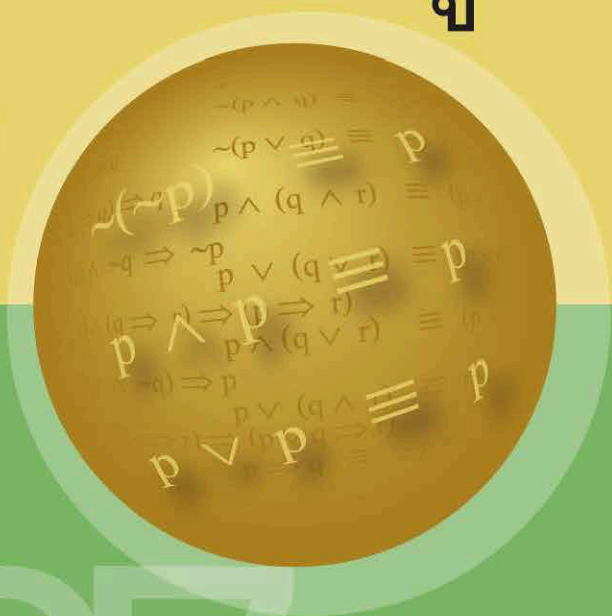




สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์





สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



CHULA
BOOK

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
www.Chulabook.com

ชื่อเรื่อง	เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์
ชื่อผู้แต่ง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
ลิขสิทธิ์โดย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
พิมพ์ครั้งที่ 3	พ.ศ. 2556
จำนวน	4,000 เล่ม
ราคา	100 บาท

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ : 0-2255-4433 , 0-2218-9891

Website : <http://www.chulabook.com>

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์.-- กรุงเทพฯ : ไซเอดพับลิชชิ่ง, 2556.
95 หน้า.

1. สัญลักษณ์ตรรกศาสตร์และคณิตตรรกศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.

511.3

ISBN 978-616-237-177-6

พิมพ์ที่ **บริษัท ฐานบัณฑิต จำกัด**

188/5 ซอยเพชรเกษม 51 ถนนเพชรเกษม แขวงบางแคเหนือ เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10160

โทร. 0 2801 3934-8

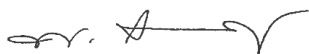
นายสมัย ต่ายสกุลทิพย์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เป็นหน่วยงานในกำกับของกระทรวงศึกษาธิการ มีหน้าที่หลักสำคัญประการหนึ่ง คือ การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อและเอกสารส่งเสริมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศ และการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี

ภารกิจหลักสำคัญอีกประการหนึ่งของ สสวท. ได้แก่การส่งเสริมศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถและสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี สสวท. จึงได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ขึ้นสำหรับผู้ที่มีความสนใจและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หนังสือชุดนี้มีด้วยกันทั้งหมด 8 เล่ม คือ พีชคณิต เรขาคณิต สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์ คอมบินาทอริก อสมการ และทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งหนังสือชุดนี้จะให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งขึ้นจากบทเรียนตามหลักสูตร นักเรียน ครู และผู้ที่สนใจ ที่ต้องการพัฒนาความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้นควรศึกษาหนังสือชุดนี้ และหนังสือชุดนี้ยังเหมาะสมกับนักเรียนชั้นเรียนพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมถึงเป็นพื้นฐานที่ดีแก่ผู้ที่ต้องการเตรียมตัวสมัครเข้ารับการรับการอบรมในค่ายโอลิมปิกวิชาการอีกด้วย

ในการจัดพิมพ์หนังสือชุดนี้ในครั้งนี้ สสวท. ได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมยิ่งขึ้น โดยได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากหลายหน่วยงาน สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูและนักเรียน ตลอดจนผู้สนใจ และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำหนังสือชุดนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

ในการพิมพ์ครั้งที่ 1

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการให้พัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อประกอบการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อช่วยส่งเสริมให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร

เอกสารเสริมความรู้เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษาให้กับนักเรียน นักศึกษา อาจารย์และผู้สนใจ สำหรับศึกษาค้นคว้าในอันที่จะพัฒนาความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่าน และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำเอกสารเล่มนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นายพิศาล สร้อยสุหร้า)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ เพื่อเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้เติมเต็มศักยภาพของตัวเองให้สูงสุด และสำหรับครูคณิตศาสตร์ที่จะต้องสอนนักเรียนห้องเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเนื้อหาและลำดับขั้นตอนการนำเสนอในหนังสือชุดนี้ได้อิงความรู้ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วตามหลักสูตร ถ้าหากหัวข้อเรื่องใดที่อิงความรู้พื้นฐานที่นักเรียนยังไม่ได้เรียน หนังสือชุดนี้ได้สรุปเนื้อหาพื้นฐานนั้นให้ก่อนเพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนสามารถศึกษาได้อย่างเป็นลำดับขั้นของความรู้ เพื่อให้ผู้สนใจสามารถค้นคว้าและศึกษาได้ด้วยตนเอง

หนังสือชุดนี้มี 8 เล่ม นักเรียนหรือคุณครูจะเลือกเรียนหรือเลือกสอนเรื่องใดก่อนก็ได้ ด้วยมีเนื้อหาเป็นอิสระแก่กัน คณะกรรมการจัดทำได้พยายามอย่างยิ่งที่จะพัฒนาหนังสือชุดนี้ให้เป็นหนังสือที่สมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม หากท่านพบข้อบกพร่องหรือมีข้อเสนอแนะเพิ่มเติม โปรดส่งข้อเสนอแนะของท่านไปยังสาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จะเป็นพระคุณอย่างยิ่ง ทั้งนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงเอกสารให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ

บทนำ	ก
บทที่ 1 ตรรกศาสตร์เบื้องต้น.....	1
บทที่ 2 วิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ	28
การพิสูจน์ $p \Rightarrow q$	29
การพิสูจน์ $p \Leftrightarrow q$	34
การพิสูจน์โดยการแจกกรณี.....	36
การพิสูจน์ $p \vee q$	38
การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง.....	39
การพิสูจน์การเป็นได้เพียงอย่างเดียว.....	41
การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	46
บทที่ 3 ตัวอย่างการพิสูจน์ในเรื่องผลคูณและผลตัดของชุดใด ๆ ของเซต.....	53
บทที่ 4 ตัวอย่างการพิสูจน์ในเรื่องฟังก์ชัน.....	60
บทที่ 5 ตัวอย่างการพิสูจน์ในเรื่องภาพและภาพผกผัน.....	71
บทที่ 6 ตัวอย่างการพิสูจน์ในเรื่องขอบเขตบนและขอบเขตล่าง	79
ภาคผนวก (ก) เซต.....	88
ภาคผนวก (ข) ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	91

บทนำ

ในการศึกษาหาความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้น การได้มาซึ่งกฎหรือทฤษฎีบทหรือข้อสรุปใดก็ตาม นับว่าเป็นเรื่องที่ต้องให้ความสำคัญอย่างมาก โดยทั่วไปเราไม่สามารถใช้การทดลองหรือยกตัวอย่างเพียงบางตัวอย่างเพื่อสรุปว่ากฎหรือทฤษฎีบทนั้น ๆ เป็นจริง จำเป็นต้องแสดงการพิสูจน์ให้เห็นจริงโดยปราศจากข้อโต้แย้งใด ๆ

ตัวอย่างเช่น จากการสังเกตดังนี้

$$\begin{array}{rccccccc} 1 + 3 & = & 4 & = & 2^2 \\ 1 + 3 + 5 & = & 9 & = & 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 & = & 4^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

เราอาจคาดการณ์ได้ว่า ข้อสรุปควรเป็น

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับใด ๆ}$$

ข้อความข้างต้นเป็นเพียงข้อความคาดการณ์ (conjecture) เท่านั้น ยังไม่สามารถสรุปได้ทันทีว่า เป็นจริง จนกว่าจะมีการแสดงการพิสูจน์ว่าเป็นจริง จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า เป็นไปไม่ได้ที่จะแสดงการพิสูจน์โดยการแทนค่าจำนวนนับ n ด้วย 6, 7, 8, 9, ... ต่อไปเรื่อย ๆ จนครบทุกจำนวนนับ จึงเกิดคำถามว่า “จะทำการพิสูจน์ได้อย่างไร” คำตอบก็คือ “จำเป็นต้องเรียนรู้วิธีการพิสูจน์และรู้จักเลือกใช้ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม”

ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการพิสูจน์ในแบบต่าง ๆ จะขอเตรียมเครื่องมือเพื่อช่วยในการแสดงวิธีการพิสูจน์ นั่นคือ ความรู้เบื้องต้นทางตรรกศาสตร์ ผู้อ่านโดยส่วนใหญ่มักจะมีความรู้ทางตรรกศาสตร์เบื้องต้นมาบ้างแล้ว ในที่นี้จะกล่าวถึงในลักษณะการทบทวนโดยสังเขปและเน้นในส่วนที่มีบทบาทสำคัญในการเขียนการพิสูจน์

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\min \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right\} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq$$

100%

บทนิยาม 1.1 ประพจน์ (Propositions หรือ Statements) คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธ ซึ่งเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่างประโยคที่เป็นประพจน์

- (1) $9 \neq 4 + 5$ (เท็จ)
- (2) จังหวัดพังงาอยู่ทางภาคใต้ของประเทศไทย (จริง)
- (3) มีคนบางคนสายตาสั้น (จริง)

ตัวอย่างประโยคที่ไม่เป็นประพจน์

- (4) $x + 3 = 7$
- (5) เขาสายตาสั้น
- (6) $10 > 5$ ใช่หรือไม่
- (7) อย่าลืมปิดหน้าต่าง

โดยทั่วไปนิยมใช้ตัวอักษร $p, q, r, \dots$ แทนประพจน์ ใช้ T แทนคำว่า “จริง” และ F แทนคำว่า “เท็จ”

ถ้าประพจน์ p เป็นจริง เรากล่าวว่า p มีค่าความจริง (truth value) เป็นจริง หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า p จริง และถ้าประพจน์ p เป็นเท็จ เรากล่าวว่า p มีค่าความจริงเป็นเท็จ หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า p เท็จ

จากประพจน์ p สามารถสร้างประพจน์ใหม่โดยการปฏิเสธประพจน์ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$ และเรียก $\sim p$ ว่า **นิเสธ (negation) ของ p** ซึ่งเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p ดังกำหนดตามตาราง 1 – 1

p	$\sim p$
T	F
F	T

ตาราง 1 – 1