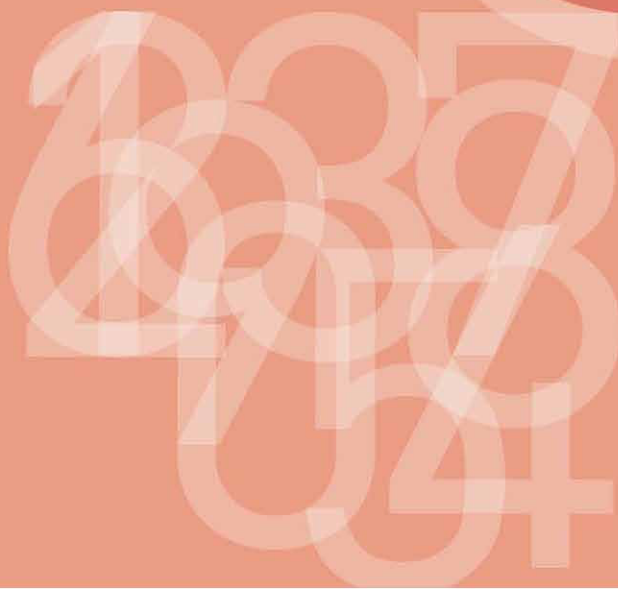




สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ



ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น





สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์

ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



CHULA
BOOK

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
www.Chulabook.com

ชื่อเรื่อง	เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
ชื่อผู้แต่ง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
ลิขสิทธิ์โดย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
พิมพ์ครั้งที่ 3	พ.ศ. 2556
จำนวน	4,000 เล่ม
ราคา	95 บาท

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ : 0-2255-4433 , 0-2218-9891

Website : <http://www.chulabook.com>

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.-- กรุงเทพฯ : ไชยธรรมาบรรณกิจ, 2556.

86 หน้า.

1. ทฤษฎีกราฟ. I. ชื่อเรื่อง.

511.5

ISBN 978-616-237-189-9

พิมพ์ที่ บริษัท ฐานบัณฑิต จำกัด

188/5 ซอยเพชรเกษม 51 ถนนเพชรเกษม แขวงบางแคเหนือ เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10160

โทร. 0 2801 3934-8

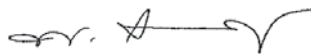
นายสมัย ต่ายสกุลทิพย์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เป็นหน่วยงานในกำกับของกระทรวงศึกษาธิการ มีหน้าที่หลักสำคัญประการหนึ่ง คือ การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อและเอกสารส่งเสริมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศ และการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี

ภารกิจหลักสำคัญอีกประการหนึ่งของ สสวท. ได้แก่การส่งเสริมศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถและสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี สสวท. จึงได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ขึ้นสำหรับผู้ที่มีความสนใจและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หนังสือชุดนี้มีด้วยกันทั้งหมด 8 เล่ม คือ พีชคณิต เรขาคณิต สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์ คอมบินาทอริก อสมการ และทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งหนังสือชุดนี้จะให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งขึ้นจากบทเรียนตามหลักสูตร นักเรียน ครู และผู้ที่สนใจ ที่ต้องการพัฒนาความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้นควรศึกษาหนังสือชุดนี้ และหนังสือชุดนี้ยังเหมาะสมกับนักเรียนชั้นเรียนพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมถึงเป็นพื้นฐานที่ดีแก่ผู้ที่ต้องการเตรียมตัวสมัครเข้ารับการรับการอบรมในค่ายโอลิมปิกวิชาการอีกด้วย

ในการจัดพิมพ์หนังสือชุดนี้ในครั้งนี้ สสวท. ได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมยิ่งขึ้น โดยได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากหลายหน่วยงาน สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูและนักเรียน ตลอดจนผู้สนใจ และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำหนังสือชุดนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

ในการพิมพ์ครั้งที่ 1

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการให้พัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อประกอบการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อช่วยส่งเสริมให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร

เอกสารเสริมความรู้เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษาให้กับนักเรียน นักศึกษา อาจารย์และผู้สนใจ สำหรับศึกษาค้นคว้าในอันที่จะพัฒนาความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่าน และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำเอกสารเล่มนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นายพิศาล สร้อยทรุรรักษ์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ เพื่อเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้เพิ่มเติมศักยภาพของตัวเองให้สูงสุด และสำหรับครูคณิตศาสตร์ที่จะต้องสอนนักเรียนห้องเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเนื้อหาและลำดับขั้นตอนการนำเสนอในหนังสือชุดนี้ ได้อิงความรู้ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วตามหลักสูตร ถ้าหากหัวข้อเรื่องใดที่อิงความรู้พื้นฐานที่นักเรียนยังไม่ได้เรียน หนังสือชุดนี้ได้สรุปเนื้อหาพื้นฐานนั้นไว้ก่อนเพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนสามารถศึกษาได้อย่างเป็นลำดับขั้นของความรู้ เพื่อให้ผู้สนใจสามารถค้นคว้าและศึกษาได้ด้วยตนเอง

หนังสือชุดนี้มี 8 เล่ม นักเรียนหรือคุณครูจะเลือกเรียนหรือเลือกสอนเรื่องใดก่อนก็ได้ ด้วยมีเนื้อหาเป็นอิสระแก่กัน คณะกรรมการจัดทำได้พยายามอย่างยิ่งที่จะพัฒนาหนังสือชุดนี้ให้เป็นหนังสือที่สมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม หาท่านพบข้อบกพร่องหรือมีข้อเสนอแนะเพิ่มเติม โปรดส่งข้อเสนอแนะของท่านไปยังสาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จะเป็นพระคุณอย่างยิ่ง ทั้งนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงเอกสารให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

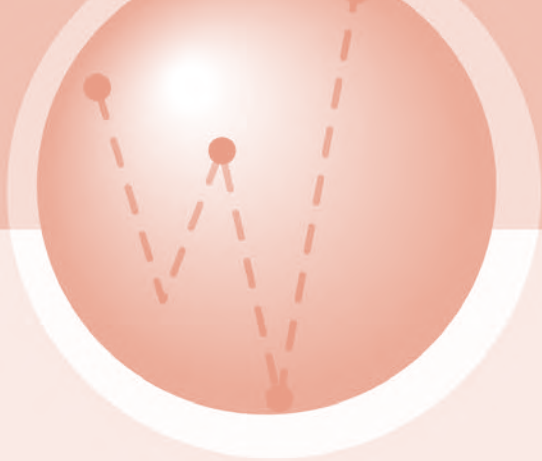
สารบัญ		
บทนำ		ก
บทที่ 1	แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ.....	1
บทที่ 2	กราฟเชื่อมโยงและต้นไม้	17
บทที่ 3	ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางในกราฟ.....	31
บทที่ 4	กราฟเชิงระนาบ	46
บทที่ 5	กราฟระบุทิศทางหรือไดกราฟ.....	61
เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด		72

บทนำ

กราฟเป็นตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่ง ซึ่งใช้สำหรับจำลองปัญหาบางอย่างด้วยแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดยอดจำนวนหนึ่งและเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดเหล่านั้น บางจุด ตัวอย่างเช่น แผนภาพที่แทนถนนที่เชื่อมเมืองต่างๆ แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคนที่รู้จักกัน แผนภาพแสดงโครงสร้างทางเคมีของสารประกอบไฮโดรคาร์บอน วงจรไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ หรือแม้กระทั่งปัญหาง่าย ๆ เช่น การลากเส้นเพื่อให้ได้รูปที่กำหนดโดยไม่ยกปากกา เป็นต้น วิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ ของกราฟ เรียกว่า วิชาทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) ปัจจุบันทฤษฎีกราฟมีที่ประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์แขนงต่างๆ ทั้งด้านวิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และภาษาศาสตร์

หนังสือเล่มนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อให้ผู้อ่านได้เห็นถึงสมบัติต่าง ๆ ของกราฟ การจำลองปัญหาด้วยกราฟ และการแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีของกราฟ เพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ประโยชน์ได้หลากหลายสำหรับผู้อ่านในระดับต่างๆ ในการเรียบเรียงจึงพยายามใช้ภาษาง่าย ๆ เนื้อหาในบทต่าง ๆ มีความเป็นอิสระจากกัน เพื่อให้ผู้อ่านที่ศึกษาด้วยตัวเอง หรือครูอาจารย์ที่ใช้หนังสือเล่มนี้ประกอบการสอนสามารถเลือกเนื้อหาหรือหัวข้อที่สนใจโดยไม่จำเป็นต้องอ่านเรียงกันไปทีละบท ยกเว้นบทที่ 1 ซึ่งจะกล่าวถึงบทนิยาม ตัวอย่างและทฤษฎีสำคัญที่จำเป็นในการอ่านบทต่อ ๆ ไป บทที่ 3 บทที่ 4 และบทที่ 5 อาศัยเพียงเนื้อหาในบทที่ 1 และนิยามพื้นฐานในตอนต้นของบทที่ 2 เท่านั้น และสามารถเลือกอ่านในลำดับใดก็ได้ ในการอ่านหนังสือเล่มนี้ ผู้อ่านควรมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการพิสูจน์ เช่น การพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ วิธีพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง และควรมีความรู้พื้นฐานในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

นอกเหนือจากเนื้อหาที่ได้นำเสนอแล้วยังมีแบบฝึกหัดเพื่อเสริมความเข้าใจและแบบฝึกหัดที่ท้าทาย เพื่อให้ผู้อ่านได้รู้จักวิธีแก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น โจทย์บางข้ออาจจะไม่สามารถทำได้ในทันที แต่ขอให้มีความอดทนและใช้ความพยายามหาวิธีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ในการแก้ปัญหา ก่อนที่จะตรวจคำตอบกับเฉลยท้ายเล่ม

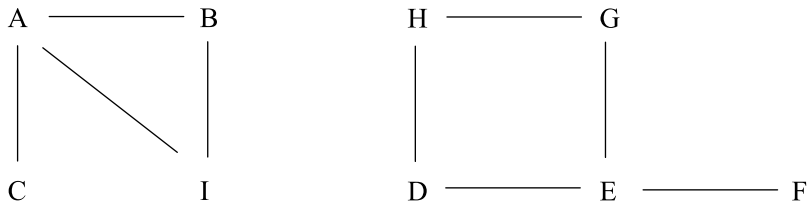


2035
2037

ลองพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 ในประเทศแห่งหนึ่ง มีเมืองอยู่ 9 เมือง คือ A, B, C, D, E, F, G, H, I และมีถนนเชื่อมระหว่างเมือง ดังนี้ C – A, I – B, I – A, A – B, G – E, G – H, E – F, D – E และ H – D จงหาว่ามีเส้นทางเชื่อมเมือง C และเมือง D หรือไม่

วิธีทำ ถ้าเขียนแผนภาพโดยให้ตัวอักษรที่กำหนดแทนเมือง และลากเส้นเชื่อมตัวอักษรสองตัวใด ๆ ซึ่งแทนเมืองสองเมืองที่มีถนนเชื่อมระหว่างสองเมืองนั้น จะได้แผนภาพดังนี้

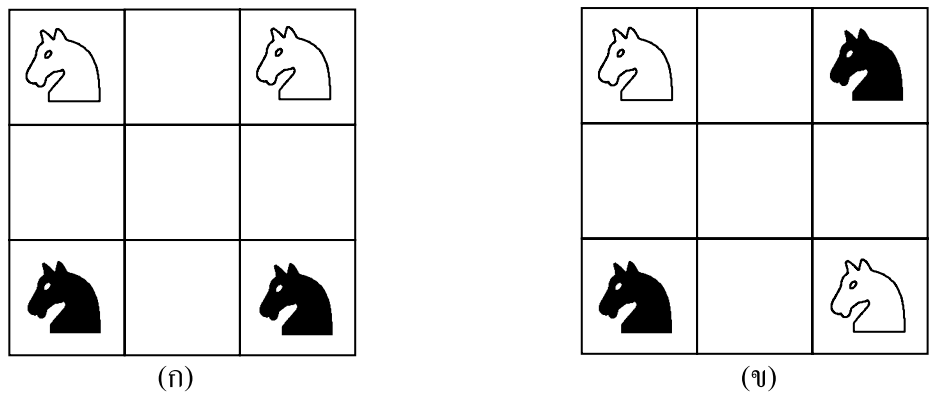


จะเห็นได้ว่า เราไม่สามารถลากเส้นจาก C ไปถึง D โดยผ่านทางเส้นเชื่อมเหล่านี้ได้ แสดงว่า ไม่มีถนนเชื่อมเมือง C และเมือง D

ก่อนจะพิจารณาตัวอย่างต่อไป จะขออธิบายวิธีการเดินตัวหมากรุกบนกระดานก่อน

วิธีการเดินหมากรุก คือ เดินในแนวนอน (ซ้ายหรือขวา) 2 ช่อง แล้วเดินในแนวตั้ง (ขึ้นหรือลง) 1 ช่อง หรือเดินในแนวตั้ง (ขึ้นหรือลง) 2 ช่อง แล้วเดินในแนวนอน (ซ้ายหรือขวา) 1 ช่อง กล่าวง่าย ๆ คือ จะเดินเป็นรูปตัว L ในทิศทางใด ๆ ก็ได้ โดยที่หมากรุก 2 ตัว อยู่ในช่องเดียวกันพร้อมกันไม่ได้

ตัวอย่าง 1.2 มีม้าหมากรุกสีขาว 2 ตัว สีดำ 2 ตัว บนกระดานขนาด 3×3 ดังรูป (ก) จะมีวิธีในการเดินม้าหมากรุกแบบปกติไปเรื่อยๆ จนกระทั่งอยู่ในตำแหน่งดังรูป (ข) ได้หรือไม่

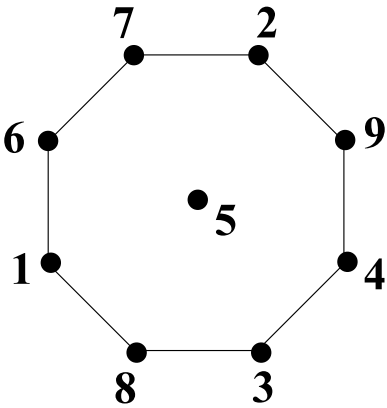


วิธีทำ ใส่ตัวเลข 1 – 9 ลงในช่องทั้งเก้าช่องบนกระดานดังรูปต่อไปนี้

1	2	3
4	5	6
7	8	9

ฉะนั้นเส้นทางการเดินของม้าหมากรุกจึงเป็นดังนี้ จากช่องหมายเลข 1 จะสามารถเดินไปยังช่องหมายเลข 6 หรือ 8 ก็ได้ จากช่องหมายเลข 6 สามารถเดินไปยังช่องหมายเลข 1 หรือ 7 ได้ และเป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ

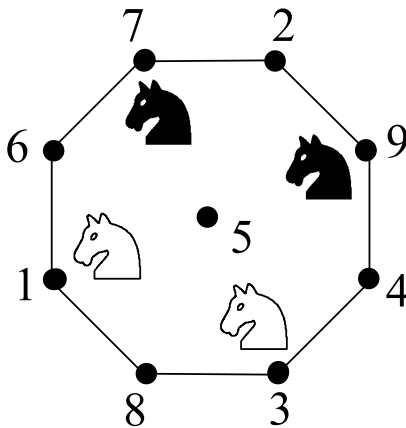
เราอาจเขียนแสดงการเดินของม้าหมากรุกด้วยแผนภาพต่อไปนี้



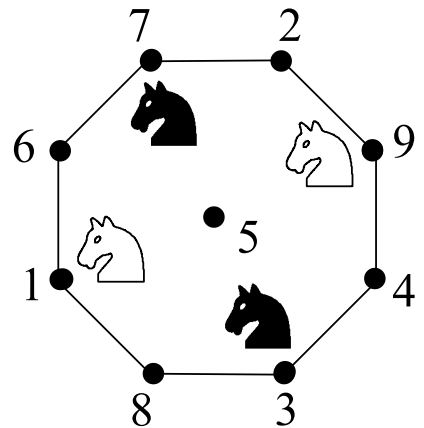
จุดที่มีตัวเลขกำกับแต่ละจุดแทนช่องแต่ละช่องในกระดาน เส้นที่เชื่อมจากจุดหนึ่งไปยังจุดอื่นๆ แทนถึงวิธีการเดินของม้าหมากรุกตามกติกาที่กำหนด ในการเดินของม้าหมากรุกตามแผนภาพข้างบน จะเดินจากจุดหนึ่งไปตามเส้นที่เชื่อมทีละเส้นจนถึงจุดที่อยู่ปลายอีกด้านหนึ่งของเส้นนั้น

สังเกตว่า ไม่มีม้าหมากรุกตัวใดเดินถึงช่องหมายเลข 5 ได้

จะเห็นว่า ตำแหน่งของม้าหมากรุกตามรูป (ก) และ (ข) เป็นดังนี้



(ก)



(ข)

ฉะนั้น จากตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป (ก) เพื่อให้ได้ตำแหน่งสิ้นสุดอย่างที่ต้องการ ดังรูป (ข) ม้าสีดำกับม้าสีขาวต้องมีการสลับตำแหน่งกัน ซึ่งเป็นไปไม่ได้จาก กติกาการเดิน แสดงว่า ไม่มีวิธีการเดินม้าหมากรุกแบบปกติกจากตำแหน่งดังรูป (ก) เปลี่ยนไปเป็นตำแหน่งดังรูป (ข) ได้

จากตัวอย่างทั้งสองข้างต้น จะเห็นว่าเราใช้แผนภาพซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้น เพื่อช่วยทำให้การแก้ปัญหасะดวกยิ่งขึ้น แผนภาพในลักษณะนี้เรียกว่า กราฟ (graph)

กราฟจะประกอบด้วย จุดยอด (vertex, พหูพจน์ vertices) และเส้นเชื่อม (edge) ซึ่งจะเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุด ถ้ามีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด x และ y เรากล่าวว่า จุดยอด x และ y เป็น จุดประชิด (adjacent points) และเรียกจุดยอดที่เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมใด ๆ ว่า เป็นจุดยอดที่อยู่ติดกับ (incident to) เส้นเชื่อมนั้น