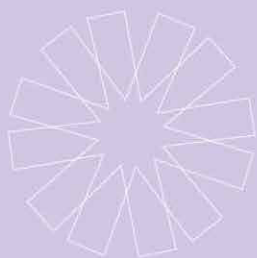




สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สมการเชิงฟังก์ชัน





สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์

สมการเชิงฟังก์ชัน

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
www.Chulabook.com

ชื่อเรื่อง	เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงฟังก์ชัน
ชื่อผู้แต่ง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
ลิขสิทธิ์โดย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
พิมพ์ครั้งที่ 2	พ.ศ. 2556
จำนวน	4,000 เล่ม
ราคา	90 บาท

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



**CHULA
BOOK**

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ : 0-2255-4433 , 0-2218-9891

Website : <http://www.chulabook.com>

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ สมการเชิงฟังก์ชัน.-- กรุงเทพฯ : ไชยเอ็ดพับลิชชิ่ง, 2556.

73 หน้า.

1. ฟังก์ชัน. I. ชื่อเรื่อง.

511.326

ISBN 978-616-237-201-8

พิมพ์ที่ บริษัท ฐานบัณฑิต จำกัด

188/5 ซอยเพชรเกษม 51 ถนนเพชรเกษม แขวงบางแคเหนือ เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10160

โทร. 0 2801 3934-8

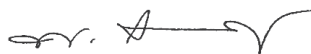
นายสมัย ต่ายสกุลทิพย์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เป็นหน่วยงานในกำกับของกระทรวงศึกษาธิการ มีหน้าที่หลักสำคัญประการหนึ่ง คือ การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อและเอกสารส่งเสริมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศ และการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี

ภารกิจหลักสำคัญอีกประการหนึ่งของ สสวท. ได้แก่การส่งเสริมศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถและสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี สสวท. จึงได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ขึ้นสำหรับผู้ที่มีความสนใจและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หนังสือชุดนี้มีด้วยกันทั้งหมด 8 เล่ม คือ พีชคณิต เรขาคณิต สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์ คอมบินาทอริก อสมการ และทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งหนังสือชุดนี้จะให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งขึ้นจากบทเรียนตามหลักสูตร นักเรียน ครู และผู้ที่สนใจ ที่ต้องการพัฒนาความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้นควรศึกษาหนังสือชุดนี้ และหนังสือชุดนี้ยังเหมาะสมกับนักเรียนชั้นเรียนพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมถึงเป็นพื้นฐานที่ดีแก่ผู้ที่ต้องการเตรียมตัวสมัครเข้ารับการรับการอบรมในค่ายโอลิมปิกวิชาการอีกด้วย

ในการจัดพิมพ์หนังสือชุดนี้ในครั้งนี้ สสวท. ได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมยิ่งขึ้น โดยได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากหลายหน่วยงาน สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูและนักเรียน ตลอดจนผู้สนใจ และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำหนังสือชุดนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

ในการพิมพ์ครั้งที่ 1

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการให้พัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อประกอบการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อช่วยส่งเสริมให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร

เอกสารเสริมความรู้เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษาให้กับนักเรียน นักศึกษา อาจารย์และผู้สนใจ สำหรับศึกษาค้นคว้าในอันที่จะพัฒนาความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่าน และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำเอกสารเล่มนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นายพิศาล สร้อยสุหรำ)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ เพื่อเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้เต็มเต็มศักยภาพของตัวเองให้สูงสุด และสำหรับครูคณิตศาสตร์ที่จะต้องสอนนักเรียนห้องเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเนื้อหาและลำดับขั้นตอนการนำเสนอในหนังสือชุดนี้ ได้อิงความรู้ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วตามหลักสูตร ถ้าหากหัวข้อเรื่องใดที่อิงความรู้พื้นฐานที่นักเรียนยังไม่ได้เรียน หนังสือชุดนี้ได้สรุปเนื้อหาพื้นฐานนั้นไว้ก่อนเพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนสามารถศึกษาได้ อย่างเป็นลำดับขั้นของความรู้ เพื่อให้ผู้สนใจสามารถค้นคว้าและศึกษาได้ด้วยตนเอง

หนังสือชุดนี้มี 8 เล่ม นักเรียนหรือคุณครูจะเลือกเรียนหรือเลือกสอนเรื่องใดก่อนก็ได้ ด้วยมีเนื้อหาเป็นอิสระแก่กัน คณะกรรมการจัดทำได้พยายามอย่างยิ่งที่จะพัฒนาหนังสือชุดนี้ให้เป็นหนังสือที่สมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม หากท่านพบข้อบกพร่องหรือมีข้อเสนอแนะเพิ่มเติม โปรดส่งข้อเสนอแนะของท่านไปยังสาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จะเป็นพระคุณอย่างยิ่ง ทั้งนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงเอกสารให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ

บทนำ	ก
บทที่ 1 ฟังก์ชันบน และ	1
บทที่ 2 การแก้ปัญหасмการเชิงฟังก์ชัน โดยการแทนค่าด้วยตัวแปรที่เหมาะสม	14
บทที่ 3 ฟังก์ชัน 1 – 1 ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันทางเดียว และฟังก์ชันมีขอบเขต	22
บทที่ 4 ฟังก์ชันคาบ	36
บทที่ 5 สมการโคชีและบทประยุกต์	41
บทที่ 6 ตัวอย่างโจทย์ในการแข่งขัน IMO	58
โจทย์สมการเชิงฟังก์ชันในการแข่งขัน IMO	67

บทนำ

เรากำลังจะคุยเกี่ยวกับการแก้สมการเชิงพีชคณิต เช่น

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\log(3x + 2) - \log(x - 1) = 1$$

$$3 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^{-x} = 10$$

ปัญหาเหล่านี้คือการหาจำนวนจริง x ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องสมการดังกล่าว เรามีวิธีการแก้สมการเชิงพีชคณิตหลากหลายวิธี นอกจากนี้ยังมีการขยายเอกภพสัมพัทธ์หรือขอบเขตที่พิจารณาเป็นการแก้สมการในระบบจำนวนเชิงซ้อน เพื่อให้สมการ เช่น

$$x^2 + 1 = 0$$

มีผลเฉลย ในบางครั้งเราต้องการหาผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนนับ ย่อมต้องมีวิธีการแตกต่างออกไป

ในหนังสือเล่มนี้ เราศึกษาสมการในรูปแบบที่แตกต่างออกไป กล่าวคือสมการที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชัน การแก้สมการเชิงฟังก์ชัน คือการหาฟังก์ชันทั้งหมดที่มีโดเมนเป็นเซตที่กำหนดให้ ค่าของฟังก์ชันสอดคล้องเงื่อนไขบางประการที่กำหนดให้ และค่าของฟังก์ชันเป็นสมาชิกของเซตที่กำหนดให้

เซตที่กำหนดให้ส่วนใหญ่เป็นสับเซตที่สำคัญของเซตของจำนวนจริง ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์แทนดังนี้

$\mathbb{R}$ แทน เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

$\mathbb{Q}$ แทน เซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด

$\mathbb{Z}$ แทน เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

$\mathbb{N}$ แทน เซตของจำนวนนับทั้งหมด

$\mathbb{N}_0$ แทน $\mathbb{N} \cup \{0\}$

นอกจากนี้เรายังใช้สัญลักษณ์

$\mathbb{R}^+$ แทน เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด

$\mathbb{Q}^+$ แทน เซตของจำนวนตรรกยะบวกทั้งหมด

$\mathbb{R}^*$ แทน $\mathbb{R} - \{0\}$

เนื่องจากโดเมนของฟังก์ชันได้ถูกกำหนดไว้แล้ว เราจึงเขียนคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันในรูปปิด กล่าวคือเขียน $f(x)$ ในรูปสูตรที่เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนในโดเมนแล้วสามารถคำนวณ

ค่าออกมาได้โดยตรง เช่น

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$f(x) = 3^x$$

$$f(x) = \log(x+1)$$

เงื่อนไขที่กำหนดให้ส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปสมการหรืออสมการเชิงพีชคณิตของค่าของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

(1) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องสมการ

$$f(x) + 3f(1-x) = 2x + x - \frac{5}{2} \quad \text{ทุก } x \in \mathbb{R}$$

(2) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องสมการ

$$f(m + f(n)) = f(m) + n \quad \text{ทุก } m, n \in \mathbb{Z}$$

(3) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องสมการ

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{ทุก } x, y \in \mathbb{N}$$

(4) จงหาฟังก์ชัน $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

$$(ii) \quad f(x) > -\frac{1}{x} \quad \text{ทุก } x \in (0, \infty)$$

$$(iii) \quad f(x) \cdot f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{ทุก } x \in (0, \infty)$$

(5) จงหาฟังก์ชัน f และ g ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(i) \quad f(2x+1) + 2g(2x+1) = 2x \quad \text{ทุก } x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad f\left(\frac{x}{x-1}\right) + g\left(\frac{x}{x-1}\right) = x \quad \text{ทุก } x \in \mathbb{R}$$

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = x$ ทุก $x \in \mathbb{N}$

จะเห็นได้โดยง่ายว่า $f(x+y) = x+y = f(x) + f(y)$ ทุก $x, y \in \mathbb{N}$

นั่นคือ f สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชันในตัวอย่าง (3) ข้างต้น

ให้ g เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $g(x) = -x$ ทุก $x \in \mathbb{N}$
 จะได้ว่า $g(x + y) = -(x + y) = (-x) + (-y) = g(x) + g(y)$
 นั่นคือ $g(x + y) = g(x) + g(y)$ ทุก $x, y \in \mathbb{N}$
 แต่ g ไม่ใช่ผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันในตัวอย่าง (3) เพราะ $g(1) = -1 \notin \mathbb{N}$

ฉะนั้นในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องตรวจสอบว่า สมการที่ได้สอดคล้องเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้หรือไม่ โดยเฉพาะอย่างยิ่งต้องตรวจสอบว่า สอดคล้องสมการที่กำหนดให้หรือไม่ (ดูตัวอย่าง 2.3 และตัวอย่าง 2.4) นอกจากนี้เราจะทราบได้อย่างไรว่าเราได้หาผลเฉลยครบแล้ว เราจะเริ่มแก้ปัญหาโดยสมมติว่ามีฟังก์ชัน (ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์ตามความต้องการของโจทย์) ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดให้ แล้วพยายามหารูปปิด (สูตร) สำหรับ $f(x)$ และจบด้วยการตรวจสอบว่า ฟังก์ชันตามสูตรที่ได้มาสอดคล้องเงื่อนไขทั้งหมดที่กำหนดให้จริง

ผู้เขียนใช้ประสบการณ์การสอนเรื่อง สมการเชิงฟังก์ชันในค่ายเตรียมตัวแทนนักเรียนไทย เพื่อการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับนานาชาติ (International Mathematical Olympiad) ในการเขียนหนังสือเล่มนี้โดยมีวัตถุประสงค์หลักเพื่อใช้สำหรับนักเรียนในค่าย และผู้สนใจแก้ปัญหาโจทย์ระดับการแข่งขัน มิได้เขียนในแนววิจัยทางสาขานี้โดยตรง วัตถุประสงค์หลัก คือการแก้สมการเชิงฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขแตกต่างกันไป

โจทย์ส่วนใหญ่เป็นโจทย์แข่งขันระดับชาติ หรือโจทย์คัดเลือกตัวแทนเพื่อเข้าแข่งขัน IMO ของประเทศต่าง ๆ ทั่วโลก ซึ่งได้มาจากการแลกเปลี่ยนกันในช่วงการแข่งขัน IMO ผู้เขียนขออภัยที่ไม่ได้อ้างอิงถึงแหล่งที่มาของแต่ละข้อเนื่องจากไม่สามารถสืบถึงต้นตอของโจทย์ส่วนใหญ่ ด้วยเหตุที่มีการแลกเปลี่ยนโจทย์กันระหว่างประเทศที่เข้าร่วมการแข่งขันอยู่เป็นนิจดังกล่าว นอกจากนี้ได้เสนอวิธีทำมากกว่าหนึ่งวิธีเท่าที่จะทำได้ในโจทย์แต่ละข้อเพื่อให้เห็นถึงความงามและความท้าทายในการแก้ปัญหাসมาการเชิงฟังก์ชัน บางส่วนได้รวบรวมจากนักเรียนในค่ายซึ่งมีวิธีทำสั้น กระชับรัดกุม ผู้เขียนขอขอบคุณ รศ.ดร.วิชาญ ลีวัชรดิษฐกุล สำหรับข้อคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ยิ่ง