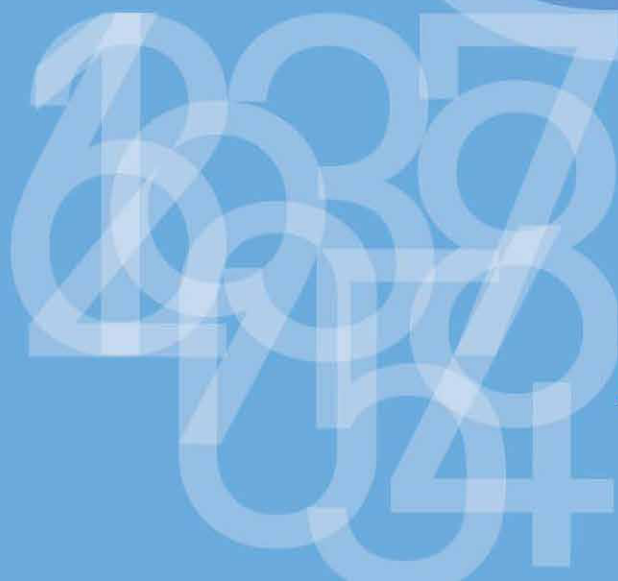
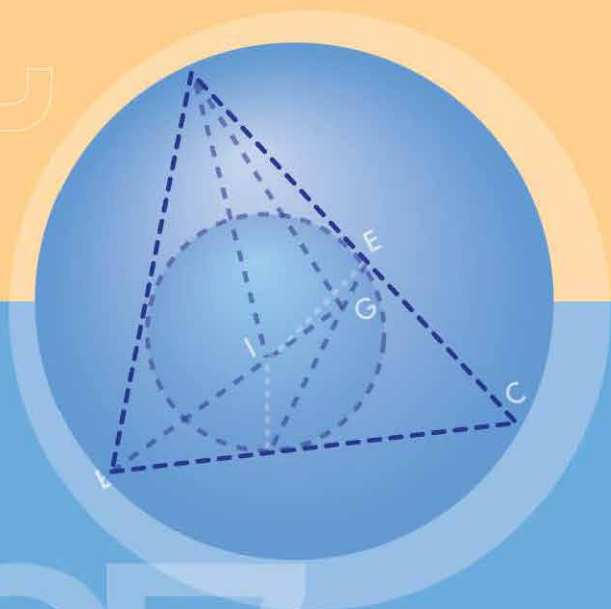




สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ



เรขาคณิต





สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์

เรขาคณิต

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
www.Chulabook.com

ชื่อเรื่อง	เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิต
ชื่อผู้แต่ง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
ลิขสิทธิ์โดย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
พิมพ์ครั้งที่ 4	พ.ศ. 2556
จำนวน	4,000 เล่ม
ราคา	90 บาท

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ : 0-2255-4433 , 0-2218-9891

Website : <http://www.chulabook.com>

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรขาคณิต.-- กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง, 2556.

75 หน้า.

1. เรขาคณิต. I. ชื่อเรื่อง.

516

ISBN 978-616-237-176-9

พิมพ์ที่ บริษัท ฐานบัณฑิต จำกัด

188/5 ซอยเพชรเกษม 51 ถนนเพชรเกษม แขวงบางแคเหนือ เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10160

โทร. 0 2801 3934-8

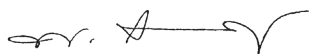
นายสมัย ต่ายสกุลทิพย์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เป็นหน่วยงานในกำกับของกระทรวงศึกษาธิการ มีหน้าที่หลักสำคัญประการหนึ่ง คือ การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อและเอกสารส่งเสริมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศ และการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี

ภารกิจหลักสำคัญอีกประการหนึ่งของ สสวท. ได้แก่การส่งเสริมศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถและสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี สสวท. จึงได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ขึ้นสำหรับผู้ที่มีความสนใจและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หนังสือชุดนี้มีด้วยกันทั้งหมด 8 เล่ม คือ พีชคณิต เรขาคณิต สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์ คอมบินาทอริก อสมการ และทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งหนังสือชุดนี้จะให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งขึ้นจากบทเรียนตามหลักสูตร นักเรียน ครู และผู้ที่สนใจ ที่ต้องการพัฒนาความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้นควรศึกษาหนังสือชุดนี้ และหนังสือชุดนี้ยังเหมาะสมกับนักเรียนชั้นเรียนพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมถึงเป็นพื้นฐานที่ดีแก่ผู้ที่ต้องการเตรียมตัวสมัครเข้ารับการรับการอบรมในค่ายโอลิมปิกวิชาการอีกด้วย

ในการจัดพิมพ์หนังสือชุดนี้ในครั้งนี้ สสวท. ได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมยิ่งขึ้น โดยได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากหลายหน่วยงาน สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูและนักเรียน ตลอดจนผู้สนใจ และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำหนังสือชุดนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

ในการพิมพ์ครั้งที่ 1

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการให้พัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อประกอบการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อช่วยส่งเสริมให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร

เอกสารเสริมความรู้เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษาให้กับนักเรียน นักศึกษา อาจารย์และผู้สนใจ สำหรับศึกษาค้นคว้าในอันที่จะพัฒนาความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่าน และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำเอกสารเล่มนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นายพิศาล สร้อยธุหร่า)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ เพื่อเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้เพิ่มเติมศักยภาพของตัวเองให้สูงสุด และสำหรับครูคณิตศาสตร์ที่จะต้องสอนนักเรียนห้องเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ด้วยเนื้อหาและลำดับขั้นตอนการนำเสนอในหนังสือชุดนี้ ได้อิงความรู้ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วตามหลักสูตร ถ้าหากหัวข้อเรื่องใดที่อิงความรู้พื้นฐานที่นักเรียนยังไม่ได้เรียน หนังสือชุดนี้ได้สรุปเนื้อหาพื้นฐานนั้นไว้ก่อน เพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนสามารถศึกษาได้อย่างเป็นลำดับขั้นของความรู้ เพื่อให้ผู้สนใจสามารถค้นคว้าและศึกษาได้ด้วยตนเอง

หนังสือชุดนี้มี 8 เล่ม นักเรียนหรือคุณครูจะเลือกเรียนหรือเลือกสอนเรื่องใดก่อนก็ได้ ด้วยมีเนื้อหาเป็นอิสระแก่กัน คณะกรรมการจัดทำได้พยายามอย่างยิ่งที่จะพัฒนาหนังสือชุดนี้ให้เป็นหนังสือที่สมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม หากท่านพบข้อบกพร่องหรือมีข้อเสนอแนะเพิ่มเติม โปรดส่งข้อเสนอแนะของท่านไปยังสาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จะเป็นพระคุณอย่างยิ่ง ทั้งนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงเอกสารให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ		
บทนำ		ก
บทที่ 1	ความรู้พื้นฐาน	1
บทที่ 2	สมบัติบางประการของเส้นตรงและรูปสามเหลี่ยม	13
บทที่ 3	สมบัติบางประการของวงกลม	28
บทที่ 4	สมบัติบางประการของรูปสามเหลี่ยมและวงกลม	38
บทที่ 5	การสร้าง	62

บทนำ

หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่อเผยแพร่เนื้อหาทางเรขาคณิตในสองมิติ เพิ่มเติมจากที่พบในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วไป

พื้นฐานทางเรขาคณิตที่จำเป็นในการอ่านและทำความเข้าใจ คือ ความรู้เบื้องต้นของเรขาคณิตในสองมิติเทียบกับสิ่งที่ปรากฏในหนังสือเรียนของระดับมัธยมศึกษาตอนต้น อย่างไรก็ตามผลต่างๆ ในหนังสือเรียนดังกล่าวได้รับการรวบรวมไว้ในบทที่ 1 โดยไม่มีการพิสูจน์

บทที่ 2 กล่าวถึงสมบัติบางประการของเส้นตรงและรูปสามเหลี่ยม โดยมีทฤษฎีบทที่สำคัญประกอบด้วย ทฤษฎีบทของ Stewart ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางการกำหนด ทฤษฎีบทของ Menelaus และบทกลับ ซึ่งให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการที่จุดสามจุดจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ทฤษฎีบทของ Ceva และบทกลับ ซึ่งให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการที่เส้นตรงสามเส้นจะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง

บทที่ 3 กล่าวถึงสมบัติบางประการของวงกลม เช่น ผลคูณของความยาวคอร์ด ทฤษฎีบทของ Ptolemy และบทกลับ ซึ่งให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการที่จุดสี่จุดมีวงกลมล้อมรอบได้

บทที่ 4 กล่าวถึงสมบัติบางประการของรูปสามเหลี่ยมและวงกลม เช่น วงกลมแนบใน วงกลมแนบนอกและวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ความสัมพันธ์ระหว่างด้าน พื้นที่และรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบแนบนอก หรือแนบในรูปสามเหลี่ยม ในบทนี้มีทฤษฎีบทที่สำคัญจำนวนมาก เช่น ทฤษฎีบทของ Euler ว่าด้วยระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทว่าด้วยเส้น Euler ซึ่งเชื่อมจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ จุดออร์โทเซนเตอร์และจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทว่าด้วยวงกลมเก้าจุด ทฤษฎีบทของ Feuerbach ทฤษฎีบทว่าด้วยเส้น Simson ซึ่งเป็นเส้นตรงที่เชื่อมจุดปลายเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดบนวงกลมล้อมรอบไปยังด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสามเหลี่ยม pedal

บทที่ 5 กล่าวถึงการสร้างพื้นฐานที่ทำได้โดยตรงจากวงเวียนและไม้บรรทัด

ผู้อ่านจะสังเกตได้ว่า เนื้อหาทั้งหมดอยู่ในรูปแบบที่เรียกว่าเป็นเรขาคณิตแบบฉบับของยุคลิด (Euclid classical geometry) และวิธีการพิสูจน์ก็เช่นกัน ตามความเป็นจริงแล้วการพิสูจน์ทฤษฎีบทและผลทางเรขาคณิตสองมิติ หรือเรขาคณิตในระนาบนั้น นอกจากวิธีแบบฉบับของยุคลิดแล้วยังมีวิธีการสำคัญอื่น ๆ อีกหลายวิธี ได้แก่ วิธีตรีโกณมิติ วิธีเวกเตอร์ วิธีจำนวนเชิงซ้อน และวิธีใช้พิกัดสองมิติ ซึ่งล้วนเป็นสิ่งที่น่าศึกษาทั้งสิ้น แต่อาจต้องใช้ความรู้ในระดับสูงขึ้นไปกว่าที่จำเป็นต้องใช้ในการอ่านหนังสือเล่มนี้ อย่างไรก็ตามความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาไม่ว่าจะใช้วิธีใดถือเป็นความสำเร็จที่ยอมรับได้ทั้งสิ้น และในทางปฏิบัติ ตลอดจนในชีวิตจริง คงไม่มีใครบอกได้ว่าหัวข้อว่าใช้วิธีใดจึงจะเหมาะสมหรือถูกต้องมากที่สุด สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ขึ้นกับความคุ้นเคย ความถนัด และความสามารถของผู้แก้ปัญหาเอง

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

- สัญลักษณ์ AB นอกจากแทนด้าน AB แล้ว ยังหมายถึง ความยาวด้าน AB ด้วย ในขณะที่ $\overline{AB}$ แทนส่วนของเส้นตรง AB (หรือความยาวของส่วนของเส้นตรงนี้) พร้อมเครื่องหมาย + เมื่อพิจารณาการวัดจาก A ไป B ดังนั้น $\overline{AB} = -\overline{BA}$ แต่ $AB = BA$
- ในรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีจุดยอดที่ A, B และ C
 - แทนความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามจุดยอด A
 - แทนความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามจุดยอด B
 - แทนความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามจุดยอด C $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ แทนครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC
 h_a, h_b, h_c แทนความสูงที่ลากจากจุดยอด A, B, C ตามลำดับ
 m_a, m_b, m_c แทนความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากมาจากจุดยอด A, B, C ตามลำดับ
 I แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน
 I_a, I_b, I_c แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบนอกที่อยู่ตรงข้ามจุดยอด A, B, C ตามลำดับ
 S แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ
 r แทนรัศมีของวงกลมแนบใน
 r_a, r_b, r_c แทนรัศมีของวงกลมแนบนอกที่มีจุดศูนย์กลาง I_a, I_b, I_c ตามลำดับ
 R แทนรัศมีของวงกลมล้อมรอบ
 H แทนจุดออร์โทเซนเตอร์
 G แทนจุดเซนทรอยด์

ความรู้เดิม

1. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่แล้ว รูปสี่เหลี่ยมนี้จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นยาวเท่ากันและขนานกัน แล้วส่วนของเส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงคู่นี้จะยาวเท่ากันและขนานกัน รูปสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ความรู้เดิม

1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน
2. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ
3. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันด้วยแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ
4. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
5. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
6. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
7. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
8. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ด้านต่อด้านแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ
9. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉาก
10. พื้นที่รูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times \text{ความยาวฐาน} \times \text{ความสูง}$

11. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทุกรูปมีสมบัติดังต่อไปนี้
 - 11.1 ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน
 - 11.2 มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
 - 11.3 เส้นทแยงมุมสองเส้นแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
12. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวของฐาน $\times$ ความสูง
13. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

$$= \frac{1}{2} \times \text{ผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน} \times \text{ความสูง}$$
14. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ

$$= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของเส้นทแยงมุม} \times \text{ผลบวกของความยาวของเส้นกึ่งที่ตัดฉากกับเส้นทแยงมุมนั้น}$$

ความรู้เดิม

1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้ว ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180°
2. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180° แล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน
3. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน
4. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นี้ขนานกัน
5. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน
6. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน
7. ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180°
8. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น
9. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่ และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ
10. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

ความรู้เดิม

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมี $\hat{A}CB$ เป็นมุมฉาก c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแล้ว $c^2 = a^2 + b^2$

บทกลับของทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านยาว a, b และ c หน่วย

และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

วงกลม

1. มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° หรือหนึ่งมุมฉาก
2. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
3. มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
4. ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน
5. ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน
6. ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
7. ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมในส่วนโค้งของวงกลมรองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
8. ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือ ส่วนโค้งน้อยเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่เท่ากับส่วนโค้งใหญ่
9. ในวงกลมวงหนึ่ง หรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็นส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะยาวเท่ากัน
10. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น

11. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น
12. จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้จะอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดทั้งสองนั้นเป็นจุดปลาย
13. เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มี n ด้าน

$$\text{มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาด} = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{ผลบวกของขนาดของมุมภายใน} = 180(n - 2)^\circ$$

$$\text{ขนาดของมุมภายในแต่ละมุม} = \frac{180}{n}(n - 2)^\circ$$

ทฤษฎีบทเบื้องต้น

ความรู้เดิม

1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้ว ขนาดของมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน
2. เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นี้ขนานกันก็ต่อเมื่อมุมแย้งที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากัน
3. เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นี้ขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน
4. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ 180°
 - 4.1 ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามกับมุมภายนอกนั้น
 - 4.2 ในบรรดาส่วนของเส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุดภายนอกของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังเส้นตรงเส้นนั้นจะมีส่วนของเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เป็นเส้นตั้งฉาก และเส้นนี้ต้องเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

1. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (ด้าน-มุม-ด้าน)