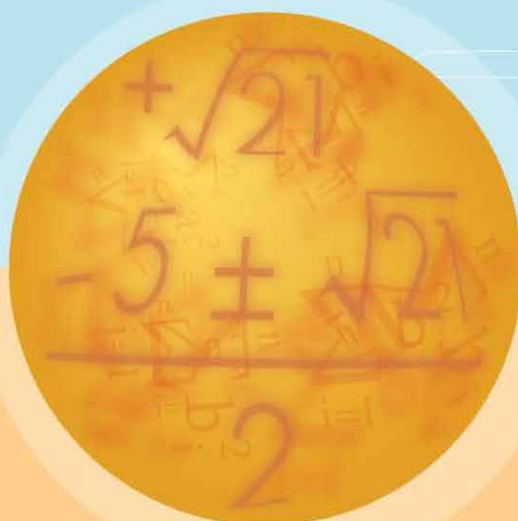
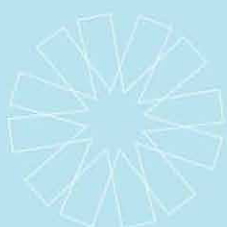




สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

พีชคณิต





สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์

พีชคณิต

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



CHULA
BOOK

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

www.Chulabook.com

ชื่อเรื่อง	เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พีชคณิต
ชื่อผู้แต่ง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
ลิขสิทธิ์โดย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
พิมพ์ครั้งที่ 4	พ.ศ. 2555
จำนวน	4,000 เล่ม
ราคา	90 บาท

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



**CHULA
BOOK**

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ : 0-2255-4433 , 0-2218-9891

Website : <http://www.chulabook.com>

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

เอกสารเสริมความรู้ วิชาคณิตศาสตร์ พีชคณิต.-- กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง, 2555.

71 หน้า.

1. พีชคณิต. I. ชื่อเรื่อง.

512

ISBN 978-616-237-145-5

พิมพ์ที่ บริษัท ฐานบัณฑิต จำกัด

188/5 ซอยเพชรเกษม 51 ถนนเพชรเกษม แขวงบางแคเหนือ เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10160

โทร. 0 2801 3934-8

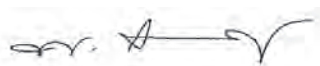
นายสมัย ต่ายสกุลทิพย์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เป็นหน่วยงานในกำกับของกระทรวงศึกษาธิการ มีหน้าที่หลักสำคัญประการหนึ่ง คือ การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อและเอกสารส่งเสริมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ รวมทั้งสาระการออกแบบและเทคโนโลยีและสาระเทคโนโลยีสารสนเทศ และการสื่อสารในกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี

ภารกิจหลักสำคัญอีกประการหนึ่งของ สสวท. ได้แก่การส่งเสริมศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถและสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี สสวท. จึงได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ขึ้นสำหรับผู้ที่มีความสนใจและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หนังสือชุดนี้มีด้วยกันทั้งหมด 8 เล่ม คือ พีชคณิต เรขาคณิต สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น และวิธีการพิสูจน์ คอมบินาทอริก อสมการ และทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งหนังสือชุดนี้จะให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งขึ้นจากบทเรียนตามหลักสูตร นักเรียน ครู และผู้ที่สนใจ ที่ต้องการพัฒนาความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้นควรศึกษาหนังสือชุดนี้ และหนังสือชุดนี้ยังเหมาะสมกับนักเรียนชั้นเรียนพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมถึงเป็นพื้นฐานที่ดีแก่ผู้ที่ต้องการเตรียมตัวสมัครเข้ารับการรับการอบรมในค่ายโอลิมปิกวิชาการอีกด้วย

ในการจัดพิมพ์หนังสือชุดนี้ในครั้งนี้ สสวท. ได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมยิ่งขึ้น โดยได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากคณาจารย์และผู้ทรงคุณวุฒิจากหลายหน่วยงาน สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูและนักเรียน ตลอดจนผู้สนใจ และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำหนังสือชุดนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

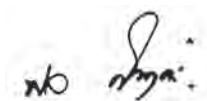
คำนำ

ในการพิมพ์ครั้งที่ 1

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการให้พัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู ตลอดจนสื่อประกอบการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อช่วยส่งเสริมให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร

เอกสารเสริมความรู้เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษาให้กับนักเรียน นักศึกษา อาจารย์และผู้สนใจ สำหรับศึกษาค้นคว้าในอันที่จะพัฒนาความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่าน และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการจัดทำเอกสารเล่มนี้ไว้ ณ โอกาสนี้



(นายพิศาล สร้อยธุหร่า)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้พัฒนาหนังสือชุดนี้ เพื่อเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้เต็มเต็มศักยภาพของตนเองให้สูงสุด และสำหรับครูคณิตศาสตร์ที่จะต้องสอนนักเรียนห้องเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเนื้อหาและลำดับขั้นตอนการนำเสนอในหนังสือชุดนี้ได้อิงความรู้ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วตามหลักสูตร ถ้าหากหัวข้อเรื่องใดที่อิงความรู้พื้นฐานที่นักเรียนยังไม่ได้เรียน หนังสือชุดนี้ได้สรุปเนื้อหาพื้นฐานนั้นไว้ก่อนเพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนสามารถศึกษาได้อย่างเป็นลำดับขั้นของความรู้ เพื่อให้ผู้สนใจสามารถค้นคว้าและศึกษาได้ด้วยตนเอง

หนังสือชุดนี้มี 8 เล่ม นักเรียนหรือคุณครูจะเลือกเรียนหรือเลือกสอนเรื่องใดก่อนก็ได้ ด้วยมีเนื้อหาเป็นอิสระแก่กัน คณะกรรมการจัดทำได้พยายามอย่างยิ่งที่จะพัฒนาหนังสือชุดนี้ให้เป็นหนังสือที่สมบูรณ์ อย่างไรก็ตามหากท่านพบข้อบกพร่องหรือมีข้อเสนอแนะเพิ่มเติม โปรดส่งข้อเสนอแนะของท่านไปยังสาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จะเป็นพระคุณอย่างยิ่ง ทั้งนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงเอกสารให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ



สารบัญ

บทที่ 1	เอกลักษณ์พืชคณิต	1
บทที่ 2	จำนวนเชิงซ้อน	11
บทที่ 3	สมการพหุนาม	24
บทที่ 4	พหุนาม	36
บทที่ 5	เศษส่วนย่อย	59



01

เอกลักษณ์พีชคณิต (Algebraic Identities)

ในบทนี้จะให้ตัวอย่างของการแสดงเอกลักษณ์พีชคณิต ซึ่งได้แก่นิพจน์ที่อยู่ในรูปสมการของตัวแปร x, y, z หรือ $a, b, c, \dots$ และการดำเนินการคือ การบวก การลบ การคูณ การหาร โดยจะใช้การจัดรูปแบบเป็นส่วนใหญ่ นอกจากนี้ ยังจะให้ตัวอย่างของการแยกตัวประกอบของนิพจน์และการแสดงเอกลักษณ์ที่เกี่ยวกับอนุกรมจำกัดด้วย

ตัวอย่าง 1.1 จงพิสูจน์ว่า $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\ &= (x^2 + y^2)^2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2 จงพิสูจน์ว่า $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{เนื่องจาก } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ \text{และ } (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (bc)^2 + 2abcd + (ad)^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 \\ \text{ฉะนั้น } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2$

จงพิสูจน์ว่า $x = y = z$

วิธีทำ จากที่กำหนด จะได้ว่า

$$(x - y)^2 - (x + y - 2z)^2 + (y - z)^2 - (y + z - 2x)^2 + (z - x)^2 - (z + x - 2y)^2 = 0 \dots (*)$$

$$\text{เนื่องจาก } (x - y)^2 - (x + y - 2z)^2 = [(x - y) - (x + y - 2z)][(x - y) + (x + y - 2z)]$$

$$= [-2y + 2z][2x - 2z]$$

$$= -2(y - z)2(x - z)$$

$$= -4(x - z)(y - z)$$

$$\begin{aligned}\text{และในทำนองเดียวกัน } (y-z)^2 - (y+z-2x)^2 &= -4(y-x)(z-x) \\ (z-x)^2 - (z+x-2y)^2 &= -4(z-y)(x-y)\end{aligned}$$

ฉะนั้น (*) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}-4(x-z)(y-z) - 4(y-x)(z-x) - 4(z-y)(x-y) &= 0 \\ (x-z)(y-z) + (y-x)(z-x) + (z-y)(x-y) &= 0 \\ xy - xz - yz + z^2 + yz - xy - xz + x^2 + xz - yz - xy + y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx &= 0 \\ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x-y = y-z = z-x = 0$$

$$\text{นั่นคือ } x = y = z$$

ตัวอย่าง 1.4 จงพิสูจน์ว่า $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } (x+y+z)^3 &= (x+y+z)(x+y+z)^2 \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + 2(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= x^3+y^3+z^3+xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2+ \\ &\quad 2(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= x^3+y^3+z^3+xy(x+y+z)-xyz+yz(x+y+z)-xyz \\ &\quad +zx(x+y+z)-xyz+2(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.5 จงพิสูจน์ว่า $x^n + (x+3)^n + (x+5)^n + (x+6)^n + (x+9)^n + (x+10)^n + (x+12)^n$
 $+ (x+15)^n = (x+1)^n + (x+2)^n + (x+4)^n + (x+7)^n + (x+8)^n + (x+11)^n$
 $+ (x+13)^n + (x+14)^n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ ให้ } A(n) &= x^n + (x+3)^n + (x+5)^n + (x+6)^n + (x+9)^n + (x+10)^n + (x+12)^n \\ &\quad + (x+15)^n\end{aligned}$$