

วิยุตคณิต

DISCRETE MATHEMATICS

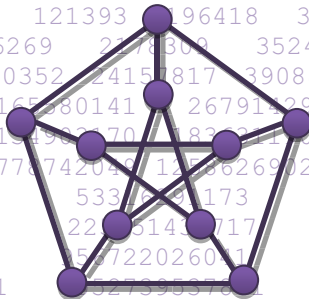
สมชาย ประสิทธิ์จตุระกุล

โครงการสนับสนุนการพิมพ์และเผยแพร่ตำรา

หนังสือวิชาการของคณาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610
987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657
46368 75025 121393 196418 317811 514229
832040 1346269 2178309 3524578 5702887
9227465 14930352 24150817 39088169 63245986
102334155 16580141 267914296 433494437
701408733 11596870 18321103 2971215073
4807526976 7778742049 12586269025 20365011074
32951280099 5337521173 86267571272
139583862445 22135140717 365435296162
591286729879 95722026011 1548008755920
2504730781961 405273953771 6557470319842
10610209857723 17167680177565 27777890035288
44945570212853 72723460248141 117669030460994



วิยุตคณิต

DISCRETE MATHEMATICS

(E-BOOK EDITION)

สมชาย ประสิทธิ์จตุระกุล

วิยตคณิต / สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล

1. คณิตศาสตร์
2. วิทยาการคอมพิวเตอร์

พิมพ์ครั้งที่ 1 (มิถุนายน 2544)

พิมพ์ครั้งที่ 2 (สิงหาคม 2546)

พิมพ์ครั้งที่ 3 (เมษายน 2548)

พิมพ์ครั้งที่ 4 (2555)

e-book (กรกฎาคม 2555)

สงวนลิขสิทธิ์ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537/2540

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้นต้องได้รับ
อนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากเจ้าของลิขสิทธิ์

<http://www.cp.eng.chula.ac.th/~somchai/books>

คำนำ

พิมพ์ครั้งที่ ๔

คำว่า “discrete” มักมีผู้ใช้ทับศัพท์ว่า “ดิสครีต” แต่ในปัจจุบันได้รับการบัญญัติศัพท์ไว้หลายคำ ได้แก่ คำว่า “แยกเป็นส่วนชัด” ในสาขาแพทยศาสตร์ คำว่า “เต็มหน่วย” ในสาขาประชากรศาสตร์ คำว่า “ไม่ต่อเนื่อง” ในสาขาคอมพิวเตอร์ และคำว่า “วิยุต” ในสาขาคณิตศาสตร์ ศัพท์บัญญัติมีการเปลี่ยนแปลงตามความเหมาะสม ในปี พ.ศ. ๒๕๓๖ ผมและ รศ. ดร.วิทยา วังระวิทยากุลเขียนหนังสือ “discrete mathematics” และได้เลือกทับศัพท์ว่า “คณิตศาสตร์ดิสครีต” ต่อมาในปี พ.ศ. ๒๕๔๔ (ก่อนหน้าที่จะมีคำว่า “วิยุต”) ได้มีการบัญญัติศัพท์ว่า “กิบทน” เป็นช่วงเวลาสั้น ๆ ผมจึงตั้งชื่อหนังสือที่เขียนใหม่ว่า “กิบทนคณิตศาสตร์” (ซึ่งมีผู้ถามผมเสมอว่า แปลว่าอะไร 😊) หลังจากได้พิมพ์จำหน่ายหมดไปสามครั้ง หนังสือขาดตลาดไปเป็นเวลาหลายปี ผมเพิ่งมีเวลามาแก้ไขข้อผิดพลาดและปรับปรุงคำอธิบายตลอดทั้งเล่มในปี พ.ศ. ๒๕๕๔ จึงถือโอกาสเปลี่ยนชื่อหนังสือ (อีกครั้ง) เป็น “วิยุตคณิต”

สำหรับการพิมพ์หนังสือเล่มปรับปรุงใหม่นี้ ผมต้องขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่สนับสนุนการจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ภายใต้ “โครงการสนับสนุนการพิมพ์และเผยแพร่ตำรา หนังสือวิชาการของคณาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์”

สมชาย ประสิทธิ์จิตรระกุล
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

๑ มกราคม ๒๕๕๕

คำนำ

ภินทคณิตศาสตร์ (Discrete Mathematics) บางทีก็เรียกทับศัพท์ว่าคณิตศาสตร์ดิสครีต หรือคณิตศาสตร์เต็มหน่วย เป็นวิชาพื้นฐานสำหรับหลักสูตรวิทยาการคอมพิวเตอร์ เนื้อหาที่ควรครอบคลุมตามคำแนะนำของสมาคม ACM/IEEE (ฉบับปี ค.ศ. 1991 และ ค.ศ.2001) นั้น มีเรื่องเซต ฟังก์ชัน ตรรกะ พีชคณิตบูลีน ทฤษฎีกราฟ เมทริกซ์ กลวิธีการพิสูจน์ คณิตศาสตร์เชิงการจัด ความน่าจะเป็น และจำนวนเต็ม ภินทคณิตศาสตร์บรรจุเนื้อหาที่จำเป็นเพื่อปูพื้นความรู้ให้นักเรียนสามารถสร้างตัวแบบ วิเคราะห์ แก้ไขปัญหา และพิสูจน์ผลที่ได้ โดยมักเป็นวิชาบังคับในภาคการศึกษาที่ 2 หรือ 3

คณิตศาสตร์มักถูกมองว่าเป็นวิชาที่น่าเบื่อ ต้องกล้ำกลืนฝืนทนเรียนไปเพราะเป็นวิชาบังคับ ผมยังรำลึกเวลาที่ตัวเองเป็นนักเรียนที่เข้าเรียนคณิตศาสตร์ด้วยหน้าที่ที่เป็น "นักเรียน" เท่านั้น โดยไม่รู้ว่า จะนำไปใช้ทำอะไรได้เพราะรู้สึกว่าจะไม่ค่อยเกี่ยวอะไรกับการเขียนโปรแกรม หรือการต่อวงจรไฟฟ้าที่ตัวเองสนใจ แต่เมื่อได้สัมผัสกับการแก้ไขปัญหา มากขึ้นๆ ก็มาถามตัวเองว่า โปรแกรมที่ตัวเองเขียนขึ้น "ดี" แคไหน และที่สำคัญ "ถูกต้อง" หรือไม่ ดีแคไหนก็ต้องอาศัยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่แทนประเด็นความดีที่ต้องการประเมิน ซึ่งความดีที่ว่าอาจเป็นฟังก์ชันของเวลา หน่วยความจำที่ใช้ เหล่านี้เป็นต้น ถูกต้องหรือไม่ ก็ต้องถามว่า ขั้นตอนวิธีแก้ไขปัญหานั้นอยู่เบื้องหลังการทำงานของโปรแกรมนั้น ได้รับการพิสูจน์แล้วหรือยัง คงจะสะดวกหน่อยถ้ามีทฤษฎีบทรองรับอยู่แล้วเนื่องจากเราเลือกตัวแบบของปัญหาที่เหมาะสม หรือถ้าเป็นกรณีใหม่ก็ต้องพิสูจน์เชิงคณิตศาสตร์กันให้ต้องแท้ และความรู้ที่ได้ระหว่างการวิเคราะห์และพิสูจน์ที่ได้ทำมานั้น โดยทั่วไปจะย้อนกลับมาให้ผู้ออกแบบปรับปรุงวิธีแก้ไขปัญหา เพราะทราบถึงจุดด้อยหรือข้อขัดข้องของระบบ

มีนักเรียนถามผมอยู่เรื่อย ๆ ว่า ทำไมไม่ทำเฉลยแบบฝึกหัดให้อ่านกัน จะได้ไม่ต้องมาถามว่า ที่ทำแบบฝึกหัดไปนั้นถูกหรือผิด ดูเฉลยเลยก็รู้ ผมไม่ทำเฉลยก็เพราะว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ถ้าเรียนให้ได้ผลต้อง คิด+เขียน ไปเรื่อย ๆ นักเรียนต้องตระหนักว่าปัญหาทั่วไปคงไม่สามารถหาผลเฉลยด้วยเวลาอันสั้น และใช้วิธีคิดในใจเท่านั้น การแก้ปัญหาส่วนน้อยก็มีสูตรสำเร็จ ส่วนใหญ่ไม่มี ถึงแม้มีสูตรสำเร็จก็ต้องเข้าใจข้อจำกัดและที่มาของสูตร การคิดสักครูแล้วสรุปว่า ทำไม่ได้ จากนั้นไปดูเฉลย มักเกิดความรู้สึกว่า “ไม่เห็นมีอะไรเลย แค่นี้เอง” กระบวนการคิด การเข้าใจที่มาของการแก้ไขปัญหาก็จะไม่เกิดหลายคนบอกว่า ทำไมต้องมานั่งทรมานแบบนี้ด้วย สิ่งที่ผมจะบอกได้นอกเหนือจากความสำคัญของคณิตศาสตร์ในย่อหน้าที่แล้วก็คือ คุณเลือกมาเรียนสายนี้เอง เคยได้อ่านมาว่า (แต่จำไม่ได้ว่าที่ไหน) จะเป็นวิศวกรที่เก่งก็ต้องรู้แคลคูลัส จะเป็นนักคอมพิวเตอร์ที่เจ๋งก็ต้องรู้ทฤษฎีคณิตศาสตร์ และถ้าจะเป็นวิศวกรคอมพิวเตอร์ที่มีฝีมือก็ต้องรู้..... (เพิ่มเติมคำในช่องว่าง อันนี้ถือว่าเป็นโจทย์ข้อแรก)

จากประสบการณ์การสอนวิชานี้เกือบสิบปี ผมพบว่า มีปัญหาสามประการในการเรียนการสอนวิชานี้ ประการแรกคือเรื่องเนื้อหาของวิชา หากเราจะครอบคลุมเนื้อหาทั้งหมดตามที่ ACM/IEEE เสนอ จะเห็นได้ว่า คงไม่พอสำหรับหนึ่งภาคการศึกษา บางเนื้อหาอาจเคยศึกษามาแล้วในระดับมัธยม (เช่นเรื่องเซต ตรรกะเบื้องต้น) บางเรื่องจะถูกครอบคลุมอยู่แล้วในวิชาบังคับตัวอื่น (เรื่องความน่าจะเป็น วิธีจัดหมู่ การเรียงสับเปลี่ยน พีชคณิตบูลีน) ดังนั้น จึงควรเลือกเนื้อหาที่ไม่ซ้ำซ้อนกับรายวิชาอื่น ๆ จะได้สามารถนำเสนอเนื้อหาได้ละเอียดขึ้นด้วยจำนวนเรื่องที่น้อยลง ประการที่สองคือ นักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหาในการอ่านตำราภาษาอังกฤษ (ผมพบว่ามีนักเรียนหลายคนซื้อตำราภาษาอังกฤษมาก็เพราะเป็นตำราบังคับในวิชา และไม่เคยอ่านข้อความบรรยายในตำราเลย) และประการที่สามซึ่งเป็นผลสืบเนื่องจากประการที่สองก็คือตำรามีราคาแพง

ด้วยเหตุผลทั้งสามประการนี้จึงเป็นแรงจูงใจให้ผมใช้เวลาประมาณสองชั่วโมงต่อวันตอนกลางคืนหลังลูกหลับแล้ว เป็นเวลาร่วมครึ่งปี เขียนเป็นต้นฉบับเพื่อใช้ประกอบการสอนได้เกือบสองปี ดำเนินการแก้ไขอีกสองรอบ ก่อนที่จะถูกจัดพิมพ์เป็นหนังสือเล่มนี้ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาสามเรื่องหลักด้วยกันคือ จำนวนเต็มและทฤษฎีจำนวน (บทที่ 1 และ 2) ศาสตร์แห่งการนับ (บทที่ 3, 4 และ 5) และทฤษฎีกราฟ (บทที่ 6, 7 และ 8) เนื้อหาทั้งสามส่วนนี้รองรับวิชาอื่นๆ ในภาคการศึกษาหลังๆ ได้เป็นอย่างดี (วิชาโครงสร้างข้อมูล วิชาการออกแบบและวิเคราะห์อัลกอริทึม และวิชาอัลกอริทึมเชิงการจัด) อนึ่งเนื้อหาในบทที่ 3, 6 และ 8 นั้นนำมา

จากหนังสือ “คณิตศาสตร์ดีสครีตเชิงประยุกต์” ซึ่งผมเขียนร่วมกับอาจารย์วิทยา วัชรวิทยา
กุลเมื่อเกือบสิบปีที่แล้ว (หนังสือไม่ได้พิมพ์อีกแล้ว)

การสอนวิชานี้ก็ยังคงใช้แนวเดิมคือการใช้กระดานและชอล์ก หรือไม่ก็แผ่นใส ปากกา
และเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ อย่างไรก็ตามผมได้ใช้ซอฟต์แวร์ประมวลผลคณิตศาสตร์เชิง
สัญลักษณ์อาทิเช่น Mathematica หรือ Maple ช่วย และชักจูงให้นักเรียนฝึกปฏิบัติโดยใช้
เครื่องมือเหล่านี้ เพื่อให้เห็นภาพรวมของการจัดการ วิเคราะห์และแก้ไขปัญหา อีกทั้งยัง
สามารถใช้ทวนสอบความถูกต้องของผลเฉลยได้อีกด้วย

ท้ายสุดนี้ผมขอขอบคุณอาจารย์วิทยา วัชรวิทยากุลที่ได้ชักนำให้ผมเห็นความสำคัญ
ของการสอนวิชาพื้นฐาน ชักชวนให้ผมได้ร่วมเขียนหนังสือคณิตศาสตร์ดีสครีตเชิงประยุกต์
เมื่อสิบปีที่แล้ว และแนะนำเนื้อหาและประเด็นที่สำคัญในตำราเล่มใหม่นี้ และขอขอบคุณ
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่สนับสนุนวัสดุครุภัณฑ์ให้ผมได้
ผลิตต้นฉบับที่ใช้เป็นเอกสารประกอบการสอนวิชา 2110301 และขอขอบคุณศูนย์เทคโนโลยี
อิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ (NECTEC) ที่รับจัดพิมพ์เป็นตำราเพื่อเผยแพร่ได้
อย่างราบรื่น

สมชาย ประสิทธิ์จตุระกุล

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

somchaip@chula.ac.th

<http://www.cp.eng.chula.ac.th/~somchai/books>

๓๐ พฤษภาคม ๒๕๔๔

สารบัญ

1	จำนวนเต็ม	1
	ผลบวก	1
	การจัดการผลบวก	2
	ผลบวกหลายชั้น	5
	อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	11
	พินและเพดาน	13
	มอดุโล	16
	บทสรุปและเอกสารอ้างอิง	17
2	ทฤษฎีจำนวน	19
	การหารลงตัวและตัวหารร่วมมาก	19
	ตัวหารร่วมมาก	20
	ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด	20
	เวลาการทำงานของขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด	23
	สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น	24
	จำนวนเฉพาะ	27
	จำนวนของจำนวนเฉพาะ	30
	สมภาค	36
	สมภาคเชิงเส้น	40
	มอดุโลผกผัน	41
	สมภาคที่น่าสนใจ	42
	การทดสอบความเป็นจำนวนเฉพาะ	47

การทดสอบด้วยทฤษฎีบทเล็กของแฟร์มาต์.....	48
การทดสอบของมิลเลอร์.....	48
การทดสอบของมิลเลอร์และราบิน.....	50
การทดสอบจำนวนเมอร์แซน.....	50
บทสรุปและเอกสารอ้างอิง.....	53
3 หลักการเพิ่มเข้าตัดออก	55
หลักการเพิ่มเข้าตัดออก.....	55
การประยุกต์หลักการเพิ่มเข้าตัดออก.....	64
บทสรุปและเอกสารอ้างอิง.....	70
4 ฟังก์ชันก่อกำเนิด	71
การเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	72
สมบัติของฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	79
การบวกฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	80
การเลื่อนสมบัติ.....	80
การปรับมาตราส่วน.....	80
การคูณสมบัติด้วยเลขลำดับ.....	81
การหารสมบัติด้วยเลขลำดับ.....	81
การคูณฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	81
รูปแบบปิดของฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	82
ลำดับและฟังก์ชันก่อกำเนิดพื้นฐานต่างๆ.....	84
การใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดพิสูจน์เอกลักษณ์.....	88
ฟังก์ชันก่อกำเนิดแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล.....	91
การบวกฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	94
การเลื่อนสมบัติ.....	95
การปรับมาตราส่วน.....	95
การคูณสมบัติด้วยเลขลำดับ.....	95
การหารสมบัติด้วยเลขลำดับ.....	95
การคูณฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	96

ลำดับและฟังก์ชันก่อกำเนิดเอ็กซ์โปเนนเชียลต่าง ๆ	96
บทสรุปและเอกสารอ้างอิง.....	100
5 ความสัมพันธ์เวียนเกิด	101
การเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิด	102
ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิด.....	112
ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด.....	116
การเตาแล้วพิสูจน์	116
การคลี่	119
การเปลี่ยนตัวแปร	121
ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์.....	123
ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์.....	129
ความสัมพันธ์แบบแบ่งแยกและเอาชนะ	136
การหาผลเฉลยด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิด.....	142
บทสรุปและเอกสารอ้างอิง.....	152
6 ทฤษฎีกราฟ	155
นิยามและตัวอย่างการประยุกต์	156
ระดับชั้นของจุดยอด	163
สมสัณฐานของกราฟ	166
วิธี วังจร และกราฟเชื่อมต่อ.....	170
วงจรรอยเลอร์	173
วงจรแฮมิลตัน	180
กราฟเชิงระนาบ	189
การให้สีกราฟ.....	198
สรุปและเอกสารอ้างอิง.....	206

7 ต้นไม้ 209

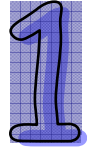
สมบัติของต้นไม้	209
ระยะทางและจุดศูนย์กลางของต้นไม้	211
ต้นไม้แบบมีราก	212
ต้นไม้แบบอันดับ	213
ต้นไม้แบบ m ภาค	214
ต้นไม้แบบทวิภาค	215
การนับจำนวนต้นไม้	217
ตัวอย่างการประยุกต์ต้นไม้	221
การแหวะผ่านต้นไม้	227
ต้นไม้โนพจน์	229
ปมบน-ปมล่าง	230
การวาดต้นไม้	231
ต้นไม้แบบทอดข้าม	233
การหาต้นไม้แบบทอดข้ามด้วยการค้นตามแนวลึก	235
การหาต้นไม้แบบทอดข้ามด้วยการค้นตามแนวกว้าง	236
วงจรพื้นฐาน	237
ต้นไม้สไตเนอร์	238
ต้นไม้ปริภูมิสถานะ	240
การย่อหน่วย	247
บทสรุปและเอกสารอ้างอิง	251

8 ข่ายงาน 253

วิธีสั้นสุด	253
การพิสูจน์ขั้นตอนวิธีของดิเจิร์สตรา	258
ต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กสุด	262
ขั้นตอนวิธีของครูสคัล	263
ขั้นตอนวิธีของพริม	263
การพิสูจน์ขั้นตอนวิธีของพริม	264

การไหลในข่ายงาน	268
ขั้นตอนวิธีการหาการไหลสูงสุดของฟอร์ดและฟูลเกอร์สัน	272
การพิสูจน์ขั้นตอนวิธีของฟอร์ดและฟูลเกอร์สัน	275
การไหลในข่ายงานที่มีแหล่งต้นทางและปลายทางหลายแหล่ง	279
ข่ายงานไม่ระบุทิศทาง	280
จุดยอดในข่ายงานซึ่งมีความจุจำกัด	280
การหาวิถีในกราฟซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน	281
การจับคู่	285
บทสรุปและเอกสารอ้างอิง	295

จำนวนเต็ม



คณิตศาสตร์เต็มไปด้วยเรื่องของจำนวนเต็ม เช่น การหาความสัมพันธ์ของลำดับของจำนวนเต็ม การหาผลบวกของจำนวนเต็ม การแปลงจำนวนจริงเป็นจำนวนเต็มโดยเลือกเฉพาะผลหาร หรือเลือกเฉพาะเศษเหลือ เป็นต้น จึงขอเริ่มบทแรกด้วยการนำเสนอสัญกรณ์และกลวิธีในการจัดการจำนวนเต็ม ประกอบด้วย การหาผลบวก การใช้ฟังก์ชันพื้น เพดาน และ มอดุโล ตามด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ใช้บ่อยมากในการพิสูจน์คุณสมบัติของจำนวนเต็ม

ผลบวก

การหาผลบวกเป็นความต้องการพื้นฐานในการนับ สัญกรณ์ข้างล่างนี้แทนผลบวกของจำนวน $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

ตัวอักษร i ที่ปรากฏในผลบวกข้างบนนี้ เป็นเพียงแค่ตัวแปรช่วยบรรยายขอบเขตของดัชนีของพจน์ต่าง ๆ ในผลบวก จะแทนด้วยตัวอักษรอะไรก็ได้ (โดยทั่วไปมักใช้ i , j หรือ k) การเขียนบรรยายขอบเขตของดัชนีทำให้หลายรูปแบบ อาจเขียนเอียงลงเอียงขึ้นเล็กน้อย

เช่น $\sum_{i=1}^n a_i$ เพื่อเขียนในบรรทัดที่กำลังบรรยาย ทำให้ระยะระหว่างบรรทัดแลดูไม่น่าเกลียด หรือบางครั้งก็เขียนเป็นบรรทัดเดียวไว้ด้านล่าง เช่น $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ หรือ $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ is even}}} a_i$ ทำให้

สามารถบรรยายขอบเขตได้ซับซ้อนขึ้น

การเปลี่ยนตัวแปรของดัชนี หรือการแทนตัวแปรด้วยนิพจน์สามารถกระทำได้อย่างอิสระ ตราบเท่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงการอ้างอิงถึงจำนวนต่าง ๆ ในผลบวก การเปลี่ยนเช่นนี้อาจทำให้ขอบเขตของดัชนีเปลี่ยนแปลงได้ เช่น การเปลี่ยนดัชนี i ทุกตัวเป็น $k+1$ ข้างล่างนี้ทำให้ต้องเปลี่ยนขอบเขตของดัชนี i ที่มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n ไปเป็นดัชนี k ที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $n-1$

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i \leq n} a_i &= \sum_{1 \leq k+1 \leq n} a_{k+1} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_{k+1}\end{aligned}$$

ขอบเขตของดัชนีควรอยู่ในรูปแบบที่อ่านเข้าใจง่าย มีจุดเริ่มต้นและสิ้นสุดที่ไม่ซับซ้อน เพื่อประโยชน์ในการจัดการผลบวก เช่น เขียน $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-2)(n-1)n$ แทนด้วย $\sum_{2 \leq i \leq n-1} (i-1)i(i+1)$ หรือ $\sum_{0 \leq i \leq n-1} (i-1)i(i+1)$ ก็ได้ผลลัพธ์เหมือนกัน (แต่แบบหลังมีขอบเขตที่สะอาดกว่า) เนื่องจากเมื่อ i มีค่า 0 และ 1 นิพจน์ในผลบวกมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1-1 จงเขียนผลบวกของ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ โดยใช้สัญกรณ์ $\sum$

แต่ละพจน์อยู่ในรูปของ $\frac{1}{k}$ เขียนเป็นผลบวกได้หลายแบบ เช่น $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1}$,

$\sum_{2 \leq i \leq n+1} \frac{1}{i-1}$, $\sum_{1 \leq k-7 \leq n} \frac{1}{k-7}$ เป็นต้น (แต่เขียนแบบแรกน่าจะดีที่สุด) อนึ่ง ผลบวกนี้มีชื่อ

เรียกพิเศษว่า จำนวนฮาร์โมนิก (harmonic number) ตัวที่ n แทนด้วย H_n เป็นจำนวนที่ปรากฏอยู่ในการวิเคราะห์ปัญหามากมาย

การจัดการผลบวก

จุดประสงค์หลักของการจัดการผลบวกคือ การเขียนผลบวกให้เป็นรูปแบบปิด (closed form) นั่นคือ ต้องการหาเป็นสูตรสำเร็จ เช่น $\frac{n(n+1)}{2}$ เป็นรูปแบบปิดของผลบวก $\sum_{1 \leq k \leq n} k$ ซึ่งไม่ต้องเขียนแจกแจงออกเป็นพจน์ต่างๆ สมบัติพื้นฐานต่อไปนี้ อาจช่วยเปลี่ยนรูปแบบของผลบวกเพื่อให้ง่ายต่อการจัดการ



สมบัติการแจกแจง (distributive property) : $\sum_{k \in K} ca_k = c \sum_{k \in K} a_k$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property) : $\sum_{k \in K} (a_k + b_k) = \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k$

สมบัติการสลับที่ (commutative property) : $\sum_{k \in K} a_k = \sum_{i \in I, p(i) \in K} a_{p(i)}$

โดยที่ K คือ เซตอันดับของจำนวนเต็ม และ $p(i)$ คือฟังก์ชันเรียงสับเปลี่ยนจำนวนเต็ม โดย $p(i) \in K$ หมายความว่า สำหรับ $k \in K$ จะมีจำนวนเต็ม i หนึ่งตัวเท่านั้นที่ทำให้ $p(i) = k$ เช่น $K = \{3, 4, \dots, 10\}$ และ $p(i) = i - 3$ เสมือนเป็นการเปลี่ยนค่าที่พิจารณาจาก $3 \leq k \leq 10$ ไปเป็น $3 \leq i - 3 \leq 10$ ลบด้วย 3 ตลอดได้ $1 \leq i \leq 7$ ซึ่งเป็นช่วงที่จัดการผลบวกได้ง่ายกว่า (จะเห็นการเปลี่ยนด้วยสมบัติการสลับที่ในตัวอย่างต่อไป)

ตัวอย่างที่ 1-2 จงหารูปแบบปิดของผลบวก $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} k$

$$S_n = \sum_{1 \leq n-k+1 \leq n} (n-k+1)$$

แทนดัชนี k ด้วย $n-k+1$

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} (n-k+1)$$

เปลี่ยนขอบเขต $1 \leq n-k+1 \leq n$ ให้เหมาะสมโดย
ลบ $n+1$ ตลอด ตามด้วยการคูณ -1 ตลอดได้
 $1 \leq k \leq n$

$$2S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} k + \sum_{1 \leq k \leq n} (n-k+1)$$

นำผลบวกก่อนเปลี่ยนดัชนีและหลังเปลี่ยนดัชนี
มาบวกกัน

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} (k + (n-k+1))$$

อาศัยสมบัติการเปลี่ยนหมู่เพื่อรวมผลบวก

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} (n+1) = n(n+1)$$

ได้พจน์ $(n+1)$ บวกกัน n ครั้ง

$$S_n = n(n+1)/2$$

หาร 2 ตลอด ก็จะได้คำตอบ

ตัวอย่างที่ 1-3 จงหารูปแบบปิดของ ผลบวก $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} (a + bk)$

$$S_n = \sum_{0 \leq n-k \leq n} (a + b(n-k)) \quad \text{แทนดัชนี } k \text{ ด้วย } n-k$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n} (a + b(n-k)) \quad \text{ปรับขอบเขตด้วยการลบ } n \text{ แล้วคูณ } -1 \text{ ตลอด}$$

$$2S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} ((a + bk) + (a + b(n-k))) \quad \text{รวมสมการ } S_n \text{ ก่อนและหลังการเปลี่ยนดัชนี}$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n} (2a + bn) \quad \text{ใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่}$$

$$= (2a + bn) \sum_{0 \leq k \leq n} 1 \quad \text{ใช้สมบัติการแจกแจง ดึง } (2a + bn) \text{ ออกมา}$$

$$S_n = \frac{1}{2} (2a + bn)(n+1) \quad \text{หาร 2 ตลอด ได้คำตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 1-4 จงหารูปแบบปิดของ $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} ax^k$

$$S_n + ax^{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n} ax^k + ax^{n+1} \quad \text{เติมพจน์ } ax^{n+1} \text{ เข้าทั้งสองข้างของสมการ แล้ว}$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n+1} ax^k \quad \text{ดึงพจน์ } ax^0 \text{ ออกจากผลบวก}$$

$$= ax^0 + \sum_{1 \leq k \leq n+1} ax^k$$

$$= a + \sum_{1 \leq k+1 \leq n+1} ax^{k+1} \quad \text{เปลี่ยนดัชนีจาก } k \text{ เป็น } k+1$$

$$S_n + ax^{n+1} = a + \sum_{0 \leq k \leq n} ax^{k+1} \quad \text{ลบ 1 ตลอดในขอบเขต } 1 \leq k+1 \leq n+1 \text{ เป็น}$$

$$= a + x \sum_{0 \leq k \leq n} ax^k \quad \text{จะได้ผลบวกหลังปรับคือ } xS_n \text{ ใช้}$$

$$= a + xS_n \quad \text{พีชคณิตพื้นฐานจัดการสมการก็จะได้คำตอบ}$$

$$S_n = \frac{a(1-x^{n+1})}{1-x}$$

ตัวอย่างที่ 1-5 จงหารูปแบบปิดของ $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} k 2^k$

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k 2^k \quad \text{เขียนใหม่ให้ดัชนี } k \text{ มีค่าเริ่มที่ } 0$$

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n+1} k 2^k \quad \text{บวก } (n+1)2^{n+1} \text{ ทั้งสองข้างของสมการ}$$

$$= \sum_{0 \leq k+1 \leq n+1} (k+1)2^{k+1} \quad \text{แทนดัชนี } k \text{ ด้วย } k+1 \text{ จากนั้นปรับดัชนีให้}$$

$$= \sum_{-1 \leq k \leq n} (k+1)2^{k+1} \quad \text{กลับเป็น } k \text{ (โดยการลบ 1 ตลอด) แล้ว}$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)2^{k+1} \quad \text{เปลี่ยนจุดเริ่มจาก } -1 \text{ เป็น } 0 \text{ เนื่องจากเมื่อ}$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n} k 2^{k+1} + \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} \quad k = -1 \text{ ค่าของ } (k+1) \text{ เป็น } 0$$

$$= 2S_n + 2^{n+2} - 2 \quad \text{แยกผลบวกทางขวามือออกเป็นสองส่วน}$$

ผลบวกแรกคือ $2S_n$ ในขณะที่ผลบวกตัว
หลังเท่ากับ $(2-2^{n+2})/(1-2) = 2^{n+2} - 2$
(ใช้ผลที่ได้ในตัวอย่างที่ 1-4 โดยให้ $a=1$
และ $x=2$)

$$S_n = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \quad \text{จากนั้นจัดการสมการด้วยพีชคณิตพื้นฐาน}$$

$$= (n-1)2^{n+1} + 2 \quad \text{ก็ได้คำตอบ}$$

ผลบวกหลายชั้น

ในกรณีที่ต้องการหาผลบวกของพจน์ต่างๆ ที่มีดัชนีหลายตัว ก็สามารถใช้สัญกรณ์ผลบวกได้ โดยระบุขอบเขตของดัชนีแต่ละตัวให้ชัดเจน เช่น

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j$$

แทนผลบวกของพจน์ต่างๆ จำนวนทั้งสิ้น n^2 พจน์ เราอาจเขียนให้กระชับขึ้นเป็น

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j$$

หลายคนอาจคุ้นเคยกับการเขียนผลบวกซ้อนผลบวกหลายๆ ชั้นแบบนี้

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_j b_k$$

ซึ่งถ้าจะเขียนให้ละเอียด ก็ต้องใส่วงเล็บเป็น

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_j b_k \right)$$

ในกรณีที่ดัชนีต่างๆ ของผลบวกแต่ละตัวมีค่าไม่ขึ้นกันและกัน ลองมาดูการจัดการผลบวกหลายชั้นข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_j b_k &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_j b_k \right) \\ &= \sum_{j \in J} \left(a_j \left(\sum_{k \in K} b_k \right) \right) \\ &= \left(\sum_{j \in J} a_j \right) \left(\sum_{k \in K} b_k \right) \end{aligned}$$

บรรทัดที่สองใช้สมบัติการแจกแจงดึง a_j ออกจากผลบวกชั้นใน เพราะค่า a_j ไม่ขึ้นกับดัชนี k และอีกเช่นกันในบรรทัดต่อมา ใช้สมการการแจกแจงดึงผลบวกของพจน์ b_k ออกจากผลบวกชั้นนอก เนื่องจากผลบวกของทุกๆ พจน์ b_k ไม่ขึ้นกับดัชนี j จึงเป็นที่มาของสมบัติการแจกแจงกรณีทั่วไปของผลบวกดังนี้



$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_j b_k = \left(\sum_{j \in J} a_j \right) \left(\sum_{k \in K} b_k \right)$$

ต้องขอเน้นว่า สมการข้างบนนี้ใช้ได้เมื่อดัชนีทั้งสองมีค่าไม่ขึ้นแก่กัน

และจากสมบัติการแจกแจงนี้ เราสามารถสลับที่ของดัชนีที่ใช้ในแต่ละชั้นได้ดังนี้

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_j b_k \right) = \left(\sum_{j \in J} a_j \right) \left(\sum_{k \in K} b_k \right) = \left(\sum_{k \in K} b_k \right) \left(\sum_{j \in J} a_j \right) = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_j b_k \right)$$

แต่ถ้าเป็นกรณีที่ค่าของดัชนีมีความสัมพันธ์กัน การจัดการจะต้องทำอย่างระมัดระวัง เช่น กรณีที่ความสัมพันธ์ของดัชนีเป็น $1 \leq j \leq k \leq n$ ซึ่งมักพบบ่อย เราสามารถสลับที่ดัชนีได้ดังนี้

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j b_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n a_j b_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_k$$

ตัวอย่างที่ 1-6 จงหาสูตรการคำนวณแบบง่ายของ $S_n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j}$

ขอแสดงวิธีแก้ปัญหานี้ให้ดูสามวิธีดังนี้

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่หนึ่ง} \quad S_n &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j < k \leq n} \frac{1}{k-j} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j < k+j \leq n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{0 < k \leq n-j} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} H_{n-j} \\ &= \sum_{1 \leq n-j \leq n} H_j \\ &= \sum_{0 \leq j < n} H_j \end{aligned}$$

เขียนให้ j เป็นดัชนีชั้นนอก

แทน k ด้วย $k+j$

ปรับขอบเขตดัชนีชั้นในให้ดูง่ายขึ้น

ผลบวกชั้นในคือจำนวนฮาร์โมนิก

แทน j ด้วย $n-j$

ปรับขอบเขตดัชนีให้ดูง่ายขึ้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่สอง} \quad S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j < k} \frac{1}{k-j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq k-j < k} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{0 < j \leq k-1} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} H_{k-1} \\ &= \sum_{1 \leq k+1 \leq n} H_k \\ &= \sum_{0 \leq k < n} H_k \end{aligned}$$

เขียนให้ k เป็นดัชนีชั้นนอก

แทน j ด้วย $k-j$

ปรับขอบเขตดัชนีชั้นในให้ดูง่ายขึ้น

ผลบวกชั้นในคือจำนวนฮาร์โมนิก

แทน k ด้วย $k+1$

ปรับขอบเขตดัชนีให้ดูง่ายขึ้น

วิธีที่หนึ่งและวิธีที่สองได้ผลลัพธ์เหมือนกัน มาดูอีกวิธี

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่สาม} \quad S_n &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j} \\ &= \sum_{1 \leq j < k+j \leq n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

แทน k ด้วย $k+j$

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n-k} \frac{1}{k}$$

เขียนเป็นผลบวกสองชั้นให้ k อยู่ชั้นนอก

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n-k}{k}$$

ผลบวกชั้นในคือ $1/k$ บวกกัน $(n-k)$ ครั้ง

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n}{k} - \sum_{1 \leq k \leq n} 1$$

เขียน $(n-k)/k$ เป็น $n/k - 1$ แล้วใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่เพื่อแยกผลบวก

$$= n \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \right) - n$$

ดึง n ในผลบวกตัวซ้ายออกข้างนอก ส่วนผลบวกตัวขวามีค่าเท่ากับ n

$$= nH_n - n$$

ได้คำตอบในรูปของจำนวนฮาร์โมนิก

วิธีที่สามได้รูปแบบของ S_n ที่สวย จับคำตอบของวิธีที่หนึ่ง (หรือสอง) ให้เท่ากับที่ได้จากวิธีที่สาม ทำให้ได้ความรู้เพิ่มขึ้นว่า

$$\sum_{0 \leq k < n} H_k = nH_n - n$$

ตัวอย่างที่ 1-7 จงหารูปแบบปิดของ $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} k^2$

รูปแบบปิดของผลบวกนี้หาได้หลายวิธี จากโจทย์ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(1) + (2+2) + (3+3+3) + \dots + \underbrace{(n+n+\dots+n)}_{n \text{ พจน์}}$ สามารถเขียนเป็นผลบวกสองชั้นแล้วจัดการผลบวกจนได้รูปแบบปิดดังนี้

$$S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} k^2$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq k} k$$

เขียนเป็นผลบวกสองชั้น

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j \leq k \leq n} k$$

สลับลำดับของดัชนี

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2} \right)$$

Σ ตัวในคือ $(1+2+\dots+n) - (1+2+\dots+(j-1))$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} n(n+1) - \sum_{1 \leq j \leq n} j^2 + \sum_{1 \leq j \leq n} j \right)$$

ใช้สมบัติการแจกแจงและการเปลี่ยนหมู่ของผลบวก

$$= \frac{1}{2} \left(n^2(n+1) - S_n + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

ผลบวกของตัวขวาและซ้ายหาไม่ยาก ส่วนตัวกลางก็คือ S_n ที่กำลังอยากรู้

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

คุณ 2 ตลอดแล้วย้าย $-S_n$ ไปทางซ้าย แล้วใช้พีชคณิตพื้นฐานจัดการสมการ ก็จะได้คำตอบ

สมบัติต่างๆ ของผลบวก $\sum_{k \in K} a_k$ ที่กล่าวมานี้ใช้ได้กับกรณีที่ K เป็นเซตอันตะ ในกรณีที่ K เป็นเซตอนันต์ สมบัติต่างๆ จะใช้ได้เฉพาะกับผลบวกที่ลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolutely convergent sums) เท่านั้น ซึ่งเป็นกรณีที่ $\sum_{k \in K} |a_k| \leq c$ นั่นคือ ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของทุกๆ พจน์มีค่าไม่เกินค่าคงตัว c ค่าหนึ่ง (จะขอละไม่แสดงวิธีพิสูจน์)

ตัวอย่างที่ 1-8 จงหาค่าของผลบวก $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

จากนิยามของ S จะได้ว่า $2S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 + S$ ดังนั้น $S = 2$

ตัวอย่างที่ 1-9 จงหาค่าของผลบวก $S = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k$

จากนิยามของ S จะได้ว่า $2S = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \right) - 1 = S - 1$ ดังนั้น $S = -1$

แต่เอ๊ะ ! มันจะเป็นไปได้อย่างไรที่ผลบวกของจำนวนบวกมากมายเป็นอนันต์ มีค่าติดลบที่เป็นเช่นนั้นก็เพราะ ผลบวก S ที่ต้องการค่านั้นลู่ออก (diverge) จึงไม่สามารถใช้สมบัติการแจกแจงกับผลบวกประเภทนี้ได้ คำตอบที่ได้จึงผิด เนื่องจากเป็นผลบวกลู่ออก ดังนั้นคำตอบที่ได้มีค่าอนันต์

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าผลบวกข้างล่างนี้

$$\sum_{0 \leq k \leq 9} k^2$$

$$\sum_{0 \leq k^2 \leq 9} k^2$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 6}} (i+j)$$

2. จงแสดงให้เห็นจริงว่า $\sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$

3. จงหารูปแบบปิดของผลบวก

ก) $\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k(k+1)}$

ข) $\sum_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{k^2 - 1}$

4. จงเขียนผลบวก $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_{i,j,k}$ ในรูปแบบของผลบวกสามชั้นโดยที่

ก) ผลบวกชั้นในสุดเป็นของดัชนี k ชั้นกลางเป็นของ j และชั้นนอกสุดเป็นของ i

ข) ผลบวกชั้นในสุดเป็นของดัชนี i ชั้นกลางเป็นของ j และชั้นนอกสุดเป็นของ k

5. จงใช้เอกลักษณ์ $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ ประกอบกับผลของแบบฝึกหัดข้อที่ 2 เพื่อหา

รูปแบบปิดของ $\sum_{k=1}^n k$

6. จงหารูปแบบปิดของ $\sum_{k=1}^n k^2$ โดยใช้เทคนิคและผลที่ได้จากแบบฝึกหัดข้อที่ 5

7. จงหารูปแบบปิดของ $\sum_{k=1}^n k^3$ โดยใช้เทคนิคในแบบฝึกหัดข้อที่ 5 และผลที่ได้จากแบบฝึกหัดข้อที่ 5 และ 6

8. จงแสดงให้เห็นจริงว่า $a_{n+1} + \sum_{0 \leq k \leq n} a_k = a_0 + \sum_{0 \leq k \leq n} a_{k+1}$

9. จงหาเขียนผลบวก $\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k$ ให้อยู่ให้รูปของฟังก์ชันของ $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k$ และ $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k^2$

10. จงหารูปแบบปิดของ $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ โดยที่ $|x| < 1$