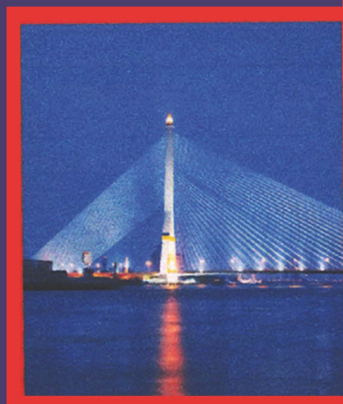
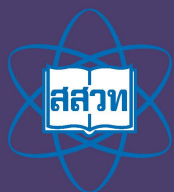


ทักษะและกระบวนการ ทางคณิตศาสตร์



พิมพ์ครั้งที่ ๓
แก้ไขเพิ่มเติม



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ทักษะและกระบวนการ ทางคณิตศาสตร์



จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ชื่อหนังสือ	ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
ชื่อผู้แต่ง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ 924 ถนนสุขุมวิท แขวงพระโขนง เขตคลองเตย กรุงเทพฯ 10110 โทรศัพท์ 0 2392 4021 ต่อ 3102, 3106 โทรสาร 0 2392 3596 Website: http://www.ipst.ac.th
ลิขสิทธิ์โดย พิมพ์ครั้งที่ 3	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) พ.ศ. 2554
จำนวนพิมพ์	5,000 เล่ม
จัดพิมพ์และจัดจำหน่าย	ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 โทรศัพท์ 0-2255-4433, 0-2218-9891 Website : http://www.chulabook.com
ออกแบบอาร์ตเวิร์ค	บริษัท พาบุญมา จำกัด

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ISBN : 978-974-9955-68-0

พิมพ์ที่ หจก. โรงพิมพ์วชิรรินทร์ พี. พี.

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ให้พัฒนาหลักสูตร จัดทำหนังสือเรียน และคู่มือครูของกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ที่สอดคล้องตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน (ป.1-ม.6)

หนังสือเล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อส่งเสริมและพัฒนากิจการการเรียนรู้ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเหมาะสำหรับครูผู้สอนและผู้สนใจทั่วไปนำไปเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอน เพื่อให้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ามาเป็นส่วนหนึ่งในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งนี้ผู้สอนสามารถปรับเนื้อหาหรือวิธีการให้เหมาะสมกับนักเรียนแต่ละกลุ่มได้

ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากหลายหน่วยงาน สสวท. จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อันเป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ต่อไป

หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้งให้ สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

(นางพรพรรณ ไวยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

หนังสืออ่านเสริมความรู้สำหรับครูคณิตศาสตร์และผู้สนใจในสาระที่ 6 เรื่อง *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์* เล่มนี้เหมาะสำหรับครูผู้สอนในระดับมัธยมศึกษาและผู้สนใจทั่วไป เนื้อหาในเล่มนี้เป็นการแนะนำให้ผู้อ่านทราบว่าทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างไร การจัดการเรียนการสอนที่มีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ทำอย่างไร พร้อมทั้งตัวอย่างปัญหาที่ใช้ในกิจกรรมการเรียนการสอนที่มีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

หากผู้อ่านมีข้อสงสัยเกี่ยวกับเนื้อหาหนังสือเล่มนี้ อาจถามผู้รู้ หรือครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ที่คุ้นเคยในเรื่องนี้ หรือสอบถามไปที่ สสวท.

คณะผู้จัดทำหนังสือ ได้พยายามจัดทำหนังสือเล่มนี้ให้ดีที่สุด อย่างไรก็ตาม อาจมีข้อบกพร่องอยู่บ้าง หากผู้อ่านท่านใดมีข้อเสนอแนะ เพื่อการปรับปรุงแก้ไข ขอได้โปรดส่งข้อคิดเห็นไปที่ สสวท. 924 สุขุมวิท กทม. 10110 จักเป็นพระคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	1
1.1 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	6
ความหมายของปัญหาและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	6
กระบวนการแก้ปัญหา	7
ยุทธวิธีแก้ปัญหา	11
1.2 การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	38
ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	39
รูปแบบของการให้เหตุผล	40
1.3 การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์	54
และการนำเสนอ	
ความหมายของการสื่อสาร การสื่อความหมาย	
ทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ	59
กิจกรรมที่ส่งเสริมการสื่อความหมาย	
ทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ	63
1.4 การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์	83
ความหมายของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์	84
แบบของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์	84



	หน้า
1.5 ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์	113
ความหมายของความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	114
องค์ประกอบของความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	115
ลักษณะของผู้มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	130
ขั้นตอนการพัฒนาความคิดที่นำไปสู่ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	132
 บทที่ 2 การจัดการเรียนการสอนที่มีทักษะและ กระบวนการทางคณิตศาสตร์	 135
2.1 มาตรฐานทางด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	136
มาตรฐานทางด้านการแก้ปัญหา	136
มาตรฐานทางด้านการให้เหตุผลและการพิสูจน์	137
มาตรฐานทางด้านการสื่อสาร	138
มาตรฐานทางด้านการเชื่อมโยง	138
มาตรฐานทางด้านการนำเสนอ	139
ความสามารถทางด้านความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	141
2.2 แนวการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่มีทักษะและ กระบวนการทางคณิตศาสตร์	 143
การเตรียมกิจกรรมการเรียนการสอน	143
การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน	150
การประเมินผล	158



	หน้า
2.3 ตัวอย่างปัญหาที่ใช้ในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่มีทักษะ	
และกระบวนการทางคณิตศาสตร์	178
ปัญหาน้ำในเหยือก	178
ปัญหาการแบ่งรูปสามเหลี่ยม	180
ปัญหาการตัดเย็บเสื้อผ้า	185
ปัญหาท่อนไม้	188
ปัญหาไซโล	190
ปัญหาโคลนนิ่งรูปสามเหลี่ยม	192
ปัญหาการเลือกซื้อ	196
ปัญหาการขายตะกร้า	199
ปัญหาการแบ่งครึ่งมุมภายในและมุมภายนอก	201
ปัญหาการปูกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยม	204
ปัญหาอัตราเร็วของรถ	206
กิจกรรมเกี่ยวกับกระดาษ A4	209



บทที่ 1

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล กระบวนการคิด และการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาที่ช่วยเสริมสร้างให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผล มีการคิดอย่างมีวิจารณญาณและเป็นระบบ ตลอดจนมีทักษะการแก้ปัญหา ทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ซึ่งเป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวัน ยิ่งกว่านั้น คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ทำให้มีการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างมากมายในทุกวันนี้

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมา แม้นักเรียนจะมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระเป็นอย่างดี แต่นักเรียนจำนวนไม่น้อยยังด้อยความสามารถเกี่ยวกับการแก้ปัญหา การแสดงหรืออ้างอิงเหตุผล การสื่อสารหรือการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ต่าง ๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ปัญหาเหล่านี้ทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ไปประยุกต์ในชีวิตประจำวัน และในการศึกษาต่อได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เพื่อให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพตามเป้าหมายของการศึกษาแห่งชาติ พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542¹ ได้ให้ความสำคัญกับแนวทางในการจัดกระบวนการเรียนรู้สำหรับให้สถานศึกษาและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องดำเนินการตามเป็นการเฉพาะ โดยกำหนดไว้ในมาตรา 24 หมวดที่ 4 ว่าด้วยการจัดกระบวนการเรียนรู้ ดังนี้



1. จัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของผู้เรียน โดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล
2. จัดให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะ กระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์ และการประยุกต์ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ปัญหา
3. จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติ ให้ทำได้ คิดเป็น ทำเป็น รักการอ่านและเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง
4. จัดการเรียนการสอนโดยผสมผสานสาระความรู้ด้านต่าง ๆ อย่างได้สัดส่วนสมดุลกัน รวมทั้งปลูกฝังคุณธรรม ค่านิยมที่ดีงาม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ไว้ในทุกวิชา
5. ส่งเสริมสนับสนุนให้ผู้สอนสามารถจัดบรรยากาศ สภาพแวดล้อม สื่อการเรียน และอำนวยความสะดวกเพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และมีความรอบรู้ รวมทั้งสามารถใช้การวิจัยเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนรู้ ทั้งนี้ผู้สอนและผู้เรียนอาจเรียนรู้ไปพร้อมกัน จากสื่อการเรียนการสอนและแหล่งวิทยาการประเภทต่าง ๆ
6. จัดการเรียนรู้ให้เกิดขึ้นได้ทุกเวลาทุกสถานที่ มีการประสานความร่วมมือกับบิดา มารดา ผู้ปกครอง และบุคคลในชุมชนทุกฝ่าย เพื่อร่วมกันพัฒนาผู้เรียนตามศักยภาพ

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551² ได้ สนับสนุนการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีลักษณะดังกล่าว โดยการกำหนดกรอบสาระ มาตรฐานการเรียนรู้ และตัวชี้วัดชั้นปีสำหรับคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน เพื่อเป็นเกณฑ์ในการกำหนดคุณภาพของผู้เรียนเมื่อเรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐานและเมื่อเรียนจบในแต่ละชั้นไว้

สาระการเรียนรู้ที่กำหนดประกอบด้วย 6 สาระ ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

สาระที่ 2 การวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

หนังสือตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551³ ได้เสนอแนะว่า การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีคุณภาพนั้น จะต้องให้มีความสมดุลระหว่างสาระด้านความรู้ ทักษะและกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์



สำหรับสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551² ได้กำหนดมาตรฐานที่สำคัญไว้ ดังนี้

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยง ความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ถึง ศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

การกำหนดให้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นสาระหนึ่งในกลุ่มสาระ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากนักการศึกษาคณิตศาสตร์ตระหนักถึงความสำคัญและจำเป็น ไม่เพียงแต่ประเทศไทยเท่านั้นที่หันมาสนใจส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในทุกระดับชั้นของหลักสูตรคณิตศาสตร์ ยังมีประเทศอื่น ๆ อีกทั่วโลกที่สนใจส่งเสริมทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้วยเช่นกัน เช่น ออสเตรเลีย สิงคโปร์ และสหรัฐอเมริกา สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics หรือ NCTM) ซึ่งเป็นองค์กรสำคัญที่มีบทบาทอย่างมากต่อการเรียนการสอน คณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนในสหรัฐอเมริกาและทั่วโลก ได้เสนอในหนังสือมาตรฐานหลักสูตร และการประเมินผลคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)⁴ ในปี ค.ศ. 1989 และหนังสือหลักการ และมาตรฐานสำหรับ คณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน (Principles and Standards for School Mathematics)⁵ ในปี ค.ศ. 2000 ว่าด้วย **มาตรฐานทางด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์** ที่ควร ส่งเสริมให้นักเรียนที่เรียนในระดับโรงเรียนได้เรียนรู้ฝึกฝนทักษะและพัฒนาให้เกิดขึ้น ประกอบด้วยการแก้ปัญหา การให้เหตุผลและการพิสูจน์ การสื่อสาร การเชื่อมโยงและการ นำเสนอ ซึ่งสิ่งเหล่านี้ส่งผลให้นักการศึกษาทั่วโลก รวมทั้งนักการศึกษาของไทยหันมาสนใจ ศึกษาเกี่ยวกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น

เพื่อให้เข้าใจตรงกันเกี่ยวกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ในสาระที่ 6 ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ในส่วนต่อไปของบทนี้ จะเป็นการอธิบายรายละเอียดเกี่ยวกับลักษณะของแต่ละทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในสาระที่ 6 ดังกล่าว

เอกสารอ้างอิง

- ¹ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2542). *พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542*. กรุงเทพฯ : Seven Printing Group.
- ² กระทรวงศึกษาธิการ. (2544). *คู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- ³ สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (2552). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- ⁴ National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.
- ⁵ National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.



1.1 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในชีวิตประจำวันกิจกรรมที่เราทำอยู่เป็นประจำก็คือ การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง เช่น ปัญหาการเดินทาง ปัญหาการเรียน ปัญหาการทำงาน เป็นต้น ในบรรดาปัญหาเหล่านั้นมีทั้งปัญหาที่เราสามารถแก้ได้ง่าย โดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิม ๆ และปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อนมากจนเราไม่สามารถแก้ปัญหานั้นได้ในทันที ต้องอาศัยความรู้ทักษะและกระบวนการ ร่วมกับเทคนิควิธีหลายอย่างในการแก้ปัญหา ซึ่งถ้าเรามีความรู้หรือแหล่งความรู้ที่เพียงพอ เข้าใจขั้นตอน/กระบวนการในการแก้ปัญหา มีเทคนิค/ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม ตลอดจนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหามาก่อน เราก็สามารถแก้ปัญหานั้นได้ดีและมีประสิทธิภาพ

การแก้ปัญหา เป็นกระบวนการที่ผู้เรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน การเรียนการแก้ปัญหามathematics จะช่วยให้ผู้เรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้น ไม่ย่อท้อ และมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่ผู้เรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้นานตลอดชีวิต

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ได้กล่าวไว้ในหนังสือประจำปี ค.ศ.1980 : Problem Solving in School Mathematics¹ ว่า **การแก้ปัญหาคือหัวใจของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์** พร้อมทั้งนำเสนอแนวคิดต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนการสอนการแก้ปัญหาในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ที่เชื่อว่าจะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพดีขึ้น สิ่งนี้ส่งผลให้นักการศึกษาทั่วโลกหันมาสนใจศึกษาการแก้ปัญหามathematics ในทุกระดับชั้นของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในการศึกษาเหล่านั้น นักการศึกษา

