

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร

คณิตศาสตร์ปรนัย

ฉบับพิเศษ

Calculus I
Calculus II
Calculus III
Differential Equations
Probability and Statistics



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 3

ฉบับปรับปรุงเพิ่มเติม

สูตรอนุพันธ์

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ $c' = 0$
2. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ $(f + g)' = f' + g'$
4. $\frac{d}{dx}(cf(x) + kg(x)) = c\frac{d}{dx}f(x) + k\frac{d}{dx}g(x)$ $(cf + kg)' = cf' + kg'$
5. $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = (\frac{d}{dx}f(x))(g(x)) + (\frac{d}{dx}g(x))(f(x))$ $(fg)' = f'g + g'f$
6. $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$ $(\frac{f}{g})' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$
7. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{d}{dx}u(x)$ $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
8. $\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dg(x)}f(g(x)) \frac{d}{dx}g(x)$ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
9. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$
10. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
11. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
12. $\frac{d}{dx} \log_a |x| = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
14. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
15. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
16. $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$
17. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
18. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$
19. $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
22. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$
23. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
24. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

สูตรอินทิเกรต

1. $\int k \, dx = kx + C$
2. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$
4. $\int e^x \, dx = e^x + C$
5. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
8. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
9. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
11. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
12. $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C$
13. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$
14. $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
17. $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \arctan x + c$
18. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcsec} x + C$

คณิตศาสตร์ปรนัย

ฉบับพิเศษ

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร

Calculus I

Calculus II

Calculus III

Differential Equations

Probability and Statistics



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<http://www.math.sc.chula.ac.th>

<http://www.math.sc.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

<http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

คำนำ

หนังสือ สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations Probability and Statistics จัดทำขึ้นเพื่อให้ นิสิตคณะต่างๆ เช่น คณะวิทยาศาสตร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะพาณิชยศาสตร์ และการบัญชี คณะครุศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์การกีฬา คณะเภสัชศาสตร์ คณะสหเวชศาสตร์ ได้เห็นเนื้อหาวิชาทั้งหมดเพื่อจะได้ใช้ประโยชน์ในการเรียน การสอน การสอบ เนื้อหาโดยย่อประกอบด้วย

Calculus I : ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ การอินทิเกรต ฟังก์ชันอดิสัย ความยาวเส้นโค้ง เทคนิคการอินทิเกรต อินทิกรัลไม่ตรงแบบ การหาอินทิกรัลเชิงตัวเลข รูปแบบไม่กำหนด ทฤษฎีบทโลปีตาล

Calculus II : อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ลำดับ อนุกรม พหุนามเทย์เลอร์ การประมาณค่าฟังก์ชัน การอินทิเกรตเชิงตัวเลข จุด เส้นตรง และระนาบ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ พิกัดเชิงขั้ว การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

Calculus III : พื้นผิว ทรงกลม ทรงกระบอก กรวย อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์ พิกัดเชิงขั้ว ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ อินทิกรัลตามเส้น ฟังก์ชันเกรเดียนต์ ฟังก์ชันศักย์ ทฤษฎีบทของกรีน สมการเวกเตอร์ของพื้นผิว อินทิกรัลตามพื้นผิว ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ หรือ ทฤษฎีบทของเกาส์

Differential Equations : การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ รอนสเกียน พหุนามช่วย ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ผลการแปลงลาปลาซ อนุกรมฟูรีเยร์ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

Probability and Statistics : การนับจำนวนวิธี ความน่าจะเป็น ตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น การประมาณค่า ช่วงความเชื่อมั่น การทดสอบสมมติฐาน การวิเคราะห์ความแปรปรวน

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ ครูผู้สอน นิสิต นักศึกษา และ ผู้อ่านทุกท่าน

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I	1 – 24
สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus II	25 – 52
สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus III	53 – 94
สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Differential Equations	95 – 134
สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Probability and Statistics	135 – 184

คณิตศาสตร์ปริยาย ฉบับพิเศษ สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations
Probability and Statistics
พิมพ์ครั้งที่ 3 มกราคม พ.ศ. 2555

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations

Probability and Statistics . - -

พิมพ์ครั้งที่ 3. - - กรุงเทพฯ :โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555.

186 หน้า.

1. แคลคูลัส .I. ชื่อเรื่อง.

515

ISBN 978 - 974 - 365 - 254 - 7

จัดทำโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ผู้จัดจำหน่าย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระเกี้ยว โทร.0-2218-7000-3 โทรสาร0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร.0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ. พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พะเยา จ.พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร0-2160-5304

รัตนนิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

และเครือข่าย ฯ

ร้านค้าติดต่อ แผนกขายส่ง สาขารัตนนิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 0-2218-3563, 0-2218-3557, 0-2215-3612

<http://www.cuprint.chula.ac.th>

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร CALCULUS I

1. ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า a เป็น จุดลิมิต (limit point) ของ E
ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริงบวก δ ที่กำหนดให้ จะได้ $((a - \delta, a + \delta) - \{a\}) \cap E \neq \emptyset$
2. ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D เรากล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิต (limit) เป็นจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$
3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ มีค่า แล้ว ค่าของลิมิตมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น
4. ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (-\infty, a)$
 $f(x)$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย และเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$
ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < a - x < \delta$ (หรือ $a - \delta < x < a$)
5. ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (a, \infty)$
 $f(x)$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา และเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < x - a < \delta$ (หรือ $a < x < a + \delta$)
1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ มีค่า แล้ว ค่าของลิมิตมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น
2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ มีค่า แล้ว ค่าของลิมิตมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น
3. ในกรณีที่ D เป็นช่วงที่มีจุด a เป็นจุดปลายช่วง
 - 3.1 ถ้าจุด a เป็นจุดปลายช่วงทางซ้าย แล้วเราจะถือว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ก็คือ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
 - 3.2 ถ้าจุด a เป็นจุดปลายช่วงทางขวา แล้วเราจะถือว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ก็คือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
4. ให้ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (-\infty, a)$ และ $D \cap (a, \infty)$ และ $L \in \mathbb{R}$
จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
6. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ เมื่อ L และ M เป็นจำนวนจริง จะได้
 1. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ และ $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$
 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = LM$
 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |L|$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } \sqrt[n]{L} \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

7. เทคนิคการหาลิมิตของฟังก์ชัน

1. แทนค่า

$$\text{ตัวอย่าง } \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 4 = 4^2 + 4 + 4 = 24 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{2x + 1} = \frac{1^2 + 4}{2(1) + 1} = \frac{5}{3}$$

$$2. \text{แยกตัวประกอบ ตัวอย่าง } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$$

3. หาตัวประกอบมาคูณบนและล่าง

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + 4} - 2)(\sqrt{x + 4} + 2)}{x(\sqrt{x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 4) - 4}{x(\sqrt{x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + 4} + 2} = \frac{1}{4}$$

4. ลิมิตที่มีรูปแบบเฉพาะ

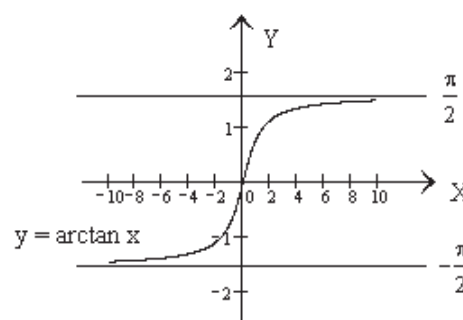
$$\text{ตัวอย่าง } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \text{ ทุกค่า } n \in \mathbb{R}^+, a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0, a > 1$$

5. พิจารณาค่าของลิมิตจากกราฟ

$$\text{จากกราฟของ } y = \arctan x \text{ จะได้ } \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$



6. ใช้กฎของโลปีตาล

$$\text{ซึ่งกล่าวว่า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\text{ตัวอย่าง } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$$

8. ให้ $f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ และ $g: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $R_f \subseteq D_2 \subseteq \mathbb{R}$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ และมีจำนวนจริงบวก δ ซึ่ง $f(x) \neq M$ ทุก $x \in ((a - \delta, a + \delta) \cap D_1) - \{a\}$

และ $\lim_{t \rightarrow M} g(t) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow M} g(t) = L$

9. ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก D ไปยัง $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$

ถ้า $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ทุก $x \in D - \{a\}$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

10. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n = L^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

11. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = cL$

12. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} x^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ เมื่อ $a^{\frac{m}{n}}$ เป็นจำนวนจริง

13. ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

14. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก

16. ทฤษฎีบทลิมิตเกี่ยวกับอนันต์

1. ถ้ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) > 0$ ทุก $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D_f - \{a\}$ และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$
แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

2. ถ้ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) < 0$ ทุก $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D_f - \{a\}$ และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$
แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

3. ถ้ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) > 0$ ทุก $x \in (a, a + \delta) \cap D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$

4. ถ้ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) < 0$ ทุก $x \in (a, a + \delta) \cap D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

5. ถ้ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) > 0$ ทุก $x \in (a - \delta, a) \cap D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

6. ถ้ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) < 0$ ทุก $x \in (a - \delta, a) \cap D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

7. ถ้ามี $M > 0$ ที่ทำให้ $f(x) > 0$ ทุก $x > M$ และ $x \in D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

8. ถ้ามี $M > 0$ ที่ทำให้ $f(x) < 0$ ทุก $x > M$ และ $x \in D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

9. ถ้ามี $M < 0$ ที่ทำให้ $f(x) > 0$ ทุก $x < M$ และ $x \in D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

10. ถ้ามี $M < 0$ ที่ทำให้ $f(x) < 0$ ทุก $x < M$ และ $x \in D_f$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

17. ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ $a \in D$ เราจะกล่าวว่า f มี ความต่อเนื่อง ที่จุด $x = a$

ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้เป็นจริง 1. $f(a)$ มีค่า

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ มีค่า

และ 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

18. ถ้า f และ g มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ แล้ว จะได้ 1. $f + g$ และ $f - g$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$

2. cf มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

3. fg มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$

4. $\frac{f}{g}$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

19. ถ้า f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ และ g มีความต่อเนื่องที่จุด $x = f(a)$

แล้ว $g \circ f$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ และ $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)$

20. $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ มีความต่อเนื่องที่จุด x ทุก $x \in \mathbb{R}$

$\frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x) \neq 0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม มีความต่อเนื่องที่จุด x ทุก $x \in D_f$

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก มีความต่อเนื่องที่จุด x ทุก $x \in D_f$

21. f มีความต่อเนื่องทางซ้าย ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้เป็นจริง 1. $f(a)$ มีค่า

2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ มีค่า

และ 3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

22. f มีความต่อเนื่องทางขวา ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้เป็นจริง 1. $f(a)$ มีค่า

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ มีค่า

และ 3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

23. ในกรณีที่ D เป็นช่วงที่มีจุด a เป็นจุดปลายช่วง และ จุด b เป็นจุดปลายช่วง

1. ถ้าจุด a เป็นจุดปลายช่วงทางซ้าย

แล้วเราจะถือว่า ความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็คือ ความต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x = a$

2. ถ้าจุด b เป็นจุดปลายช่วงทางขวา

แล้วเราจะถือว่า ความต่อเนื่องที่จุด $x = b$ ก็คือ ความต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x = b$

24. f มีความต่อเนื่องบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องที่จุด x ทุก $x \in I$

ถ้ามี $x_0 \in I$ ซึ่ง f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = x_0$ แล้ว f ไม่มีความต่อเนื่องบนช่วง I

25. f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. f มีความต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x = a$

และ 2. f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b)

26. f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b)

และ 2. f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x = b$

27. f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. f มีความต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x = a$

2. f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b)

และ 3. f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x = b$

28. ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (The Intermediate Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ k เป็นจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้ว จะมีจำนวนจริง $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f(c) = k$

29. ทฤษฎีบทค่าสูงสุด - ค่าต่ำสุด (Maximum - Minimum Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบนช่วง $[a, b]$ กล่าวคือ มี $x_M \in [a, b]$ ซึ่ง $f(x_M) \geq f(x)$ ทุก $x \in [a, b]$ และ มี $x_m \in [a, b]$ ซึ่ง $f(x_m) \leq f(x)$ ทุก $x \in [a, b]$

30. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x คือ $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตมีค่า

แทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x)$ หรือ $\frac{d}{dx} f(x)$ หรือ $D_x f(x)$ หรือ y' หรือ $\frac{dy}{dx}$

31. ความชันของเส้นโค้ง หรือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือ $\frac{dy}{dx}$ 32. f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง $[a, b]$

1. f มีอนุพันธ์ทางขวา ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ มีค่า

ใช้สัญลักษณ์ $f'(a^+)$ แทนอนุพันธ์ทางขวาของ f ที่จุด a

$$f'(a^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ เมื่อลิมิตมีค่า}$$

2. f มีอนุพันธ์ทางซ้าย ที่จุด b ก็ต่อเมื่อ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$ มีค่า

ใช้สัญลักษณ์ $f'(b^-)$ แทนอนุพันธ์ทางซ้ายของ f ที่จุด b

$$f'(b^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \text{ เมื่อลิมิตมีค่า}$$

3. f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ก็ต่อเมื่อ $f'(x)$ มีค่า ทุก $x \in (a, b)$

4. f มีอนุพันธ์บนช่วงปิด $[a, b]$

ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) และ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่จุด a และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่จุด b

5. ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วงและมีรอยต่อที่จุด $c \in (a, b) \subseteq D_f$

$f'(c)$ มีค่า ก็ต่อเมื่อ $f'(c^-)$ และ $f'(c^+)$ มีค่า และ $f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+)$

33. ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด c แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่จุด c

ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด c แล้ว f จะไม่มีอนุพันธ์ที่จุด c

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่จุด c แล้ว f อาจ มี หรือ ไม่มี อนุพันธ์ที่จุด c ก็ได้

34. กฎลูกโซ่ ให้ $y = f(u)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \text{ หรือ } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

35. ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ มีอนุพันธ์ไม่เป็นศูนย์ที่จุด x จะได้ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

36. อนุพันธ์อันดับสูง

อนุพันธ์อันดับที่สอง แทนด้วย $f''(x)$ หรือ y'' หรือ $\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตมีค่า

อนุพันธ์อันดับที่สาม แทนด้วย $f'''(x)$ หรือ y''' หรือ $\frac{d^3y}{dx^3} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตมีค่า

อนุพันธ์อันดับที่ n แทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^n y}{dx^n} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตมีค่า

37. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย $F(x, y) = c$

1. หาอนุพันธ์ตลอดสมการเทียบกับตัวแปร x โดยคิด y เป็นฟังก์ชันของ x จะได้ $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$

2. จัดรูปพีชคณิตหา $\frac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง จากสมการ $x^2 + y^2 = 9$ จะได้ $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(9)$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \text{ เพราะฉะนั้น } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

38. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ $y = f(x)$ เราเรียก $f'(x) \Delta x$ ว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ ของ f ที่ x

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $df(x)$ หรือ dy เพราะฉะนั้น $df(x) = f'(x) \Delta x$

39. การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ มีขั้นตอนดังนี้

1. พิจารณาว่าเราต้องการประมาณค่าของฟังก์ชันใด ที่จุดใด

สมมติว่าเราจะประมาณค่าฟังก์ชัน f ที่จุด a กล่าวคือ ต้องการประมาณค่าของ $f(a)$

2. เลือกจุด x และ Δx ที่ทำให้ $a = x + \Delta x$ โดยสามารถคำนวณค่า $f(x)$ และ $f'(x)$ ได้ง่าย

3. หาค่าประมาณของ $f(a)$ โดยสูตร $f(a) = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$

4. ค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ = $\frac{dy}{y}$

5. เปอร์เซนต์ค่าผิดพลาด = $\left| \frac{dy}{y} \right| \times 100\%$

ตัวอย่าง การประมาณค่าของ $\sqrt{1.05}$ โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

1. สร้างฟังก์ชันเลียนแบบ $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. เลือก $x = 1$ และ $\Delta x = 0.05$

$$\sqrt{1.05} = f(1 + 0.05) = f(x + \Delta x) \approx f(1) + f'(1)(0.05) = 1 + \frac{1}{2}(0.05) = 1.025$$

ค่าจากเครื่องคิดเลข $\sqrt{1.05} = 1.024695067$

หมายเหตุ สูตร $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{2}$ ใช้ได้ในกรณี Δx มีค่าน้อย

40. $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ ซึ่งมีอนุพันธ์ที่ x และ c เป็นค่าคงตัว และ r เป็นจำนวนจริง จะได้

$$1. dc = 0$$

$$2. d(cu) = c du$$

$$3. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$4. d(uv) = u dv + v du$$

$$5. d(u^r) = r u^{r-1} du$$

$$6. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \text{ เมื่อ } v \neq 0$$

41. ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) โดยที่ $f(a) = f(b)$

แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$

42. ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอนุพันธ์ (Mean-Value Theorem for Differential Calculus)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วง (a, b)

แล้ว จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

43. f เป็น ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง I

ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริง x_1 และ x_2 ใน I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

44. f เป็น ฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง I

ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริง x_1 และ x_2 ใน I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

45. f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วง (a, b)

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $[a, b]$

2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $[a, b]$

3. ถ้า $f'(x) = 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงตัว บนช่วง $[a, b]$

หมายเหตุ การพิจารณาเครื่องหมายของฟังก์ชันเป็นเครื่องมือสำคัญในการหาช่วงที่ฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

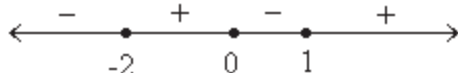
ตัวอย่าง การหาช่วงที่ $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือ ฟังก์ชันลด

เพราะว่า $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x - 1)(x + 2)$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -2, 0$ และ 1

เครื่องหมายของ f' บนช่วง $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$

คือ

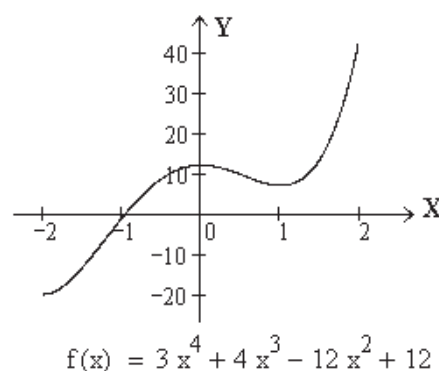


เพราะว่า $f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (-\infty, -2)$ และ $x \in (0, 1)$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $(-\infty, -2)$, $(0, 1)$

เพราะว่า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-2, 0)$ และ $x \in (1, \infty)$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(-2, 0)$, $(1, \infty)$

46. ฟังก์ชัน F เป็น ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของฟังก์ชัน f บนช่วง I ถ้า $F'(x) = f(x)$ ทุก x บนช่วง I 47. ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I

แล้ว ฟังก์ชัน $G(x) = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I ด้วย

48. เพราะว่ $G'(x) = \frac{d}{dx} (F(x) + C) = F'(x)$ ทุก $x \in I$

เพราะฉะนั้น ปฏิยานุพันธ์อื่นทั้งหมดของ f บนช่วง I จะอยู่ในรูป $G(x) = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

เราเรียก $F(x) + C$ ว่า ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป (general antiderivative) ของ f บนช่วง I

49. ถ้า F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I แล้วจะมีค่าคงตัว C ที่ทำให้ $G(x) = F(x) + C$ ทุก $x \in I$

50. เราจะเรียกปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f ว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ f

แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x) dx$

เพราะฉะนั้น ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f แล้ว $\int f(x) dx = F(x) + C$

เพราะฉะนั้น $\int f'(x) dx = f(x) + C$ และ $\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$

51. 1. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

52. การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปร (integration by substitution)

ให้ $u = u(x)$ จะได้ $\int f(u) du = \int [f(u(x)) \frac{du(x)}{dx}] dx$

53. ผลบวกรีมันน์ และ อินทิกรัลจำกัดเขต

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $[a, b] \subseteq D_f$ และ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง $[a, b]$ ซึ่งแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย โดยที่ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

และ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ทุก $k = 1, 2, \dots, n$

ให้ x_k^* เป็นจุดในช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ ทุก $k = 1, 2, \dots, n$ ให้ $S^*(P, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$

$S^*(P, f)$ เรียกว่า ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) ของ f บนช่วง $[a, b]$ เทียบกับผลแบ่งกั้น P

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S^*(P, f)$ มีค่าเดียวกันเสมอ ไม่ว่า $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ

ของช่วง $[a, b]$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P\| = 0$

และไม่ว่าจะเลือกจุด x_k^* ในแต่ละช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ ของ $[a, b]$ อย่างไรก็ตาม

แล้ว เราจะกล่าวว่า f อินทิเกรตได้ บนช่วง $[a, b]$ (f is integrable on $[a, b]$)

และเรียกค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} S^*(P, f)$ ว่า อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) ของ f บนช่วง $[a, b]$

หรือเรียกสั้น ๆ ว่า อินทิกรัล ของ f บนช่วง $[a, b]$ หรือ อินทิกรัล ของ f จาก a ถึง b

และเขียนแทนอินทิกรัลนี้ด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x) dx$ หรือ $\int_a^b f$

54. ฟังก์ชัน f มีขอบเขต บนช่วง $[a, b]$ (f is bounded on $[a, b]$)

ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง M ซึ่งทำให้ $|f(x)| \leq M$ ทุก $x \in [a, b]$

55. ถ้า $f(a)$ มีค่า แล้ว เรานิยาม $\int_a^a f(x) dx = 0$ และ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

56. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ จะได้

$$1. \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad 2. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$3. \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x) dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x) dx \text{ เมื่อ } c_1, c_2, c_3 \in [a, b]$$

$$4. \text{ ถ้า } f(x) \geq 0 \text{ ทุก } x \in [a, b] \text{ แล้ว } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$5. \text{ ถ้า } f(x) > 0 \text{ ทุก } x \in [a, b] \text{ แล้ว } \int_a^b f(x) dx > 0$$

$$6. \text{ ถ้า } f(x) \leq g(x) \text{ ทุก } x \in [a, b] \text{ แล้ว } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$7. \text{ ถ้า } f(x) < g(x) \text{ ทุก } x \in [a, b] \text{ แล้ว } \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

$$8. |f| \text{ อินทิเกรตได้บนช่วง } [a, b] \text{ และ } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

57. ถ้ามีจุดในช่วง $[a, b]$ ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชัน f และ g มีค่าไม่เท่ากันอยู่เป็นจำนวนจำกัด

$$\text{และถ้า } f \text{ อินทิเกรตได้บนช่วง } [a, b] \text{ แล้ว } g \text{ อินทิเกรตได้บนช่วง } [a, b] \text{ และ } \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

58. ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอินทิกรัล (Mean-Value Theorem of Integral Calculus)

$$\text{ถ้า } f \text{ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง } [a, b] \text{ แล้ว จะมี } c \in [a, b] \text{ ซึ่งทำให้ } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

$$59. \text{ ถ้า } f \text{ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง } [a, b] \text{ ค่าเฉลี่ย ของ } f \text{ บนช่วง } [a, b] \text{ คือ } \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \text{ เมื่อ } a < b$$

60. ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส (The First Fundamental Theorem of Calculus)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ c เป็นค่าคงตัวในช่วง $[a, b]$

$$\text{ให้ } F(x) = \int_c^x f(t) dt \text{ ทุก } x \in [a, b] \text{ จะได้ } F \text{ เป็นฟังก์ชันที่มือนุพันธ์บนช่วง } [a, b]$$

$$\text{โดยที่ } F'(x) = f(x) \text{ หรือก็คือ } \frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt = f(x) \text{ ทุก } x \in [a, b]$$

$$61. 1. \frac{d}{dx} \int_c^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) \frac{du}{dx} \quad 2. \frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) \frac{du}{dx} - f(v(x)) \frac{dv}{dx}$$

62. ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส (The Second Fundamental Theorem of Calculus)

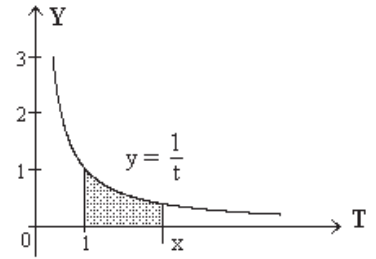
ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $F'(x) = f(x)$ ทุก $x \in [a, b]$

$$\text{แล้ว } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

63. 1. $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ ทุก $x \in (0, \infty)$

2. $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$ และ $\frac{d}{dx} \ln |u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$



64. $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} \approx 2.71828182845905$ หรือ $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x \approx 2.71828182845905$

65. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ และ $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ และ $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

66. ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

สมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$

2. $\cosh(-x) = \cosh x$

3. $\tanh(-x) = -\tanh x$

4. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

5. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$

6. $\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$

7. $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

8. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

9. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

10. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ หรือ $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$ หรือ $\cosh 2x = 1 + 2 \sinh^2 x$

67. สูตรอนุพันธ์ 1. $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$

2. $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

3. $\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

4. $\frac{d}{dx} \operatorname{coth} x = -\operatorname{cosech}^2 x$

5. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

6. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \coth x$

สูตรอินทิเกรต 1. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

2. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

3. $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$

4. $\int \operatorname{cosech}^2 x dx = -\coth x + C$

5. $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$

6. $\int \operatorname{cosech} x \coth x dx = -\operatorname{cosech} x + C$

7. $\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C$

8. $\int \coth x dx = \ln |\sinh x| + C$

9. $\int \operatorname{sech} x dx = 2 \arctan e^x + C$

10. $\int \operatorname{cosech} x dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$

68. ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

1. $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

2. $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ทุก $x \in [1, \infty)$

3. $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ทุก $x \in (-1, 1)$
4. $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ทุก $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
5. $\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ ทุก $x \in (0, 1]$
6. $\operatorname{arccosech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$ ทุก $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

69. สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

1. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$
4. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$
5. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsech} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
6. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccosech} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

70. สูตรอินทิเกรตที่ให้ค่าเป็นฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsinh} x + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosh} x + C$
3. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh} x + C$
4. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arccoth} x + C$
5. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = -\operatorname{arcsech} |x| + C$
6. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = -\operatorname{arccosech} |x| + C$

71. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนเซต S และ $c \in S$

1. $f(c)$ เป็น ค่าสูงสุด ของ f บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \geq f(x)$ ทุก $x \in S$
2. $f(c)$ เป็น ค่าต่ำสุด ของ f บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \leq f(x)$ ทุก $x \in S$
3. $f(c)$ เป็น ค่าสุดขีด ของ f บน S

ก็ต่อเมื่อ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน S หรือ $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน S

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบนช่วง $[a, b]$

4. $f(c)$ เป็น ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ของ f บน S
ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(c) \geq f(x)$ ทุก $x \in S \cap (c - \delta, c + \delta)$
5. $f(c)$ เป็น ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ของ f บน S
ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(c) \leq f(x)$ ทุก $x \in S \cap (c - \delta, c + \delta)$
6. $f(c)$ เป็น ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ของ f บน S ก็ต่อเมื่อ
 $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน S หรือ $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S
7. ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวบน S แล้ว $f(a)$ เป็นค่าสุดขีด ทุกค่า $a \in S$
8. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้มากกว่าหนึ่งค่า
9. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $[a, b]$ แล้ว $f(a)$ เป็นค่าต่ำสุด และ $f(b)$ เป็นค่าสูงสุด
10. ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $[a, b]$ แล้ว $f(a)$ เป็นค่าสูงสุด และ $f(b)$ เป็นค่าต่ำสุด

11. ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c เมื่อ $c \in (a, b)$ และ $f'(c)$ มีค่า แล้ว $f'(c) = 0$
12. ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c เมื่อ $c \in (a, b)$ แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า
13. c เรียกว่า จุดวิกฤต ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า
72. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนช่วง $[a, b]$
 f มีอนุพันธ์เป็นช่วง ๆ บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ มี $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ โดยที่
 1. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
 และ
 2. f มีอนุพันธ์บนช่วง (x_{i-1}, x_i) ทุก $i = 1, 2, \dots, n$
73. จุดบนช่วง $[a, b]$ ที่มีโอกาสให้ค่าสุดขีดของ f ได้จะอยู่ที่
 1. จุดปลายทั้งสองของช่วง คือ a และ b
 - หรือ 2. จุด $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า
73. ขั้นตอนการหาค่าสุดขีดของ f ซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และมีอนุพันธ์เป็นช่วง ๆ บน $[a, b]$
 1. หาจุดวิกฤตของ f ที่อยู่ภายในช่วง (a, b) โดยหาค่า $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า
 2. หาค่า $f(c)$ ทั้งหมดที่พบในข้อ 1. และ $f(a)$ และ $f(b)$
 3. เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันที่ได้จากขั้นตอนที่ 2. โดย ค่ามากที่สุด จะเป็นค่าสูงสุดของ f บนช่วง $[a, b]$ และ ค่าน้อยที่สุด จะเป็นค่าต่ำสุดของ f บนช่วง $[a, b]$
74. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ c เป็นจุดวิกฤตของ f
 เมื่อ $c \in (a, b)$ สมมติว่า มี $\delta > 0$ ซึ่ง $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$
 และ $f'(x)$ มีค่าบนช่วง $(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$
 1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (c - \delta, c)$ และ $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (c, c + \delta)$
 แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง (a, b)
 2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (c - \delta, c)$ และ $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (c, c + \delta)$
 แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง (a, b)
75. ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่มีความต่อเนื่อง
 1. หาจุดวิกฤตของ f โดยหาค่า c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า
 2. ตรวจสอบจุดวิกฤต c และ จุดปลายของช่วง (ถ้ามี) ว่าให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
 - 2.1 ตรวจสอบจุดวิกฤต c โดยอาศัยข้อ 74.
 - 2.2 ตรวจสอบจุดปลายทางซ้ายของช่วง (ถ้ามี) สมมติคือ a โดย สำหรับบางค่า $\delta > 0$
 - 2.2.1 ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (a, a + \delta)$ แล้ว $f(a)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
 - 2.2.2 ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (a, a + \delta)$ แล้ว $f(a)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
 - 2.3 ตรวจสอบจุดปลายทางขวาของช่วง (ถ้ามี) สมมติคือ b โดย สำหรับบางค่า $\delta > 0$
 - 2.3.1 ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (b - \delta, b)$ แล้ว $f(b)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
 - 2.3.2 ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (b - \delta, b)$ แล้ว $f(b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

76. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ โดยที่ $L \neq 0$

แล้วจะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x)$ กับ L มีเครื่องหมายเหมือนกันทุกค่าของ $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$

77. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ โดยที่ $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ มีค่า

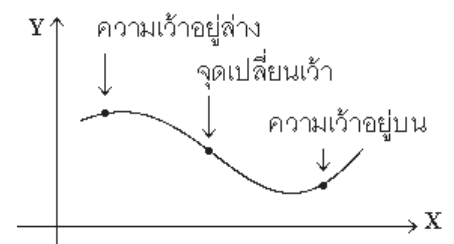
1. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
3. $f''(c) = 0$ หรือ $f''(c)$ ไม่มีค่า เราไม่สามารถสรุปผลได้

78. ขั้นตอนในการทำโจทย์ปัญหาค่าสุดขีด

0. วาดภาพประกอบ (ถ้าทำได้จะดีมาก เพื่อประโยชน์ในการเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร)
1. อ่านปัญหาให้เข้าใจว่าจะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด
2. สมมติตัวแปร
3. สร้างฟังก์ชันของตัวแปรที่ต้องการหาค่าสุดขีด
4. ถ้าฟังก์ชันที่สร้างมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรหลายตัว ให้หาความสัมพันธ์ของตัวแปรเพื่อลดให้เหลือ 1 ตัวแปร
5. หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดตามวิธีในข้อ 75. และ ข้อ 77.

79. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x_0 และ $y = g(x)$ เป็นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด x_0

1. f มี ความเว้าอยู่ล่าง ที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) < g(x)$ ทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$
2. f มี ความเว้าอยู่บน ที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > g(x)$ ทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$



80. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) เราจะกล่าวว่า

1. f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f มีความเว้าอยู่ล่างที่ทุกจุด $x \in (a, b)$
2. f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f มีความเว้าอยู่บนที่ทุกจุด $x \in (a, b)$

81. f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด c เราเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า จุดเปลี่ยนเว้า ของ f ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง f เปลี่ยนความเว้าจากความเว้าแบบหนึ่งบนช่วง $(c - \delta, c)$ ไปเป็นความเว้าอีกแบบหนึ่งบนช่วง $(c, c + \delta)$

82. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่สองบนช่วง (a, b) จะได้

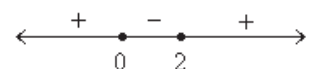
1. ถ้า $f''(x) > 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง (a, b)
2. ถ้า $f''(x) < 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง (a, b)

หมายเหตุ การพิจารณาเครื่องหมายของฟังก์ชัน เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการตอบคำถามเกี่ยวกับความเว้า

ตัวอย่าง การหาช่วงที่ f มีความเว้าอยู่บน ความเว้าอยู่ล่าง และ จุดเปลี่ยนเว้า ของ $f(x) = x^4 - 4x^3$

เพราะว่า $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ และ $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$

เพราะฉะนั้น $f''(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$ และ 2



พิจารณาเครื่องหมายของ f'' บนช่วง $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$ เพราะ $f''(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-\infty, 0)$

และ $f''(x) < 0$ เมื่อ $x \in (0, 2)$ เพราะฉะนั้นจุด $(0, f(0))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f