



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

อสมการ

$$\min \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right\} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq \max \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right\}$$



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์

อสมการ

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



CHULA
BOOK

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
www.Chulabook.com

ชื่อเรื่อง	เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ
ชื่อผู้แต่ง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
ลิขสิทธิ์โดย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
พิมพ์ครั้งที่ 4	พ.ศ. 2556
จำนวน	4,000 เล่ม
ราคา	90 บาท

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ อสมการ.-- กรุงเทพฯ : ไชเอ็ดพับลิชชิ่ง, 2556.

65 หน้า.

1. อสมการ. I. ชื่อเรื่อง.

512.97

ISBN 978-616-237-188-2

พิมพ์ที่ บริษัท ฐานบัณฑิต จำกัด

188/5 ซอยเพชรเกษม 51 ถนนเพชรเกษม แขวงบางแคเหนือ เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10160

โทร. 0 2801 3934-8

นายสมัย ต่ายสกุลทิพย์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เป็นหน่วยงานในกำกับของกระทรวงศึกษาธิการ มีหน้าที่หลักสำคัญประการหนึ่ง คือ การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อและเอกสารส่งเสริมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศ และการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี

ภารกิจหลักสำคัญอีกประการหนึ่งของ สสวท. ได้แก่การส่งเสริมศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถและสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี สสวท. จึงได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ขึ้นสำหรับผู้ที่มีความสนใจและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หนังสือชุดนี้มีด้วยกันทั้งหมด 8 เล่ม คือ พีชคณิต เรขาคณิต สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์ คอมบินาทอริก อสมการ และทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งหนังสือชุดนี้จะให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งขึ้นจากบทเรียนตามหลักสูตร นักเรียน ครู และผู้ที่สนใจ ที่ต้องการพัฒนาความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้นควรศึกษาหนังสือชุดนี้ และหนังสือชุดนี้ยังเหมาะสมกับนักเรียนชั้นเรียนพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมถึงเป็นพื้นฐานที่ดีแก่ผู้ที่ต้องการเตรียมตัวสมัครเข้ารับการรับการอบรมในค่ายโอลิมปิกวิชาการอีกด้วย

ในการจัดพิมพ์หนังสือชุดนี้ในครั้งนี้ สสวท. ได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมยิ่งขึ้น โดยได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากหลายหน่วยงาน สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูและนักเรียน ตลอดจนผู้สนใจ และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำหนังสือชุดนี้ไว้ ณ โอกาสนี้

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

ในการพิมพ์ครั้งที่ 1

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการให้พัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อประกอบการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อช่วยส่งเสริมให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร

เอกสารเสริมความรู้เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษาให้กับนักเรียน นักศึกษา อาจารย์และผู้สนใจ สำหรับศึกษาค้นคว้าในอันที่จะพัฒนาความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่าน และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำเอกสารเล่มนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นายพิศาล สร้อยธุหร่า)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ เพื่อเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้เพิ่มเติมศักยภาพของตัวเองให้สูงสุด และสำหรับครูคณิตศาสตร์ที่จะต้องสอนนักเรียนห้องเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเนื้อหาและลำดับขั้นตอนการนำเสนอในหนังสือชุดนี้ ได้อิงความรู้ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วตามหลักสูตร ถ้าหากหัวข้อเรื่องใดที่อิงความรู้พื้นฐานที่นักเรียนยังไม่ได้เรียน หนังสือชุดนี้ได้สรุปเนื้อหาพื้นฐานนั้นไว้ก่อนเพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนสามารถศึกษาได้ อย่างเป็นลำดับขั้นของความรู้ เพื่อให้ผู้สนใจสามารถค้นคว้าและศึกษาได้ด้วยตนเอง

หนังสือชุดนี้มี 8 เล่ม นักเรียนหรือคุณครูจะเลือกเรียนหรือเลือกสอนเรื่องใดก่อนก็ได้ ด้วยมีเนื้อหาเป็นอิสระแก่กัน คณะกรรมการจัดทำได้พยายามอย่างยิ่งที่จะพัฒนาหนังสือชุดนี้ให้เป็นหนังสือที่สมบูรณ์ อย่างไรก็ตามหากท่านพบข้อบกพร่องหรือมีข้อเสนอแนะเพิ่มเติม โปรดส่งข้อเสนอแนะของท่านไปยังสาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จะเป็นพระคุณอย่างยิ่ง ทั้งนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงเอกสารให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ		
บทที่ 1	อสมการพื้นฐาน	1
บทที่ 2	อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตสำหรับสองจำนวน	11
บทที่ 3	อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตสำหรับ n จำนวน	19
บทที่ 4	อสมการของโคชี	31
บทที่ 5	อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก	41
บทที่ 6	อสมการของโฮลเดอร์และอสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง	52
แบบฝึกหัดระคน		61

ในบทนี้จะถือว่า ผู้อ่านมีความรู้เกี่ยวกับอสมการเบื้องต้นมาบ้างแล้ว ฉะนั้นจะขอทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่สำคัญเกี่ยวกับอสมการโดยไม่พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.1 สมบัติไตรวิภาค (trichotomy property)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$ เป็นจริงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

สัญลักษณ์ ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a \leq b$ หมายถึง $a < b$ หรือ $a = b$

$a \geq b$ หมายถึง $a > b$ หรือ $a = b$

$a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$

$a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$

สัญลักษณ์ $a \leq b < c$ และ $a < b \leq c$ ก็มีความหมายในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะเขียนสำหรับอสมการเท่านั้น ถ้าเราเปลี่ยนเครื่องหมาย $<$ เป็น $\leq$ และ $>$ เป็น $\geq$ เรายังคงได้อสมการในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

(1) ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

(2) ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

(3) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$

(4) ถ้า $a > b$ และ $k > 0$ แล้ว $ka > kb$

(5) ถ้า $a > b$ และ $k < 0$ แล้ว $ka < kb$

(6) ถ้า $a > b$ และ a กับ b มีเครื่องหมายเหมือนกันและไม่เป็น 0 แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

นอกจากนี้ เราเมื่อสมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ $a > 0$ และ p, q เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $p > q$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^p > a^q$

(2) ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^p < a^q$

จากทฤษฎีบท 1.3 เราได้อสมการต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4 ให้ a, b และ p เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a > b > 0$

(1) ถ้า $p > 0$ แล้ว $a^p > b^p$

(2) ถ้า $p < 0$ แล้ว $a^p < b^p$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a > b > 0$ จะได้ $\frac{a}{b} > 1$

โดยทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่า ถ้า $p > 0$ แล้ว $\left(\frac{a}{b}\right)^p > \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

ฉะนั้น $a^p > b^p$

และ ถ้า $p < 0$ แล้ว $\left(\frac{a}{b}\right)^p < \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ ฉะนั้น $a^p < b^p$

ในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปของอสมการ เราไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัวที่ใช้ได้เสมอกับทุกอสมการ แต่เรามีหลักกว้าง ๆ ที่อาจช่วยให้การพิสูจน์อสมการง่ายขึ้น ดังนี้

(1) เราอาจเริ่มจากอสมการที่ต้องการพิสูจน์ แล้วทำย้อนหลังไปสู่สมการอื่น ๆ ที่นำไปสู่สมการที่ต้องการพิสูจน์สุดท้าย วิธีการนี้ต้องทำอย่างระมัดระวัง เนื่องจากเราต้องพิสูจน์จากสิ่งที่กำหนดให้หรือสิ่งที่ทราบอยู่แล้วเพื่อนำไปสู่สิ่งที่ต้องการ ไม่ใช่เริ่มต้นจากสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไปหาสิ่งที่ทราบ วิธีการทำย้อนหลังเป็นเพียงแนวทางการวิเคราะห์หาเหตุผลของสิ่งที่จะพิสูจน์เท่านั้น

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ a_1, a_2 และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $0 < a_1 < x < a_2$

จงแสดงว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 + a_2 - x} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้ คือ $0 < a_1 < x < a_2$ เราอาจไม่เห็นแนวทางที่จะนำไปสู่การพิสูจน์อสมการที่ต้องการโดยง่าย ดังนั้น เราจะเริ่มต้นจากอสมการที่ต้องการ แล้วทำย้อนหลังไปสู่สิ่งที่กำหนดให้ เพื่อวิเคราะห์หาเหตุผลอสมการในแต่ละบรรทัดต่อไปนี้ สมมูลกัน

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 + a_2 - x} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

$$\frac{a_1 + a_2}{x(a_1 + a_2 - x)} < \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}$$

$$a_1 a_2 < x(a_1 + a_2 - x)$$

$$x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2 < 0$$

$$(x - a_1)(x - a_2) < 0$$

ซึ่งอสมการสุดท้ายเป็นจริงเนื่องจาก $a_1 < x$ และ $x < a_2$

การพิสูจน์ที่ต้องการ ต้องเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้ แล้วนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการ
ฉะนั้นวิธีเขียนการพิสูจน์ที่ต้องการจึงเป็นดังนี้

เนื่องจาก $0 < a_1 < x < a_2$ จะได้ว่า $x - a_1 > 0$ และ $x - a_2 < 0$

ฉะนั้น $(x - a_1)(x - a_2) < 0$ ดังนั้น $x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2 < 0$

นั่นคือ $a_1 a_2 < x(a_1 + a_2 - x)$

เนื่องจาก $a_1 a_2 > 0$ ฉะนั้น $\frac{1}{x(a_1 + a_2 - x)} < \frac{1}{a_1 a_2}$

คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วย $a_1 + a_2$ จะได้ว่า $\frac{a_1 + a_2}{x(a_1 + a_2 - x)} < \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 + a_2 - x} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$

(2) ในการพิสูจน์อสมการที่อยู่ในรูป $A \leq B$ บางครั้งเราอาจทำได้โดยการเขียนพจน์ $B - A$ ให้อยู่ในรูปของผลบวกหรือผลคูณของพจน์อื่นซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่น กำลังสอง หรือฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ตัวอย่าง 1.2 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

วิธีทำ ลองวิเคราะห์จากสมการที่ต้องการย้อนหลังกลับไปก่อน

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

ซึ่งอสมการสุดท้ายเป็นจริงเสมอสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b, c เพราะแต่ละพจน์ในผลบวกอยู่ในรูปกำลังสอง จึงมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ การเขียนบทพิสูจน์ต้องเริ่มจากบรรทัดสุดท้ายก่อนแล้วย้อนไปหาบรรทัดแรก ซึ่งเป็นอสมการที่ต้องการ บทพิสูจน์จะคล้ายกับในตัวอย่าง 1.1 จึงจะให้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน

(3) ถ้าอสมการสมมาตรในตัวแปรทั้งหมด กล่าวคือ การสลับที่ของตัวแปรคู่ใด ๆ ในอสมการไม่ทำให้อสมการเปลี่ยนแปลงแล้ว เราสามารถสมมติลำดับให้กับตัวแปรได้ เช่น ถ้าอสมการประกอบด้วยตัวแปร $a_1, a_2, \dots, a_n$ และอสมการมีสมมาตรในตัวแปรทั้งหมด แล้วเราสามารถสมมติได้ว่า $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

ตัวอย่าง 1.3 ให้ $a > 0$ และ $b > 0$ จงแสดงว่า $a^a b^b \geq a^b b^a$

บทพิสูจน์ โดยสมบัติไตรวิภาค จะได้ว่า $a < b$ หรือ $a = b$ หรือ $a > b$

เนื่องจากอสมการสมมาตรในตัวแปร a และ b ฉะนั้น เราสามารถสมมติได้ว่า $a \geq b$ เพราะถ้า $a < b$ เราสามารถสลับตัวแปร a และ b แล้วยังคงได้อสมการเดิม ดังนั้น $a - b \geq 0$ และโดยทฤษฎีบท 1.4 จะได้ว่า $a^{a-b} \geq b^{a-b}$ คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วย $a^b b^b$ จะได้ว่า

$$a^{a-b} \cdot a^b \cdot b^b \geq b^{a-b} \cdot a^b \cdot b^b$$

ฉะนั้น $a^a b^b \geq a^b b^a$

(4) อสมการที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับอาจจะพิสูจน์ได้โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ **หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์** (Principle of Mathematical Induction) กล่าวว่า ถ้า $P(n)$ เป็นประโยคเปิดของตัวแปร n ซึ่งเป็นจำนวนนับ โดยที่

1. $P(1)$ เป็นจริง (ขั้นฐาน)
 2. สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ ถ้า $P(k)$ เป็นจริงแล้วได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง (ขั้นอุปนัย)
- จะสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.4 จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ $2^n > n$ เสมอ

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความว่า $2^n > n$

ขั้นฐาน($n=1$) เห็นได้ชัดว่า $2^1 > 1$ ฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย สมมติให้ k เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $2^k > k$

ดังนั้น $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k = k + k \geq k + 1$

จะได้ว่า $2^{k+1} > k + 1$ นั่นคือ $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

บางครั้ง ขั้นฐานของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ อาจไม่ได้เริ่มต้นที่ $n = 1$ ก็ได้ เช่น ในตัวอย่างต่อไป ข้อความ $n! > 2^n$ ไม่จริงสำหรับ $n \in \{1, 2, 3\}$ แต่จะจริงเมื่อ n เป็นจำนวนนับตั้งแต่ 4 เป็นต้นไป ในกรณีนี้ขั้นฐานเราสามารถเริ่มต้นที่จำนวนนับตัวแรกที่ทำให้ข้อความ $P(n)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.5 จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 3 แล้ว $n! > 2^n$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความว่า $n! > 2^n$

เราจะพิสูจน์ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ $n \geq 4$

ขั้นฐาน($n=4$) เห็นได้ชัดว่า $4! > 2^4$

ขั้นอุปนัย สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนนับโดยที่ $k \geq 4$

ฉะนั้น $k! > 2^k$

พิจารณา $(k + 1)! = (k + 1)k! > (k + 1)2^k$

เนื่องจาก $k \geq 4$ จะได้ว่า $k + 1 \geq 5 > 2$

ดังนั้น $(k + 1)! > (k + 1) \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

นั่นคือ $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 4$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ โดยที่ $n \geq 2$ และ $a_1, a_2, \dots, a_n$

เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ จงแสดงว่า

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

บทพิสูจน์ ก่อนที่ผู้อ่านจะศึกษาบทพิสูจน์ข้างล่างนี้ ขอให้ลองพิจารณาก่อนว่าจะพิสูจน์อสมการนี้
อย่างไร เราอาจลองกระจายผลคูณของพจน์ทางซ้ายออกมาทั้งหมด แล้วเปรียบเทียบกับพจน์ทางขวา
แต่วิธีนี้เราต้องหาผลคูณทุกพจน์ออกมา ซึ่งอาจมีความยุ่งยากซับซ้อน ซึ่งเราต้องการเพียงว่า
พจน์ที่มีดีกรีมากกว่า 1 มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะช่วยให้การเขียนบทพิสูจน์เป็นไปโดยง่ายและกระชับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความว่า สำหรับจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ n จำนวน $a_1, a_2, \dots, a_n$ ใดๆ

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

เราจะพิสูจน์ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นฐาน($n=2$)

ให้ $a_1, a_2 \geq 0$ จะพิสูจน์ว่า $(1 + a_1)(1 + a_2) \geq 1 + a_1 + a_2$

สังเกตว่า $(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2$

เนื่องจาก $a_1 \geq 0$ และ $a_2 \geq 0$ ฉะนั้น $a_1a_2 \geq 0$

ดังนั้น $1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 \geq 1 + a_1 + a_2$

ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า $(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 \geq 1 + a_1 + a_2$

ขั้นอุปนัย

ให้ k เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

ให้ $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ $k+1$ จำนวน โดยสมมติฐาน

การอุปนัยจะได้ $(1 + a_1) \dots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + \dots + a_k$

ดังนั้น $(1 + a_1) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq (1 + a_1 + \dots + a_k)(1 + a_{k+1})$

โดยใช้กรณี $P(2)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$(1 + a_1 + \dots + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq 1 + (a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1}$$

จึงสรุปได้ว่า $(1 + a_1) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq 1 + a_1 + \dots + a_k + a_{k+1}$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

(5) อสมการบางรูปแบบสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของอสมการมาตรฐานอื่น ๆ เช่น อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต, อสมการของโคชี ฯลฯ เราจะได้ศึกษาอสมการเหล่านี้ในหัวข้อต่อไป