันที่ต่างกัน แต่ทั้งคู่มีพื้นฐานจากจำนวนรอบที่ล้อหมุน จึงมีพฤติกรรมคล้ายกัน ถ้ามาตรวัดระยะทางมีค่าเพิ่มขึ้น 249 ไมล์ แล้วมาตรวัดเฉพาะการเดินทางจะมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากันด้วย ทั้งนี้เราต้องไม่ตั้งค่ามาตรวัดใหม่ระหว่างการเดินทาง เรากล่าวว่ฟังก์ชันของมาตรวัดเฉพาะการเดินทางเป็นการแปลงแบบหนึ่งของฟังก์ชันของมาตรวัดระยะทาง ในกิจกรรมนี้ เราจะสำรวจความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างฟังก์ชันต้นแบบกับอีกฟังก์ชันหนึ่งที่เป็น การแปลงของฟังก์ชันต้นแบบ

สำรวจการเลื่อนขนานของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันมีการแปลงชนิด
อื่นนอกเหนือจากการ
เลื่อนขนานแบบเรขาคณิต
เราจะได้ศึกษาการแปลง
ชนิดอื่นๆ ในกิจกรรม
ต่อไป

ในเรขาคณิต การแปลงที่เคลื่อนวัตถุหนึ่งไปยังตำแหน่งใหม่โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง ขนาด หรือทิศทางของวัตถุนั้นเรียกว่า *การเลื่อนขนาน* ในทำนองเดียวกัน การแปลงฟังก์ชันที่เคลื่อนกราฟของฟังก์ชันไปยังตำแหน่งใหม่โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง ขนาด หรือทิศทางเรียกว่า *การเลื่อนขนาน* เช่นกัน

แผนภาพทางขวาแสดงกราฟของ
ฟังก์ชันต้นแบบ $y = f(x)$,
เวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน OV ,
และกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่
ได้จากการเลื่อนขนาน



หากกิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมแรกที่ใช้ Sketchpad ให้ดูเมนูวิธีใช้ เพื่อศึกษาการใช้เมนูคำสั่งและเครื่องมือต่างๆ

Q1 คิดว่ากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะเปลี่ยนไปอย่างไรสำหรับค่า x_v และ y_v ต่างๆ กัน กราฟจะแคบลงหรือกว้างขึ้นได้หรือไม่ จะเกิดอะไรขึ้นเมื่อ x_v มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง จะเกิดอะไรขึ้นเมื่อค่า y_v เปลี่ยนไป

ถ้าผู้ใช้ Sketchpad มีประสบการณ์มาก่อน ให้ทำตามคำอธิบายสรุปในแต่ละหัวข้อเพื่อสำรวจการเลื่อนขนานของฟังก์ชัน หากต้องการคำแนะนำ ให้อ่านคำอธิบายสรุปในแต่ละหัวข้อก่อน แล้วจึงอ่านคำอธิบายอย่างละเอียดเพื่อให้ได้ต่อจากนั้น

เลื่อนขนานจุดบนกราฟของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ เราจะเขียนกราฟของฟังก์ชัน นิยามเวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน สร้างจุดบนกราฟของฟังก์ชัน และเลื่อนขนานจุดด้วยเวกเตอร์

คำอธิบายสรุป

ถ้ามีประสบการณ์กับ Sketchpad มาแล้ว ให้ทำตามคำอธิบายสรุปและข้ามขั้นตอนบางขั้นได้

เปิดแฟ้ม Translation.gsp จากโฟลเดอร์ 1 Function Transformations ในหน้ากิจกรรมมีระบบพิกัดและเวกเตอร์ OV ให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$ และแสดงกราฟเป็นเส้นหนาสีน้ำเงิน ใช้กราฟนี้เป็นภาพต้นแบบในการเลื่อนขนาน

เลื่อนขนานจุด P เพื่อให้สามารถเปลี่ยนขนาดภาพทั้งหมดของฟังก์ชันในภาพได้

ระบุเวกเตอร์ OV เป็นเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานใน Sketchpad สร้างจุด P จุดหนึ่งบนกราฟของฟังก์ชัน และเลื่อนจุด P ด้วยเวกเตอร์ OV กำหนดป้ายชื่อของภาพจากการเลื่อนขนานนี้ว่า P'

คำอธิบายอย่างละเอียด

1. เปิดแฟ้ม Translation.gsp จากโฟลเดอร์ 1 Function Transformations

คลิกปุ่ม $\sim$ ก่อนที่จะคลิกที่เมนูคำสั่ง

2. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$ โดยเลือกเมนู กราฟ | เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ ในกล่องโต้ตอบฟังก์ชันใหม่ ที่ปรากฏขึ้นมา ให้คลิกปุ่มต่างๆ เพื่อใส่ฟังก์ชันคลิกปุ่ม ตกลง เพื่อเขียนกราฟของฟังก์ชัน จะปรากฏทั้งฟังก์ชัน $f(x)$ และกราฟของฟังก์ชัน

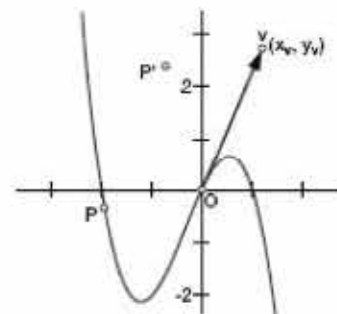


เลือกเฉพาะกราฟโดยการคลิกที่ตำแหน่งว่างเพื่อหลีกเลี่ยงการเลือกทั้งหมด จากนั้นคลิกที่กราฟเพื่อเลือกกราฟ

3. ให้เลือกกราฟของฟังก์ชันเพียงอย่างเดียวเป็นภาพต้นแบบเลือกเมนู แสดงผล | เส้น | เส้นหนา เพื่อทำเส้นให้หนาแล้วเลือกเมนู แสดงผล | สี เพื่อทำเส้นให้เป็นสีน้ำเงิน

เลือก เครื่องมือสร้าง
ข้อความ คลิกที่จุดใหม่
เพื่อแสดงป้ายชื่อ จากนั้น
ดับเบิลคลิกที่ป้ายชื่อ
(ไม่ใช่จุด) แล้วเปลี่ยนป้าย
ชื่อเป็น P

4. ระบุเวกเตอร์จาก O ไป V เป็นเวกเตอร์ของการเลื่อน
ขนานใน Sketchpad ได้โดยเลือกจุด O และจุด V
ตามลำดับ แล้วเลือกเมนู การแปลง | ระบุเวกเตอร์
5. ใช้เครื่องมือ ลงจุด เพื่อสร้างจุดบนกราฟของฟังก์ชัน
กำหนดป้ายชื่อเป็น P
6. เลือกจุด P และเลือกเมนู การแปลง | เลื่อนขนาน
เพื่อเลื่อนขนานจุดนี้ด้วยเวกเตอร์ OV



แปลงกราฟของฟังก์ชันแบบเรขาคณิตและแบบพีชคณิต

ในหัวข้อนี้ เราจะสังเกตพฤติกรรมของ P' แล้วนำไปใช้สร้างภาพของ $f(x)$ ด้วยวิธีเรขาคณิต
นอกจากนี้ เรายังจะเขียนกราฟของฟังก์ชันที่สร้างจาก $f(x)$ ซึ่งเป็นการสร้างภาพด้วยวิธีพีชคณิต

Q3 หากจุด P ไปตามกราฟของฟังก์ชัน และสังเกตพฤติกรรมของจุด P' บันทึกข้อสังเกตที่ได้

คำอธิบายสรุป

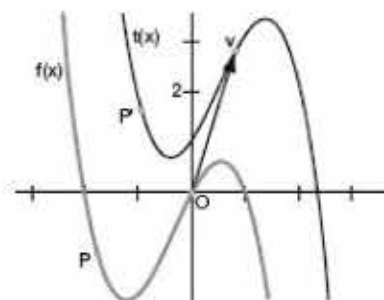
สร้างโลตัสของ P' ในขณะที่ P เคลื่อนไปตามกราฟของ $f(x)$ ทำโลตัสให้เป็นเส้นประสีฟ้าและ
กำหนดป้ายชื่อเป็น $t(x)$ ซึ่งเป็นภาพของกราฟของ $f(x)$ ที่ได้จากการเลื่อนขนานด้วยเวกเตอร์
 OV ต่อไป หากจุด V และสังเกตผลที่เวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน OV มีต่อ $t(x)$

หลังจากนั้น สร้างฟังก์ชันใหม่โดยใช้การบวกเพื่อแปลง $f(x)$ แบบพีชคณิต ให้เลือกปุ่ม แสดงตัว
เลื่อน เพื่อแสดงตัวเลื่อนสองอัน ใช้ค่าของตัวเลื่อนเพื่อเขียนกราฟของ $g(x) = f(x + a) + b$ หาก
ตัวเลื่อนแต่ละอัน แล้วสังเกตผลที่มีต่อกราฟของฟังก์ชัน $t(x)$

คำอธิบายอย่างละเอียด

ใช้เมนู แสดงผล | ซ่อน
และ แสดงผล | ปรากฏ
เปลี่ยนความหนาของ
ของโลตัส
ใช้ เครื่องมือสร้าง
ข้อความ เพื่อกำหนด
ป้ายชื่อของโลตัส

7. สร้างโลตัสของ P' ในขณะที่ P เคลื่อนไปตาม
กราฟของฟังก์ชัน โดยให้เลือกทั้ง P และ P'
ก่อน แล้วจึงเลือกเมนู สร้าง | โลตัส สิ่งที่ได้คือ
กราฟของ $t(x)$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อน
ขนาน $f(x)$ แสดงภาพนี้ด้วยเส้นประสีฟ้า
กำหนดป้ายชื่อเป็น $t(x)$



8. หากจุด P และสังเกตจุด P' หากจุด V และสังเกตผลที่เวกเตอร์ของการเลื่อนขนานมีต่อภาพ
 $t(x)$ ที่ได้จากการเลื่อนขนาน

คราวนี้ ให้ลองหาสมการพีชคณิตที่สมนัยกับฟังก์ชัน $t(x)$ ที่ได้จากการเลื่อนขนาน

ลองลากตัวเลื่อนเพื่อ
เปลี่ยนค่า

อาจต้องเลื่อนกล่อง
โต้ตอบฟังก์ชันใหม่ไป
ข้างๆ ถ้ากล่องโต้ตอบยัง
ฟังก์ชันอยู่ ต้องแน่ใจว่า
คลิกที่ฟังก์ชัน ไม่ใช่คลิกที่
กราฟของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันใหม่ไม่มีป้ายชื่อ
เป็น $g(x)$

9. คลิกปุ่ม แสดงตัวเลื่อน จะปรากฏตัวเลื่อนสองอัน

10. ใช้ค่าของตัวเลื่อนทั้งสองเพื่อเขียนกราฟของฟังก์ชัน $g(x) = f(x + a) + b$ ซึ่งทำได้โดยเลือก
เมนู กราฟ | เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ฟังก์ชันใหม่ ขึ้นมา ให้คลิก
ฟังก์ชัน $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$ ในแบบร่าง ในกล่องโต้ตอบฟังก์ชันใหม่ จะแสดง $f(|)$
ต่อไปให้คลิกปุ่ม x และปุ่ม $+$ ในกล่องโต้ตอบ และคลิกที่ค่าของตัวเลื่อน a ในแบบร่าง คลิก
วงเล็บปิด “)” ตามด้วยปุ่ม $+$ จากนั้น คลิกที่ค่าของตัวเลื่อน b ในแบบร่าง

11. เมื่อได้ฟังก์ชันที่ถูกต้องแล้ว ให้คลิก ตกลง ทำกราฟให้เป็นเส้นหนาสีเขียวสด

12. ลากตัวเลื่อนแต่ละอันไปมาและสังเกตผลที่มีต่อกราฟ

เทียบการแปลงทั้งสอง

ในหัวข้อนี้ เราจะปรับภาพที่ได้จากการแปลงทั้งสองภาพที่ได้สร้างขึ้นมา และสังเกตพฤติกรรม
จากนั้นจะแก้ไขการแปลงทางพีชคณิต $g(x)$ เพื่อให้ตรงกับการแปลงทางเรขาคณิต $t(x)$

Q3 ขณะที่ลากจุด V ภาพ $t(x)$ ที่ได้จากการแปลงทางเรขาคณิตซึ่งเป็นกราฟที่สร้างจากเมนู
โลคัส จะมีรูปร่าง ขนาด และทิศทางเหมือนกับภาพต้นแบบ $f(x)$ เสมอหรือไม่ นอกจากนี้
คิดว่า $t(x)$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของ $f(x)$ หรือไม่

Q4 ขณะที่ลากตัวเลื่อน กราฟของ $g(x)$ ที่สร้างด้วยวิธีพีชคณิต จะมีรูปร่าง ขนาด และทิศทาง
เหมือนกับภาพต้นแบบ $f(x)$ เสมอหรือไม่ นอกจากนี้ คิดว่ากราฟของ $g(x)$ เป็นภาพที่ได้จาก
การเลื่อนขนานกราฟของ $f(x)$ หรือไม่

สามารถคลิกปุ่มที่สร้างไว้
ให้ในแบบร่าง เพื่อตั้งค่า a
หรือ b ให้เป็นศูนย์

Q5 เกิดอะไรขึ้นกับกราฟของ $g(x)$ เมื่อเราปรับค่า b ให้เป็นศูนย์ แล้วลากตัวเลื่อนเปลี่ยนแปลงค่า
 a เกิดอะไรขึ้นเมื่อ a เป็นลบหรือเป็นบวก ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

Q6 เกิดอะไรขึ้นกับกราฟของ $g(x)$ เมื่อเราปรับค่า a ให้เป็นศูนย์ แล้วลากตัวเลื่อนเปลี่ยนแปลงค่า
 b เกิดอะไรขึ้นเมื่อ b เป็นลบหรือเป็นบวก ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

สร้างตารางโดยเลือกค่า
 a, b, x_V และ y_V ทั้งสี่ค่า
แล้วเลือกเมนู กราฟ |
สร้างตาราง

Q7 ปรับค่า a เป็น 3 ปรับค่า b เป็นศูนย์ แล้วจึงปรับเวกเตอร์ OV เพื่อให้ $t(x)$ ซ้อนกับ $g(x)$
เวกเตอร์ OV ต้องชี้ในทิศทางใด สร้างตารางแสดงค่าของ a, b, x_V และ y_V

เพิ่มข้อมูลในตารางได้
โดยการดับเบิลคลิก
ตารางด้วยเครื่องมือ
ลูกศร

Q8 ปรับค่า a เป็นศูนย์ ปรับค่า b เป็น -3 แล้วจึงปรับเวกเตอร์ OV เพื่อให้ $t(x)$ ซ้อนกับ $g(x)$
เวกเตอร์ OV ต้องชี้ในทิศทางใด เพิ่มข้อมูลแถวใหม่ของ a, b, x_V และ y_V เข้าไปในตาราง