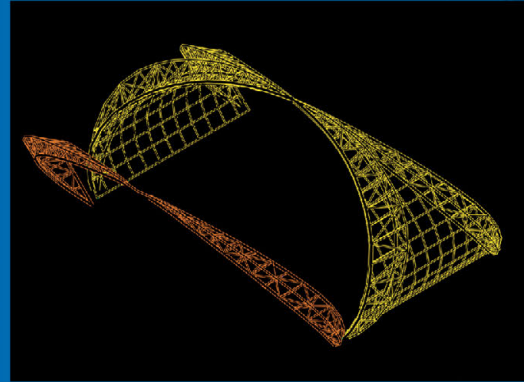
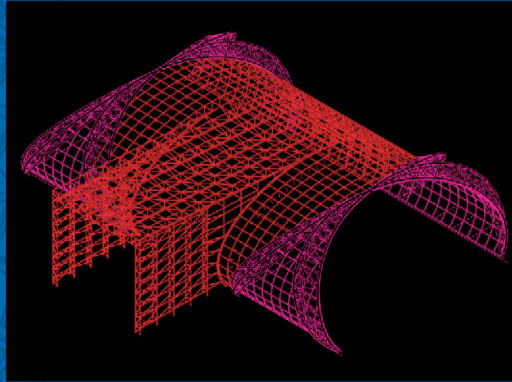


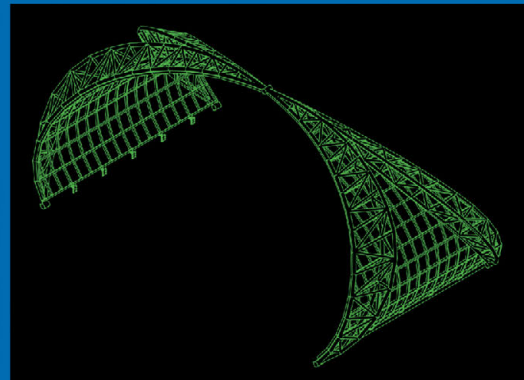


สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



การวิเคราะห์โครงสร้าง
โดยวิธี

เมทริกซ์



MATRIX

ธัญวัฒน์ โพธิ์ศิริ

การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีเมทริกซ์

ธัญวัฒน์ โพธิ์ศิริ



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2551

190. -

ธัญวัฒน์ โพธิ์ศิริ

การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีเมทริกซ์ / ธัญวัฒน์ โพธิ์ศิริ

1. การวิเคราะห์โครงสร้าง
2. เมทริกซ์

624.171

ISBN 978-974-03-2059-3

สพจ. 1151



สรรพคุณคำวิชาการ สุสังคัม

www.ChulaPress.com

Knowledge to All

ลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2551

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้นต้องได้รับ

อนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้จัดทำหน้าย ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา

ศาลาพระเกษีย โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881 โทรสาร 0-2254-9494

ม.นครสวรรค์ จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3838-4855-9 โทรสาร 0-3838-3239

CALL CENTER โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

เครือข่าย ศูนย์หนังสือ ม.แม่ฟ้าหลวง จ.เชียงราย โทร. 0-5391-7020-4 โทรสาร 0-5391-7025

ศูนย์หนังสือทะเลแก้ว ม.ราชภัฏพิบูลสงคราม จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-7010

โทรสาร 0-5521-6388

ศูนย์หนังสือ ม.วลัยลักษณ์ จ.นครศรีธรรมราช โทร. 0-7567-3648-51

โทรสาร 0-7567-3652

ศูนย์หนังสือตรัง จ.ตรัง โทร. 0-7521-8115 โทรสาร 0-7521-8115

ร้านหนังสือบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) งามคำแหง 43/1 โทร. 0-2538-2573

โทรสาร 0-2539-7091

ร้านค้าติดต่อ แผนกขายส่ง สยามสแควร์ ชั้น 14 โทร. 0-2218-9889-90 โทรสาร 0-2254-9495

กองบรรณาธิการ : ทิพวรรณ โหละสุต

ออกแบบปก : คุณกิตติกร สุรางค์ ออกแบบรูปเล่ม : รองศาสตราจารย์ ดร.ธัญวัฒน์ โพธิ์ศิริ

คำนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างนับเป็นความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับวิศวกรในการคำนวณออกแบบเพื่อเลือกใช้ขนาดของชิ้นส่วนโครงสร้างที่ปลอดภัยและประหยัด อีกทั้งยังเป็นส่วนหนึ่งของเนื้อหารายวิชาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา

ในปัจจุบัน วิทยาการด้านคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้าไปมากประกอบกับการพัฒนาเทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ส่งผลให้การวิเคราะห์โครงสร้างโดยอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณมีความสะดวกมากขึ้นสำหรับวิศวกร หนังสือเล่มนี้มีวัตถุประสงค์หลักในการนำเสนอวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างผนวกกับวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขในรูปแบบเมทริกซ์สำหรับโครงสร้างรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วยโครงข้อหมุน คาน และโครงข้อแข็ง โดยผู้เขียนได้นำเสนอตัวอย่างขั้นตอนการคำนวณโดยใช้โปรแกรม MATLAB¹ ซึ่งง่ายต่อการคำนวณเชิงตัวเลขในรูปแบบเมทริกซ์เพื่อให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจในระดับที่เพียงพอต่อการนำไปประยุกต์ใช้งานจริงได้

เนื้อหาของหนังสือเล่มนี้ประกอบด้วย บทนำเกี่ยวกับระบบโครงสร้าง และวิธีการสร้างแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ระบบโครงสร้าง การวิเคราะห์ชิ้นส่วนโครงข้อหมุน การวิเคราะห์ชิ้นส่วนคานและโครงข้อแข็ง การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีเฟล็กซิบิลิตี และในบทสุดท้ายนำเสนอหลักการทำงานเสมือนและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เบื้องต้นในการวิเคราะห์โครงสร้าง สำหรับประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ขั้นสูงต่อไป

อย่างไรก็ดี การทำความเข้าใจเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้จำเป็นต้องอาศัยความรู้พื้นฐานในการวิเคราะห์โครงสร้าง ดังนั้นหนังสือเล่มนี้จึงเหมาะสำหรับผู้อ่านที่มีความรู้เบื้องต้นด้านการวิเคราะห์โครงสร้างพอสมควร และหนังสือเล่มนี้ทำหน้าที่ปูพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาการวิเคราะห์โครงสร้างขั้นสูงต่อไป

ท้ายที่สุดนี้ ผู้เขียนใคร่ขอขอบคุนโครงการสนับสนุนการเขียนตำรา/หนังสือ ของคณะกรรมการคณะวิศวกรรมศาสตร์ (เล่มที่ 8) ที่ให้การสนับสนุนในการเขียนหนังสือเล่มนี้มาในโอกาสนี้ด้วย

¹ MATLAB เป็นเครื่องหมายการค้าของ The MathWorks, Inc. สำหรับข้อมูลเพิ่มเติม กรุณาติดต่อ

สารบัญ

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ระบบโครงสร้างและแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ระบบโครงสร้าง	1
1.2 การสร้างแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ระบบโครงสร้าง	5

บทที่ 2 การวิเคราะห์ชิ้นส่วนโครงข้อหมุน

2.1 ชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติ	9
2.2 การแปลงพิกัด	18
2.3 การประกอบเมทริกซ์สติฟเนสของระบบโครงสร้าง	29
2.4 การวิเคราะห์ระบบโครงสร้างแบบมีเงื่อนไขบังคับ	37
2.5 การประกอบเมทริกซ์สติฟเนสของระบบโครงสร้างโดยวิธีเวกเตอร์จุดหมาย	46
2.6 คุณสมบัติของเมทริกซ์สติฟเนสของระบบโครงสร้าง	50
2.7 กลไกของระบบโครงสร้าง	62
2.8 โครงข้อหมุน 3 มิติ	64

บทที่ 3 การวิเคราะห์ชิ้นส่วนคานและโครงข้อแข็ง

3.1 ชิ้นส่วนคาน 2 มิติ	67
3.2 การประกอบเมทริกซ์สติฟเนสของระบบโครงสร้างคาน 2 มิติ	78
3.3 การวิเคราะห์ระบบโครงสร้างคาน 2 มิติแบบมีเงื่อนไขบังคับ	82
3.4 แรงที่ปลายยึดแน่นสำหรับคาน 2 มิติ	89
3.5 ชิ้นส่วนโครงข้อแข็ง 2 มิติ	103
3.6 ชิ้นส่วนโครงสร้างกริด 2 มิติ	114
3.7 ชิ้นส่วนโครงข้อแข็ง 3 มิติ	118

บทที่ 4 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีเฟล็กซิบิลิตี

4.1 สมการพื้นฐานของวิธีเฟล็กซิบิลิตี	125
4.2 ชิ้นส่วนคาน 2 มิติ	142
4.3 แรงที่ปลายยึดแน่นสำหรับชิ้นส่วนคาน 2 มิติ	146
4.4 ชิ้นส่วนโครงข้อแข็ง 2 มิติ	152

บทที่ 5 หลักการงานเสมือนและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์โครงสร้าง

5.1 หลักการงานเสมือน	159
5.2 ชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติ	164
5.3 การแปลงพิกัดและการประกอบเมทริกซ์สติเฟนสของระบบโครงข้อหมุน 2 มิติ	189
5.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับชิ้นส่วนคาน 2 มิติ	205
5.5 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหากลศาสตร์ต่อเนื่อง 2 มิติ	217

ภาคผนวก ก

ก.1 เวกเตอร์และการดำเนินการเชิงเวกเตอร์	235
ก.2 เมทริกซ์และการดำเนินการเชิงเมทริกซ์	240

สัญลักษณ์

บรรณานุกรม

ครรชนี

บทที่ 1

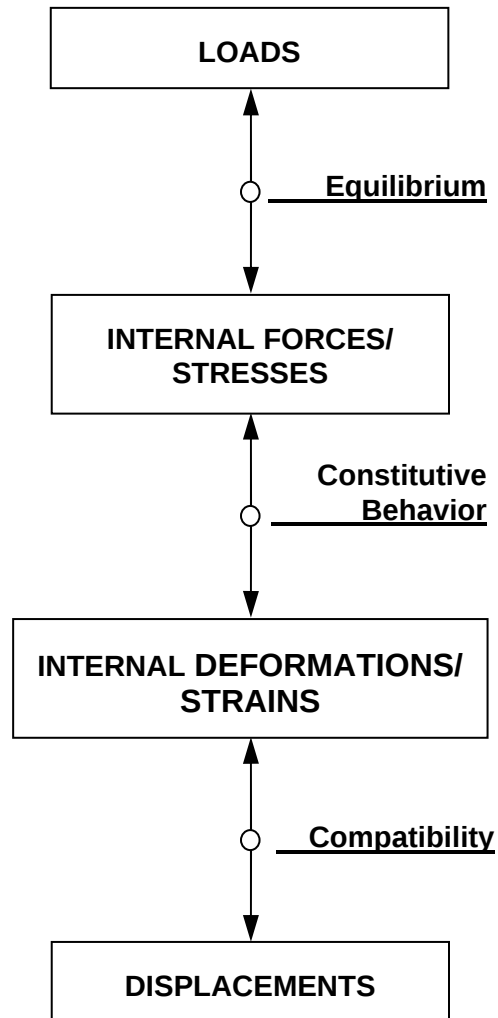
บทนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างนับเป็นพื้นฐานสำคัญในการประเมินพฤติกรรมของโครงสร้างภายใต้น้ำหนักบรรทุกในรูปแบบต่าง ๆ รวมทั้งเป็นขั้นตอนสำคัญของการออกแบบเพื่อให้โครงสร้างมีระดับความปลอดภัยในการใช้งานตามที่กำหนดและมีราคาประหยัด โดยทั่วไปการออกแบบอาศัยการพิจารณาทั้งค่ากำลังของวัสดุ ประกอบกับค่าสติเฟเนส (stiffness) ของชิ้นส่วน โครงสร้างเพื่อป้องกันค่าการโก่งตัว หรือการสั่นไหวที่สูงเกินไป ดังนั้น การออกแบบและการวิเคราะห์โครงสร้างจึงมีความเกี่ยวเนื่องกันเนื่องจากพฤติกรรมในการรับแรงกระทำของโครงสร้างขึ้นอยู่กับการจัดตำแหน่งชิ้นส่วน โครงสร้างรวมทั้งวัสดุที่เลือกใช้

เนื่องจากโครงสร้างโดยส่วนใหญ่ในปัจจุบันมีความซับซ้อนมากขึ้น ประกอบกับความก้าวหน้าด้านเทคโนโลยีสารสนเทศในการคำนวณ การวิเคราะห์โครงสร้างเชิงเมทริกซ์ (matrix structural analysis) ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้การคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยตรง จึงเป็นแนวทางที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์โครงสร้าง อย่างไรก็ตาม วิธีการดังกล่าวมีรากฐานมาจากกลศาสตร์เชิงแบบฉบับ (classical structural mechanics) ดังนั้น วิศวกรจึงควรทำความเข้าใจในหลักการพื้นฐานและการวิเคราะห์โครงสร้าง เชิงแบบฉบับ (classical structural analysis) เพื่อสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์กับวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างเชิงเมทริกซ์ เนื้อหาในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการพื้นฐานของการวิเคราะห์โครงสร้าง สำหรับความรู้เบื้องต้นในการคำนวณเชิงเมทริกซ์ พร้อมตัวอย่างการคำนวณโดยอาศัยโปรแกรม MATLAB (The MathWorks, Inc.) ได้แสดงไว้ในภาคผนวก

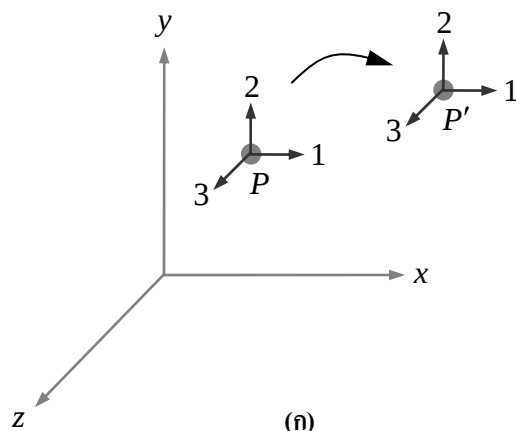
1.1 ระบบโครงสร้าง และแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ระบบโครงสร้าง

ในการวิเคราะห์โครงสร้างโดยทั่วไป วิศวกรต้องการคำนวณค่าการกระจัด (displacement) ขององค์ประกอบแต่ละส่วนของระบบโครงสร้างภายใต้แรงกระทำ (load) ที่กำหนด เพื่อสามารถทราบค่าการเสียรูปภายใน (internal deformations) ขององค์ประกอบนั้น รวมทั้งค่าแรงภายใน (internal forces) ที่เกิดขึ้น ซึ่งการวิเคราะห์ดังกล่าวจำเป็นต้องอาศัยหลักการสมดุล (equilibrium) สภาพเข้ากันได้ (compatibility) รวมทั้งพฤติกรรมหน่วยแรง-ความเครียด (stress-strain behavior) ของวัสดุซึ่งประกอบเป็นระบบโครงสร้างนั้น ดังแสดงในรูปที่ 1.1

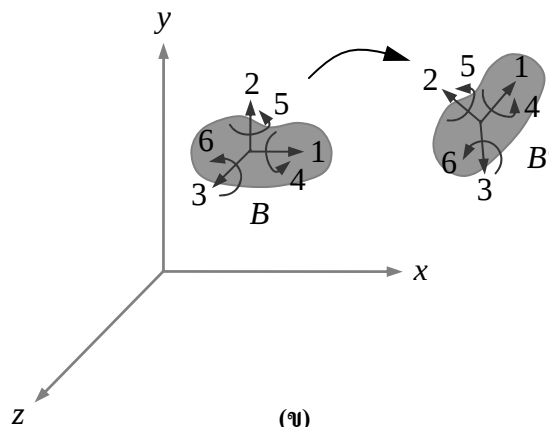


รูปที่ 1.1 ความสัมพันธ์พื้นฐานในการวิเคราะห์โครงสร้าง

เมื่อพิจารณาให้ระบบโครงสร้างจริงใด ๆ มีลักษณะเป็นวัตถุต่อเนื่อง จะเห็นว่าการคำนวณค่าการกระจัดที่ทุก ๆ ตำแหน่งของระบบโครงสร้างเป็นไปได้ยากเนื่องจากจำนวนของค่าการกระจัดนั้นเป็นอนันต์ (infinity) ด้วยเหตุนี้จึงมีความจำเป็นในการประมาณระบบโครงสร้างจริงดังกล่าวด้วยแบบจำลองโครงสร้าง ซึ่งประกอบด้วยจำนวนค่าการกระจัดที่จำกัด โดยค่าการกระจัดดังกล่าวยังคงสามารถอธิบายการกระจัดที่แต่ละตำแหน่งของระบบโครงสร้างได้อย่างแม่นยำ ค่าการกระจัดซึ่งเป็นอิสระต่อกันที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรม



(ก)

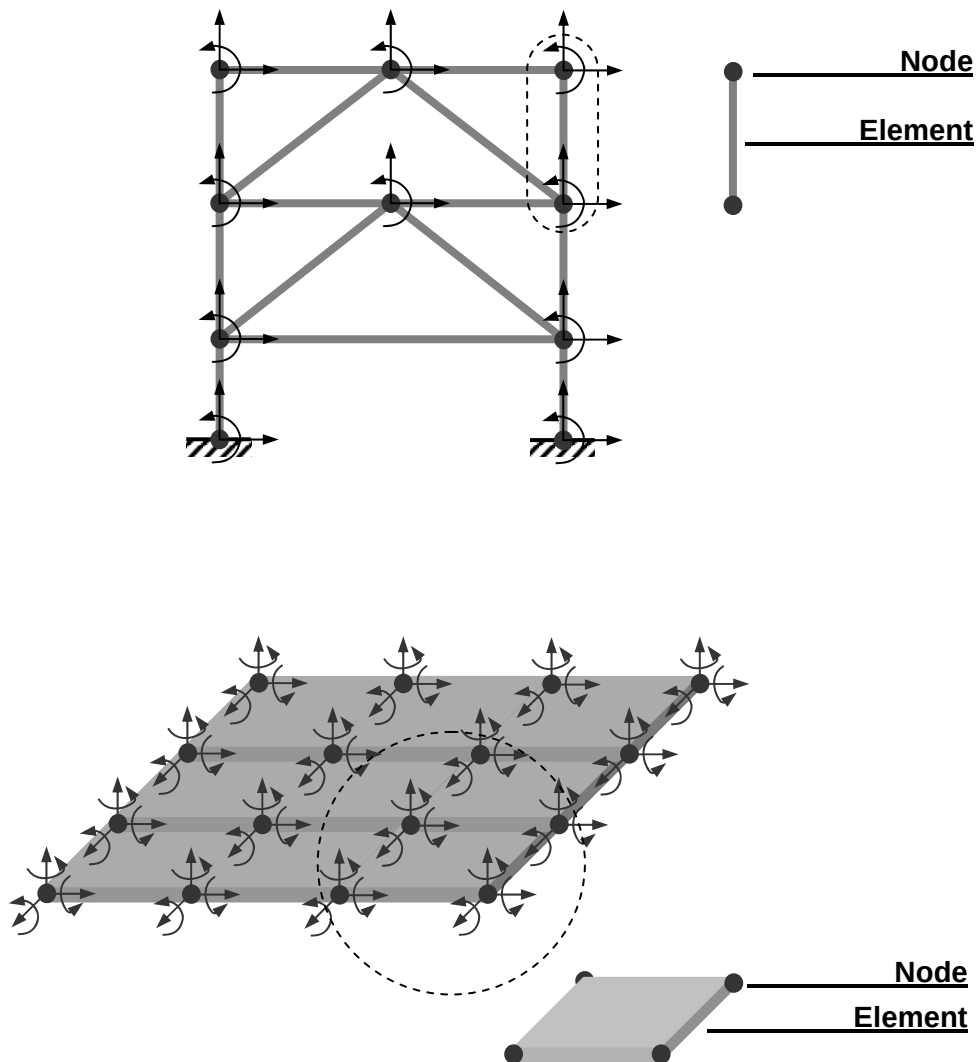


(ข)

รูปที่ 1.2 ระดับขั้นความเสรีใน 3 มิติ (ก) อนุภาค และ (ข) วัตถุคงรูป

เสถียรภาพหรือการจัดของระบบโครงสร้างได้อย่างสมบูรณ์นี้เรียกว่าระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ของระบบโครงสร้าง ยกตัวอย่างเช่น การจัดของอนุภาค (particle) ใน 3 มิติสามารถอธิบายด้วยการเลื่อนขนาน (translation) ในแต่ละมิติ กล่าวคือจำนวนระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 3 ในขณะที่การจัดของวัตถุคงรูป (rigid body) ใน 3 มิติสามารถอธิบายด้วยการเลื่อนขนานและการหมุน (rotation) ในแต่ละมิติ กล่าวคือจำนวนระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 6 เป็นต้น ดังแสดงในรูปที่ 1.2

นอกจากนี้ ตำแหน่งของโครงสร้างที่ใช้กำหนดค่าระดับขั้นความเสรีเรียกว่าจุดต่อ (node) และส่วนของโครงสร้างซึ่งเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อนั้นเรียกว่าชิ้นส่วนโครงสร้าง (element) ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 ตัวอย่างจุดต่อและชิ้นส่วนโครงสร้าง

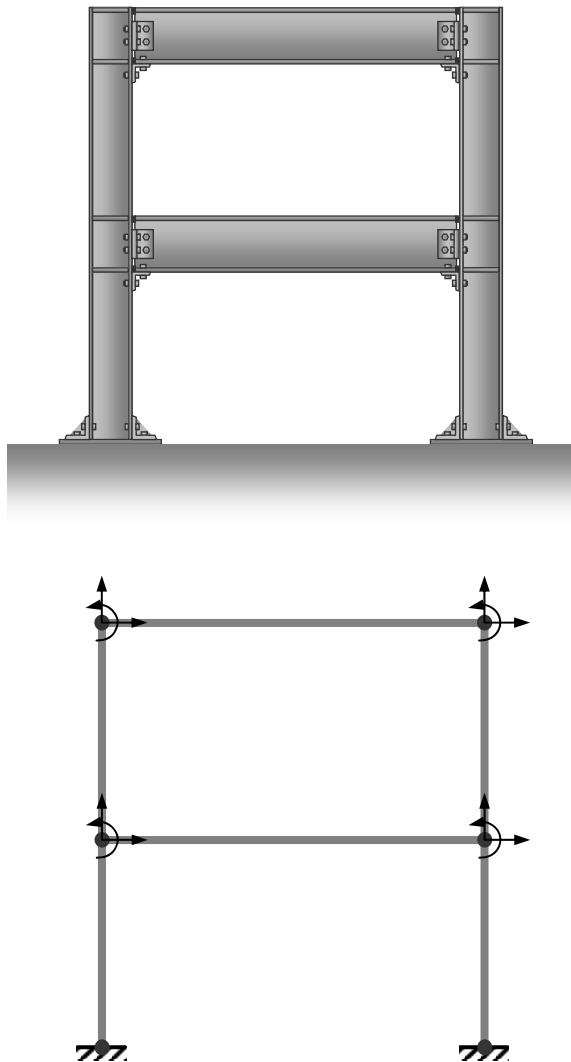
1.2 การสร้างแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ระบบโครงสร้าง

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในเบื้องต้น การวิเคราะห์ระบบโครงสร้างจำเป็นต้องอาศัยแบบจำลองโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนเชื่อมต่อกันบริเวณจุดต่อและระดับชั้นความเสรี ซึ่งแสดงค่าการกระจัด ณ บริเวณจุดต่อแต่ละจุดของระบบโครงสร้าง โดยที่ระดับชั้นความเสรีดังกล่าวสามารถอธิบายการกระจัดที่แต่ละตำแหน่งของระบบโครงสร้างได้อย่างแม่นยำ

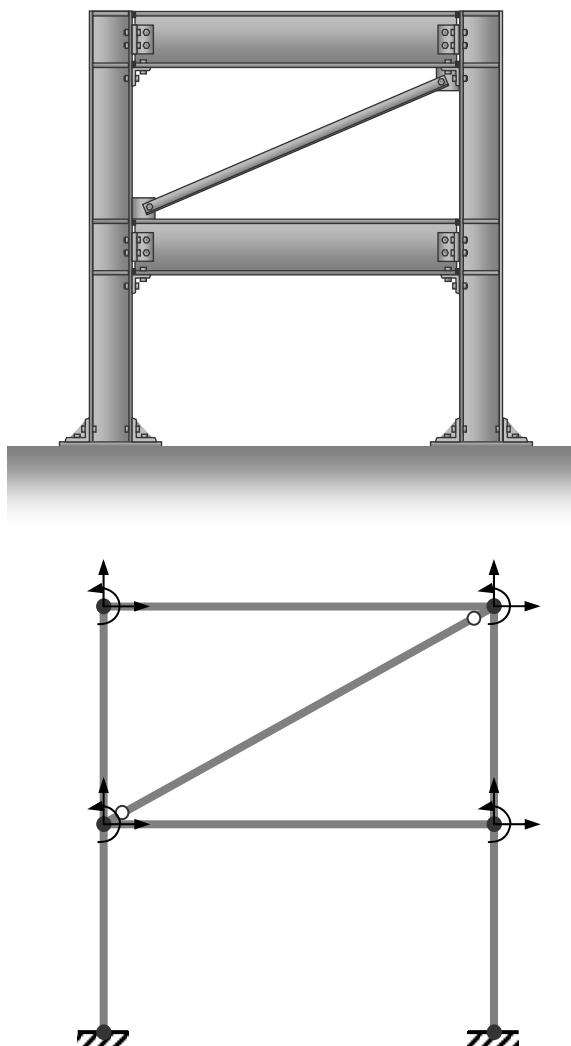
โดยทั่วไปการสร้างแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ระบบโครงสร้างอาศัยการพิจารณาพฤติกรรมการเสียรูปหรือค่าการกระจัดขององค์ประกอบต่าง ๆ ของระบบโครงสร้าง ได้แก่ ชิ้นส่วนโครงสร้าง ลักษณะการยึดโยงชิ้นส่วนโครงสร้าง และ ฐานรองรับ ดังแสดงตัวอย่างสำหรับระบบโครงสร้างหลักในรูปที่ 1.4 ซึ่งสามารถจำลองพฤติกรรมการเสียรูปของชิ้นส่วนโครงสร้างด้วยชิ้นส่วนรับแรงคัต (คาน) และชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกนและแรงคัตร่วมกัน (เสา) ยึดโยงกันบริเวณจุดต่อแบบยึดแน่น (fixed connection) และฐานรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) ตามลำดับ โดยมีระดับชั้นความเสรีดังแสดงในรูป

สำหรับระบบโครงสร้างหลักในรูปที่ 1.5 สามารถจำลองพฤติกรรมด้วยชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกนซึ่งถูกยึดโยงบริเวณจุดต่อแบบยึดหมุน (pin connection) เพิ่มเติมจากแบบจำลองระบบโครงสร้างในรูปที่ 1.4

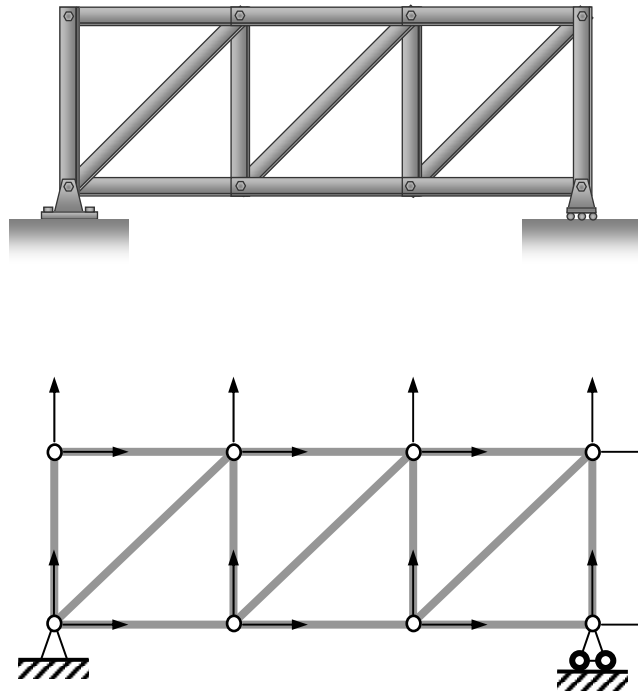
นอกจากนี้เมื่อพิจารณาระบบโครงสร้างหลักในรูปที่ 1.6 จะเห็นว่าสามารถจำลองพฤติกรรมการเสียรูปด้วยชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกนซึ่งถูกยึดโยงบริเวณจุดต่อแบบยึดหมุน (pin connection) และฐานรองรับแบบยึดหมุน (pin support) และแบบลื่นหมุน (roller) ตามลำดับ



รูปที่ 1.4 แบบจำลองโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยจุดต่อแบบยึดแน่น



รูปที่ 1.5 แบบจำลองโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนค้ำยันและจุดต่อแบบยึดหมุน



รูปที่ 1.6 แบบจำลองโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยจุดต่อแบบยึดหมุน

บทที่ 2

การวิเคราะห์ชิ้นส่วนโครงข้อหมุน

โครงข้อหมุนหรือโครงถัก (truss) เป็นโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนที่มีลักษณะเป็นแท่งตรง เชื่อมโยงกันที่ปลายของแต่ละชิ้นส่วน โดยมีจุดต่อซึ่งเป็นจุดรวมที่แนวแกนของแต่ละชิ้นส่วนมาบรรจบกันเป็นแบบจุดยึดหมุน (pin) ซึ่งสามารถหมุนได้โดยอิสระ และในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนจะสมมติให้แรงภายนอกกระทำบริเวณจุดต่อเท่านั้น ซึ่งส่งผลให้แรงภายในชิ้นส่วนโครงข้อหมุนเป็นเพียงแรงในแนวแกนโดยอาจเป็นแรงดึงหรือแรงอัด การวิเคราะห์โครงข้อหมุนนับเป็นพื้นฐานสำคัญในการสร้างความเข้าใจสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทอื่นต่อไป

เนื้อหาในบทนี้ เริ่มจากการวิเคราะห์ชิ้นส่วนโครงข้อหมุนใน 1 มิติ และขยายผลการวิเคราะห์สู่โครงข้อหมุนใน 2 มิติ และ 3 มิติ โดยอาศัยหลักการแปลงพิกัดบนพื้นฐานการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีสตีเฟนส

2.1 ชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติ

ชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติ ได้แก่ ชิ้นส่วนโครงสร้างแบบโครงข้อหมุน (truss) โดยเวกเตอร์แรงภายในของชิ้นส่วนมีส่วนประกอบของแรงในแนวแกนเซนทรอยด์ (centroid) เท่านั้น รูปที่ 2.1 แสดงชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติ ในแนวแกน x ซึ่งมีขนาดพื้นที่หน้าตัด A ความยาว L และมีระดับชั้นความเสรี 1 และ 2 ที่ใช้แสดงการกระจัดของจุดต่อ i และ j ในแนวแกน x บริเวณปลายของชิ้นส่วนทั้ง 2 ด้าน

จากรูปที่ 2.1 ในกรณีที่ชิ้นส่วนโครงสร้างอยู่ในสถานะสมดุล และค่าหน่วยแรง (stress) ที่เกิดขึ้นมีค่าคงที่ σ_{xx} ตลอดพื้นที่หน้าตัด ค่าแรงภายในของชิ้นส่วน p_x สามารถคำนวณได้จากสมการสมดุลดังนี้

$$p_x = \sigma_{xx} A \quad (2.1)$$

หากสมมติให้ค่าการกระจัดของชิ้นส่วน ณ ตำแหน่ง x ใด ๆ ในชิ้นส่วน สามารถเขียนในรูป ฟังก์ชันต่อเนื่อง $u(x)$ โดยมีเงื่อนไขขอบเขต $u(0) = \hat{u}_1$ และ $u(L) = \hat{u}_2$ รวมทั้งพิจารณาชิ้นส่วนโครงสร้างในช่วงความยาว Δx ซึ่งมีการกระจัดในแนวแกน x จากตำแหน่ง a และ b ไปยังตำแหน่ง a' และ b' ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.1 จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของความเครียด-การกระจัด (strain-displacement) ได้ดังนี้

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a'b' - ab}{ab} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\Delta x + (\partial u / \partial x) \Delta x] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

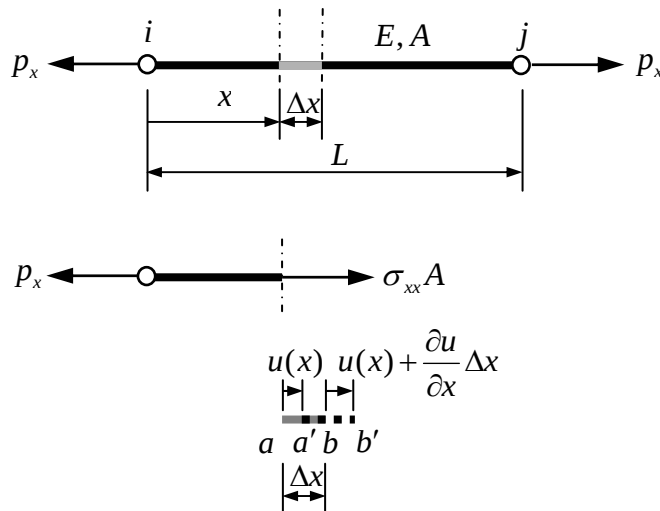
สำหรับวัสดุเนื้อเดียวกัน (homogeneous) ซึ่งมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic) และยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) สามารถนำสมการที่ (2.1) และ (2.2) มาเขียนความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดตามกฎของฮุก (Hooke's law) กล่าวคือ $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ โดยที่ E คือ ค่ามอดุลัสความยืดหยุ่น ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในและการกระจัดดังนี้

$$\frac{p_x}{A} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3)$$

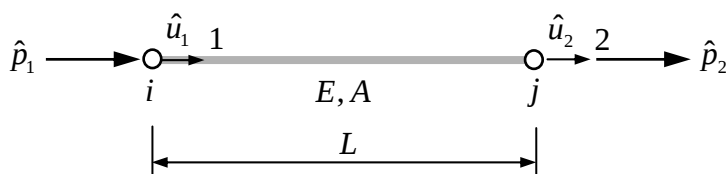
แต่เนื่องจาก u เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ดังนั้น $\partial u / \partial x = du / dx$ และสมการที่ (2.3) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$p_x dx = AE du \quad (2.4)$$

เมื่อทำการหาปริพันธ์ (integration) ของสมการที่ (2.4) ในช่วง $x = [0, L]$ โดยพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต $u(0) = \hat{u}_1$ และ $u(L) = \hat{u}_2$ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในและการกระจัด ณ ตำแหน่งระดับชั้นความเสถียรบริเวณจุดต่อดังสมการ



รูปที่ 2.1 ชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติ



รูปที่ 2.2 ชิ้นส่วนโครงข้อหมุนแบบ 2 ระดับขั้นความเสรี

$$p_x = \frac{AE}{L}(\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \quad (2.5)$$

โดยที่ $p_x > 0$ หมายถึงชิ้นส่วนโครงสร้างรับแรงดึง และ $p_x < 0$ หมายถึงชิ้นส่วนโครงสร้างรับแรงอัด นอกจากนั้น จะสังเกตได้ว่าสมการที่ (2.5) ได้มาจากการประยุกต์ใช้ (1) สมการสมดุล (2) สภาพเข้ากันได้ (compatibility) ของฟังก์ชันการกระจัด u และ (3) ความสัมพันธ์ของหน่วยแรง-ความเครียด (stress-strain) ตามลำดับ

โดยทั่วไปทิศทางของแรงภายในของชิ้นส่วนโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนจะถูกกำหนดให้สอดคล้องกับทิศทางของระดับขั้นความเสรี 1 และ 2 ที่ใช้แสดงการกระจัดของจุดต่อ i และ j ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งในกรณีนี้กำหนดค่าแรงที่กระทำบริเวณจุดต่อสามารถแทนด้วย $\hat{p}_1$ และ $\hat{p}_2$ โดยที่ $\hat{p}_1 = -p_x$ และ $\hat{p}_2 = p_x$ ตามลำดับ ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในและการกระจัด ณ ตำแหน่งระดับขั้นความเสรีบริเวณจุดต่อของชิ้นส่วนโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนในสมการที่ (2.5) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\hat{p}_2 = \frac{AE}{L}(\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \quad (2.6)$$

$$\hat{p}_1 = \frac{AE}{L}(-\hat{u}_2 + \hat{u}_1) \quad (2.7)$$

สมการที่ (2.6) และ (2.7) สามารถเขียนในรูปแบบเมทริกซ์

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

หรือแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\hat{\mathbf{p}}_l = \mathbf{k}_l \hat{\mathbf{u}}_l \quad (2.9)$$

โดยที่กำหนดให้ดัชนีล่าง l ใช้ระบุค่าสำหรับแต่ละชิ้นส่วนโครงสร้างในพิกัดเฉพาะที่ (local coordinates) ของชิ้นส่วน; $\hat{\mathbf{p}}_l$ และ $\hat{\mathbf{u}}_l$ แสดงค่าแรงภายในและการกระจัด ณ ระดับชั้นความเสรีบริเวณจุดต่อของชิ้นส่วนตามลำดับ; และ $\mathbf{k}_l$ แสดงเมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนในพิกัดเฉพาะที่

จากการพิจารณาเมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนซึ่งมีมิติ 2×2 ในสมการที่ (2.9) พบว่าค่าของสมาชิก $k_{r,s}^l$ ในเมทริกซ์สติฟเนส $\mathbf{k}_l$ ณ ตำแหน่งแถวที่ $r=1,2$ และสัณฐานที่ $s=1,2$ แสดงค่าแรงภายในของชิ้นส่วนที่ระดับชั้นความเสรี r เนื่องจากการกระจัดหนึ่งหน่วยที่ระดับชั้นความเสรี s ($\hat{u}_s = 1$)

ในกรณีที่ชิ้นส่วนโครงสร้างมีค่าความเครียดเริ่มต้น (initial strain) จากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ΔT หรือจากชิ้นส่วนมีค่าความยาวผิดขนาด (fabrication error) ΔL จะส่งผลให้เกิดค่าแรงภายในเพิ่มเติม ณ ตำแหน่งระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วนดังแสดงในรูปที่ 2.3 ซึ่งสามารถคำนวณค่าได้ตามสมการ

$$\hat{p}_2 = \frac{AE}{L}(\hat{u}_2 - \hat{u}_1) - AE\alpha\Delta T - \frac{AE}{L}\Delta L \quad (2.10)$$

$$\hat{p}_1 = \frac{AE}{L}(-\hat{u}_2 + \hat{u}_1) + AE\alpha\Delta T + \frac{AE}{L}\Delta L \quad (2.11)$$

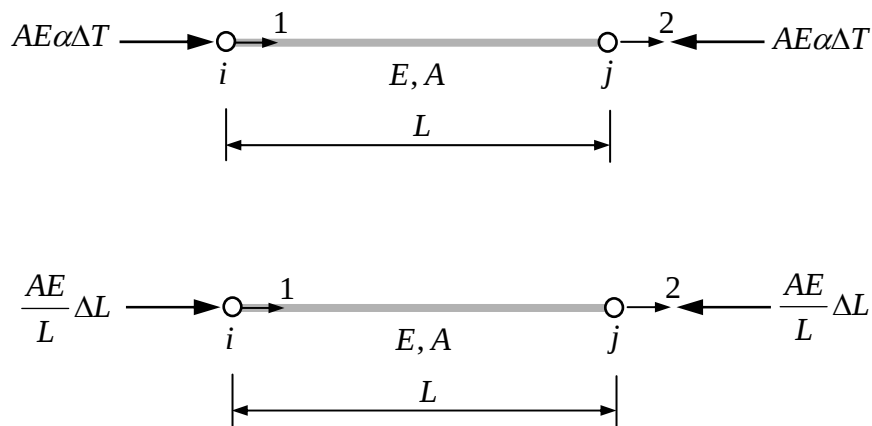
โดยที่ α แทนค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้นเนื่องจากอุณหภูมิ (coefficient of linear thermal expansion) สมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปแบบเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} + AE\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \frac{AE\Delta L}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

หรือแทนด้วยสัญลักษณ์

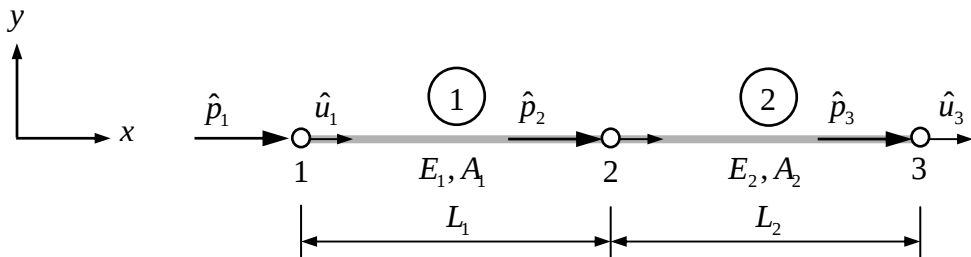
$$\hat{\mathbf{p}}_l = \mathbf{k}_l \hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{p}}_l^o \quad (2.13)$$

โดยที่ $\hat{\mathbf{p}}_l^o$ คือ ค่าแรงภายในเริ่มต้น (initial force) ในพิกัดเฉพาะที่ (local coordinates) ของชิ้นส่วน

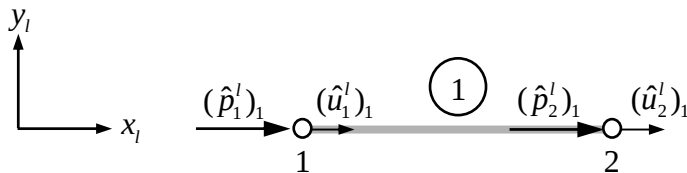


รูปที่ 2.3 แรงภายในของชิ้นส่วนโครงข้อหมุนที่มีค่าความเครียดเริ่มต้น

ตัวอย่างที่ 2.1 คำนวณค่าการกระจัดบริเวณจุดต่อ 1 – 3 ของระบบโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติ (สามารถเคลื่อนที่เฉพาะในแนวแกน x) จำนวน 2 ชิ้นส่วน ดังรูป โดยกำหนดค่าแรงกระทำบริเวณจุดต่อ 1 – 3 เป็น $\hat{p}_1 = 1,000$ kN, $\hat{p}_2 = 1,000$ kN และ $\hat{p}_3 = -2,000$ kN ตามลำดับ และกำหนดให้ค่าสตีเฟนสของชิ้นส่วนที่ 1 และ 2 เป็น $k_1 = A_1 E_1 / L_1 = 20,000$ kN/m และ $k_2 = A_2 E_2 / L_2 = 10,000$ kN/m ตามลำดับ



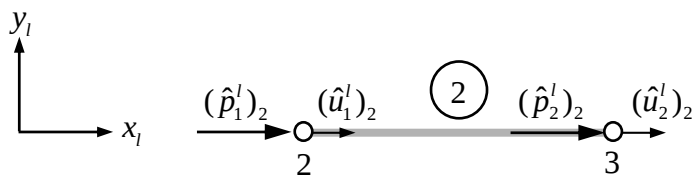
ชิ้นส่วนที่ 1



$$\mathbf{\hat{p}}_l^1 = \mathbf{k}_l^1 \mathbf{\hat{u}}_l^1$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_1' \\ \hat{p}_2' \end{Bmatrix}_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1' \\ \hat{u}_2' \end{Bmatrix}_1$$

ชั้นส่วนที่ 2



$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_l^2 &= \mathbf{k}_l^2 \hat{\mathbf{u}}_l^2 \\ \begin{Bmatrix} \hat{p}'_1 \\ \hat{p}'_2 \end{Bmatrix}_2 &= \frac{A_2 E_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}'_1 \\ \hat{u}'_2 \end{Bmatrix}_2\end{aligned}$$

สมการสมดุลที่จุดต่อ

สมการสมดุลของแรงภายนอกและแรงภายในชั้นส่วน

$$\text{จุดต่อที่ 1: } \hat{p}_1 = (\hat{p}'_1)_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} (\hat{u}'_1)_1 - \frac{A_1 E_1}{L_1} (\hat{u}'_2)_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} \hat{u}_1 - \frac{A_1 E_1}{L_1} \hat{u}_2$$

$$\begin{aligned}\text{จุดต่อที่ 2: } \hat{p}_1 &= (\hat{p}'_2)_1 + (\hat{p}'_1)_2 = -\frac{A_1 E_1}{L_1} (\hat{u}'_1)_1 + \frac{A_1 E_1}{L_1} (\hat{u}'_2)_1 + \frac{A_2 E_2}{L_2} (\hat{u}'_1)_2 - \frac{A_2 E_2}{L_2} (\hat{u}'_2)_2 \\ &= -\frac{A_1 E_1}{L_1} \hat{u}_1 + \left(\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2} \right) \hat{u}_2 - \frac{A_2 E_2}{L_2} \hat{u}_3\end{aligned}$$

$$\text{จุดต่อที่ 3: } \hat{p}_3 = (\hat{p}'_2)_2 = -\frac{A_2 E_2}{L_2} (\hat{u}'_1)_2 + \frac{A_2 E_2}{L_2} (\hat{u}'_2)_2 = -\frac{A_2 E_2}{L_2} \hat{u}_2 + \frac{A_2 E_2}{L_2} \hat{u}_3$$

สมการสมดุลของระบบโครงสร้าง

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 &= \frac{A_1 E_1}{L_1} \hat{u}_1 - \frac{A_1 E_1}{L_1} \hat{u}_2 - \frac{A_1 E_1}{L_1} \hat{u}_1 + \left(\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2} \right) \hat{u}_2 \\ &\quad - \frac{A_2 E_2}{L_2} \hat{u}_3 - \frac{A_2 E_2}{L_2} \hat{u}_2 + \frac{A_2 E_2}{L_2} \hat{u}_3 \\ &= 0 \quad \therefore \text{ระบบโครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุล}\end{aligned}$$

จัดระบบสมการสมดุลที่จุดต่อที่ 1 – 3 ในรูปเมทริกซ์

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E_1}{L_1} & -\frac{A_1 E_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{A_1 E_1}{L_1} & \left(\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2} \right) & -\frac{A_2 E_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{A_2 E_2}{L_2} & \frac{A_2 E_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}$$

แทนค่าลงในสมการ

$$\begin{Bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ -2,000 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,000 & -20,000 & 0 \\ -20,000 & 30,000 & -10,000 \\ 0 & -10,000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}$$

แก้สมการข้างต้นจะได้ค่าการกระจัดบริเวณจุดต่อ

$$\hat{u}_1 = 0.25 \text{ m}$$

$$\hat{u}_2 = 0.20 \text{ m}$$

$$\hat{u}_3 = 0.00 \text{ m}$$

ตัวอย่างที่ 2.1 การวิเคราะห์ตัวอย่างที่ 2.1 โดยโปรแกรม MATLAB

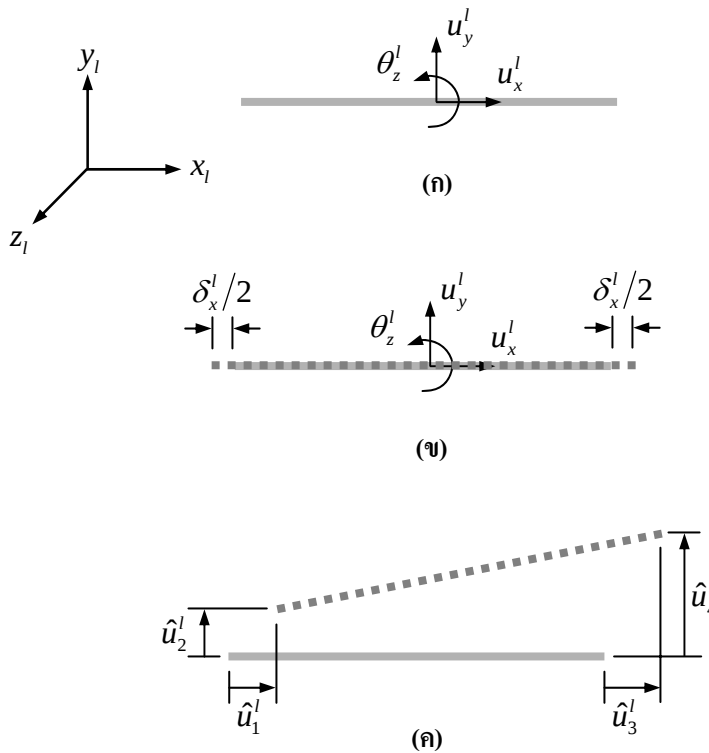
```
%      Example 2.1 using MATLAB
clear
k1 = 20000;
k2 = 10000;
us = zeros(3,1);      % structural displacement vector
ks = zeros(3,3);      % structural stiffness matrix
ps = zeros(3,1);      % structural load vector
p1 = 1000;
p2 = 1000;
p3 = -2000;
ps = [p1 p2 p3]';
ks = [k1 -k1 0;        % structural stiffness matrix
      -k1 (k1+k2) -k2;
      0   -k2   k2];
us = ks\ps;            % solve for displacements
us
```

2.2 การแปลงพิกัด

การกระจัดของชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติในระนาบ (2 มิติ) โดยทั่วไปสามารถอธิบายในรูปของการกระจัด ณ ตำแหน่งระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วนโครงสร้างในพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนนั้นได้ดังแสดงในรูปที่ 2.4

รูปที่ 2.4 (ก) แสดงระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วนโครงสร้างแบบท่อนแข็ง (rigid bar) 3 ค่า ได้แก่ u_x^l , u_y^l และ θ_z^l ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ลักษณะคงรูป (rigid body motion) ของชิ้นส่วนในแนวแกน x_l แนวแกน y_l และรอบแกน z_l ในพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนตามลำดับ

รูปที่ 2.4 (ข) แสดงระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วนโครงสร้างแบบโครงข้อหมุน 4 ค่า ได้แก่ u_x^l , u_y^l , θ_z^l



รูปที่ 2.4 ระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วนโครงสร้าง 1 มิติแบบต่าง ๆ ในพิกัดเฉพาะที่

และ δ_x^l ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ลักษณะคงรูป (rigid body motion) ของชิ้นส่วนในแนวแกน x_l แนวแกน y_l รอบแกน z_l และการเปลี่ยนแปลงความยาวในแนวแกน x_l ในพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนตามลำดับ

รูปที่ 2.4 (ค) แสดงระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วนโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนบริเวณจุดต่อ 4 ค่า ได้แก่ $\hat{u}_1^l$ $\hat{u}_2^l$ $\hat{u}_3^l$ และ $\hat{u}_4^l$ ซึ่งแสดงการกระจัดของชิ้นส่วนบริเวณจุดต่อในแนวแกน x_l แนวแกน y_l ในพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนตามลำดับ

เมื่อพิจารณาตัวอย่างที่ 2.1 พบว่าการวิเคราะห์สมการสมดุลของแรงของระบบโครงสร้างอาศัยการพิจารณาสมดุลของแรงภายนอกและแรงภายในบริเวณจุดต่อเพื่อให้สอดคล้องกับการคำนวณเมทริกซ์สติเฟเนสของชิ้นส่วนโครงสร้าง ดังนั้น ระดับชั้นความเสรีของชิ้นส่วนโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนบริเวณจุดต่อในรูปที่ 2.4 (ค) จึงมีความเหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้าง ทั้งนี้ระดับชั้นความเสรีในรูปที่ 2.4 (ข) และ 2.4 (ค) สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\delta_x^l = \hat{u}_3^l - \hat{u}_1^l \quad (2.14)$$

$$u_x^l = \frac{1}{2}(\hat{u}_1^l + \hat{u}_3^l) \quad (2.15)$$

$$u_y^l = \frac{1}{2}(\hat{u}_2^l + \hat{u}_4^l) \quad (2.16)$$

$$\theta_z^l = \frac{1}{L}(\hat{u}_4^l - \hat{u}_2^l) \quad (2.17)$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \delta_x^l \\ u_x^l \\ u_y^l \\ \theta_z^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/L & 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^l \\ \hat{u}_2^l \\ \hat{u}_3^l \\ \hat{u}_4^l \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาระบบโครงสร้างแบบโครงข้อหมุน 2 มิติ โดยทั่วไปดังแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนโครงสร้างหลายชิ้นเชื่อมต่อกัน จะเห็นได้ว่าชิ้นส่วนโครงสร้างแต่ละชิ้นมีพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วน x_l, y_l, z_l แตกต่างกันไป ในการวิเคราะห์ระบบโครงสร้างจึงมีความจำเป็นในการสร้างพิกัดทั่วไป (global