

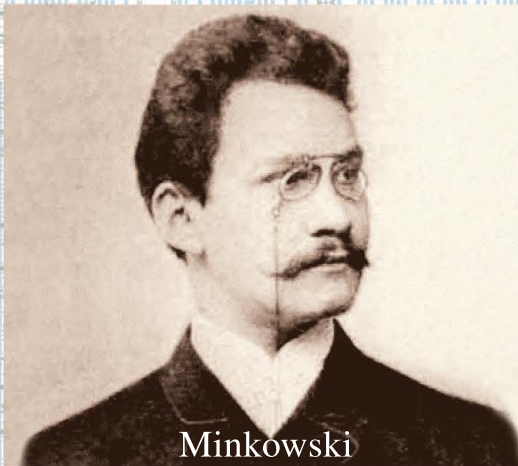


อสมการ

และ

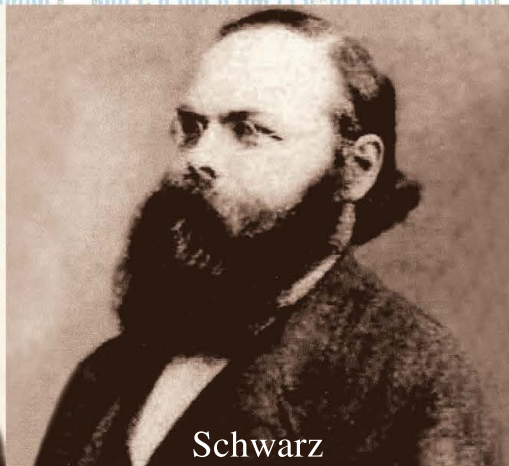
สมการเชิงฟังก์ชัน

(พื้นฐานของอสมการ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต อสมการ Cauchy-Schwarz ฟังก์ชันนูนและอสมการ Jensen อสมการว่าด้วยการจัดเรียง พหุนามสมมาตร พหุนามเอกพันธ์ อสมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน อสมการที่เกี่ยวข้องกับการนับอสมการที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพิเศษของฟังก์ชัน อสมการประเภทอื่นๆ ฟังก์ชัน ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันสมการเชิงฟังก์ชันของโคชี สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอรัต สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง)



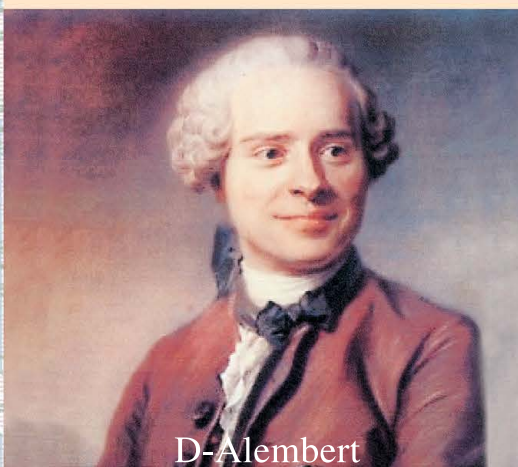
Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}$$



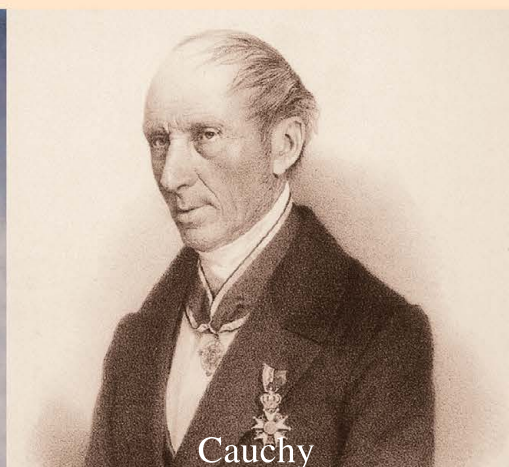
Schwarz

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}$$



D-Alembert

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$



Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

อสมการและสมการเชิงฟังก์ชัน

(พื้นฐานของอสมการ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต อสมการ Cauchy-Schwarz ฟังก์ชันนูนและอสมการ Jensen อสมการว่าด้วยการจัดเรียง พหุนามสมมาตร พหุนามเอกพันธ์ อสมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน อสมการที่เกี่ยวข้องกับการนับอสมการที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพิเศษของฟังก์ชัน อสมการประเภทอื่นๆ ฟังก์ชัน ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันสมการเชิงฟังก์ชันของโคชี สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง)



$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$$

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน.



**มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา
ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา
กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)**

ความเป็นมา

ประเทศไทยส่งนักเรียนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งแรกในปี พ.ศ. 2532 ที่ประเทศเยอรมนี โดยความร่วมมือระหว่างสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา (พระยศในขณะนั้น) ได้พระราชทานเงินส่วนพระองค์จำนวนหนึ่งเพื่อเป็นค่าใช้จ่าย

การคัดเลือกนักเรียนเพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 30 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดคณะกรรมการมหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งมาช่วยเฟ้นหาและฝึกอบรมเป็นเวลาประมาณสองเดือน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติมครอบคลุมหลักสูตรที่จะใช้แข่งขัน ซึ่งอยู่ในระดับชั้นปีที่ 1-2 ของมหาวิทยาลัย จากผลสำเร็จในปีแรก ทำให้รัฐบาลเห็นความสำคัญจึงได้จัดสรรงบประมาณให้กับโครงการนี้ผ่านสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 เป็นต้นมา สมทบกับเงินพระราชทานเป็นรายปีจากสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เพื่อสนับสนุนการส่งนักเรียนไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ 5 สาขา จนถึงปัจจุบันรวม 14 ปี นักเรียนไทยได้ทำชื่อเสียงได้เหรียญทองรวม 17 เหรียญ เหรียญเงิน 53 เหรียญ เหรียญทองแดง 93 เหรียญ และเกียรติคุณประกาศ 35 ราย รวมทั้งสิ้น 198 รางวัล จากจำนวนนักเรียนที่ส่งไปแข่งขัน 276 คน (72%)

อย่างไรก็ตาม จากการที่ประเทศไทยดำเนินการจัดส่งนักเรียนเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ตั้งแต่ พ.ศ. 2532 จนถึงปัจจุบัน ทำให้เห็นว่ามาตรฐานการศึกษาด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของไทยยังต่ำกว่ามาตรฐานสากล การเตรียมตัวของนักเรียนยังใช้เวลาน้อยเกินไป

เพื่อให้การส่งเสริมและสนับสนุน โครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นสมเด็จพระเจ้า พี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จึงมีพระดำริให้จัดตั้งมูลนิธิ สอวน. และได้รับอนุมัติจากกระทรวงมหาดไทยเมื่อวันที่ 12 ตุลาคม 2542 โดยมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการ

วัตถุประสงค์

1. ส่งเสริมให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วประเทศที่มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีโอกาสได้รับการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ฟิสิกส์ และชีววิทยา ตามความถนัดทั้งด้านทฤษฎีและทักษะด้านปฏิบัติ ให้สามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยจัดให้มีศูนย์อบรมทั่วประเทศเป็นการเพิ่มเวลาฝึกอบรม เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความพร้อมที่จะเข้ารับการคัดเลือกไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ตามพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ องค์ประธานมูลนิธิ สอวน.
2. เพื่อนำประสบการณ์ที่ได้จากการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษาของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าระดับสากล

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน.

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอน.) ได้ร่วมมือกับคณาจารย์มหาวิทยาลัยของรัฐ 20 แห่ง และกระทรวงศึกษาธิการ ดำเนินการจัดตั้งศูนย์ สอน. ในภูมิภาค 12 ศูนย์ และในกรุงเทพฯ 1 ศูนย์ (5 โรงเรียน) เพื่อพัฒนาศักยภาพทางปัญญาของนักเรียนที่มีความพร้อมในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์จากทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนได้มีความรู้ความสามารถเทียบเท่ามาตรฐานสากล และพร้อมที่จะสอบคัดเลือกเป็นผู้แทนประเทศไทยไปร่วมการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศในสาขาวิชาต่างๆ ได้และเพื่อขยายผลจากประสบการณ์ที่ได้เข้าแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าสากล

ในการอบรมนักเรียนของศูนย์ สอน. มูลนิธิ สอน. ได้พิจารณาเห็นว่าตำราที่มีความสมบูรณ์ของเนื้อหาตามหลักสูตรของสอน. จะช่วยพัฒนาศักยภาพของนักเรียนในศูนย์สอน. ให้สูงขึ้นได้ นอกจากนั้นตำราเรียนในวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสมบูรณ์ถูกต้องยังขาดแคลน นักเรียนและครูสามารถนำตำราที่พัฒนาขึ้นมาไปใช้เป็นหนังสืออ้างอิงประกอบการเรียนการสอนได้อีกด้วย มูลนิธิ สอน. จึงได้มี "โครงการจัดทำตำราส่งเสริมพัฒนาศักยภาพของนักเรียนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์" ขึ้น เพื่อผลิตตำราคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ที่มีเนื้อหาหลักสูตรตามมาตรฐานสากล โดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นที่ระลึกในมหามงคลสมัยที่สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ทรงเจริญพระชนมายุ 80 พรรษา ซึ่งพระองค์ทรงมีพระมหากรุณาธิคุณต่อโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศและทรงสนับสนุนการดำเนินงานเพื่อพัฒนามาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยอย่างหาที่สุดมิได้

2. เพื่อผลิตหนังสือคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายถึงระดับชั้นปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยให้มีคุณภาพเทียบเท่าสากล เรียบเรียงโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัยของรัฐที่มีประสบการณ์สูงและที่มีส่วนร่วมในการฝึกอบรมนักเรียนในค่าย สอน. ค่าย สสวท. และควบคุมนักเรียนไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ เนื้อหาในหนังสือเน้นกระบวนการคิดแบบวิทยาศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและประยุกต์ได้โดยจัดพิมพ์บนกระดาษอาร์ตอย่างดีและมีภาพสีประกอบคำบรรยาย

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของมูลนิธิ สอน. มีเป้าหมายในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ รวม 5 เล่ม คอมพิวเตอร์ 3 เล่ม เคมี 4 เล่ม ชีววิทยา 6 เล่ม และฟิสิกส์ 3 เล่ม รวมทั้งสิ้น 20 เล่ม หนังสือแต่ละเล่มจะพิมพ์จำนวนเล่มละ 3,000 ฉบับ จึงมีหนังสือที่จะพิมพ์ทั้งสิ้น 60,000 ฉบับ โดยหนังสือชุดแรกที่พิมพ์เสร็จแล้ว 7 เล่ม ได้นำขึ้นทูลเกล้าถวายเพื่อทอดพระเนตรในวันที่ 6 มิถุนายน 2547 ซึ่งเป็นวันประชุมสามัญประจำปี พ.ศ. 2547 ของคณะกรรมการบริหาร และสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เสด็จเป็นองค์ประธานที่ประชุม ส่วนที่เหลืออีก 13 เล่ม กำลังดำเนินการพิมพ์ให้ครบทั้ง 20 เล่ม สมเด็จพระพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จะพระราชทานหนังสือดังกล่าวให้โรงเรียนมัธยมศึกษา ประมาณ 2,700 โรงเรียน รวมทั้ง คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยของรัฐที่เป็นศูนย์ สอน. ทั่วประเทศ นอกจากนั้นคณะกรรมการโครงการผลิตตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน. มีเป้าหมายจะผลิตตำราที่มีคุณภาพสูงนี้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัย เพื่อวางรากฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพื่อสร้างแรงบันดาลใจและความสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์แก่เยาวชนอีกด้วย หากได้รับความอนุเคราะห์ช่วยเหลือด้านงบประมาณจากภาครัฐและเอกชน

คณะจัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์หวังว่าโครงการตำราคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ของมูลนิธิ สอน. จะมีส่วนร่วมในการปฏิรูปการเรียนรู้และยกระดับมาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้เทียบเท่ากับระดับสากลเพื่อสนองพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

คณะกรรมการที่ปรึกษา

1. ศาสตราจารย์ นายแพทย์ จรัส สุวรรณเวลา	รองประธานมูลนิธิ สอวน.
2. รองศาสตราจารย์ ดร.กำจัด มงคลกุล	กรรมการมูลนิธิฯ
3. ดร. คุณหญิงกษมา วรวรรณ ณ อยุธยา	กรรมการมูลนิธิฯ
4. รองศาสตราจารย์ ดร. คุณหญิงสุมณฑา พรหมบุญ	กรรมการมูลนิธิฯ
5. นายเชาว์ อรรถมานะ (อดีต)	กรรมการมูลนิธิฯ
6. นายสมนึก พิมลเสถียร	กรรมการมูลนิธิฯ
7. นายสุนทร อรุณานนท์ชัย	กรรมการมูลนิธิฯ
8. รองศาสตราจารย์บุญรักษา สุนทรธรรม	กรรมการมูลนิธิฯ

คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ

1. ศาสตราจารย์ ศักดา ศิริพันธุ์ (ราชบัณฑิต) เลขานุการมูลนิธิ สอวน.	ประธาน
2. รองศาสตราจารย์เย็นใจ สมวิเชียร	รองประธาน
3. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนั่ม	กรรมการ (วิชาคณิตศาสตร์)
4. รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรวรรณ	กรรมการ (วิชาคอมพิวเตอร์)
5. รองศาสตราจารย์ ดร. พินิติ รตะนานุกูล	กรรมการ (วิชาเคมี)
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ์	กรรมการ (วิชาฟิสิกส์)
7. ศาสตราจารย์อักษร ศรีปลั่ง	กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทพืช)
8. รองศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ยศยิ่งยวด	กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทสัตว์)

คณะผู้เขียนวิชาคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนั่ม	ประธานคณะอนุกรรมการ
2. ศาสตราจารย์ กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล	อนุกรรมการ
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ลีรวรรณ	อนุกรรมการ
4. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์	อนุกรรมการ
5. รองศาสตราจารย์ ดร. ณวีวรรณ รัตนประเสริฐ	อนุกรรมการ
6. รองศาสตราจารย์ ดร. วิเชียร เลหาโกศล	อนุกรรมการ
7. ดร. ภัททิรา เรืองสินทรัพย์	อนุกรรมการ
8. นายวัชรพล พิมพ์เสริญ	อนุกรรมการ

คำนำ

หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่อเผยแพร่เนื้อหาวิชาในหัวข้อสองหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ที่พบเสมอในโจทย์การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ได้แก่ อสมการ (Inequalities) ในส่วนแรก และ สมการเชิงฟังก์ชัน (Functional Equations) ในส่วนหลัง (โดยกำกับเลขที่บทแยกออกจากกัน) วิธีการนำเสนอในที่นี้เน้นการแก้โจทย์ปัญหาระดับที่ใช้ในการแข่งขัน โดยมีทฤษฎีบท และคำบรรยายแทรกอยู่เป็นระยะ ๆ

ความรู้พื้นฐานในการอ่านศึกษา และทำความเข้าใจหนังสือเล่มนี้ คือ ความรู้ในเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ปรากฏในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย อย่างไรก็ตาม มีบางจุด เช่น ในการพิสูจน์อสมการว่าด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก (Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality) ที่ใช้ทฤษฎีบทว่าด้วยค่ามัธยฐาน (Mean-value Theorem) ในวิชาคณิตวิเคราะห์เชิงจริง (Real Analysis) ระดับมหาวิทยาลัยตอนต้น ซึ่งผู้อ่านอาจยอมรับไปก่อนได้

เนื่องจากโจทย์ตัวอย่าง และแบบฝึกหัดที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้ เกือบทั้งหมดเป็นโจทย์ที่มาจากการสอบแข่งขันหลายระดับแตกต่างกัน ผู้อ่านจะพบว่าบางตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด สามารถทำความเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว ในขณะที่มีตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัดอีกเป็นจำนวนมาก เป็นต้นว่าที่ใช้ในการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (International Mathematical Olympiads) ซึ่งต้องอ่าน และทำความเข้าใจอย่างช้า ๆ ซ้ำหลายครั้ง และละเอียดรอบคอบ ทั้งนี้เนื่องมาจากความซับซ้อน และความยากของโจทย์ปัญหา ผู้เขียนแนะนำผู้อ่านควรมีกระตือรือร้น ดินสอ วงเวียน ไม้บรรทัด ไว้ตรวจสอบรายละเอียด อย่างสม่ำเสมอ เพื่อช่วยตรวจสอบ และทำความเข้าใจให้ถึงแก่นแท้ของโจทย์ การกระทำเช่นนี้จะเป็นสิ่งที่ผู้เขียนถือว่าเป็นแนวทางหลักในการอ่าน ก่อนที่จะทำแบบฝึกหัด เพื่อเสริมสร้างประสบการณ์ในการแก้โจทย์ปัญหาในลำดับถัดไป

การใช้คำไทยแทนคำศัพท์ทางวิชาการ หรือชื่อเฉพาะ ที่ใช้ในหนังสือเล่มนี้ ในหลักการแล้วยึดตามศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พิมพ์ครั้งที่ 7 พ.ศ. 2540 อย่างไรก็ตาม มีศัพท์ทางวิชาการจำนวนไม่น้อย ที่ผู้เขียนแปลขึ้นเองตามความเหมาะสม และชื่อเฉพาะส่วนใหญ่ใช้การแปลทับศัพท์

เนื้อหาในส่วนของอสมการมีทั้งสั้นสิบเอ็ดบท โดยจำแนกตามประเภทของอสมการที่พบในการแข่งขัน บทแรกเป็นการทบทวนความรู้พื้นฐาน และเทคนิคการจัดรูปอสมการ บทที่สองว่าด้วยอสมการที่รู้จักกันดีที่สุด กล่าวคือ อสมการว่าด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต ทั้งแบบปรกติ และแบบถ่วงน้ำหนัก ซึ่งการพิสูจน์อสมการประเภทหลังนี้ เช่น ที่เอ่ยถึงข้างต้น จำเป็นต้องใช้ความรู้เกินระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเล็กน้อย เพราะต้องอาศัยแนวคิดว่าด้วยความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บทที่สามว่าด้วยอสมการ Cauchy-Schwarz ซึ่งตีความเป็นอสมการว่าด้วยผลคูณจุด (dot product) ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ได้ บทที่สี่ว่าด้วยอสมการ Jensen ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมบัติความนูน (convexity) หรือเว้า (concavity) ของฟังก์ชัน สมบัติดังกล่าวนี้สามารถตรวจได้สะดวกขึ้น หากใช้ผลจากวิชาแคลคูลัส (Calculus) แต่เนื้อหาวิชานี้ถือว่าเกินระดับที่ใช้ในการสอบแข่งขันระหว่างประเทศ บทที่ห้ากล่าวถึง อสมการว่าด้วยการจัดเรียง (rearrangement) ซึ่งอาจนับว่าเป็นของค่อนข้างใหม่สำหรับนักเรียนไทย เพราะเกี่ยวข้องกับการจัดเรียงของลำดับของจำนวนจริง แต่เป็นอสมการที่มีพลังสูงมาก บทที่หกและเจ็ด ว่าด้วยสมบัติสำคัญสองประการของพหุนาม ได้แก่ ความสมมาตร (symmetry) และความเป็นเอกพันธ์ (homogeneity) ที่ปรากฏในโจทย์อสมการจำนวนมาก สมบัติดังกล่าวสามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อลดทอนขั้นตอนในการแก้โจทย์อสมการได้ บทที่แปด เก้า และสิบ ว่าด้วยโจทย์อสมการที่จำเป็นต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สาขาอื่นมาช่วยในการแก้ ได้แก่ ความรู้ทางทฤษฎีจำนวน ทางการนับ ทาง

ฟังก์ชันพิเศษเป็นต้นว่าฟังก์ชันพีชคณิต หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติ บทสุดท้ายในส่วนนี้ว่าด้วยสมการประเภทอื่น ๆ ซึ่งไม่สามารถจำแนกเข้าไปอยู่ในบทก่อนหน้านี้ได้ ถือเป็นบทที่มีเนื้อหาเบ็ดเตล็ดได้

เนื้อหาในส่วนของสมการเชิงฟังก์ชันมีทั้งสั้นห่าบท บทแรกว่าด้วยฟังก์ชัน ซึ่งมีเนื้อหาเพิ่มเติมจากระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเล็กน้อย บทที่สองว่าด้วยความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชัน นอกจากเป็นการกล่าวถึงวิธีการพื้นฐานที่พบเสมอในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน แล้วยังมีการแก้สมการเชิงฟังก์ชันสองรูปแบบ ได้แก่ สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี (Cauchy's Functional Equation) และสมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบิร์ต (D'Alembert's Functional Equation) ซึ่งผลดังกล่าวสามารถนำไปอ้างอิงในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันประเภทใกล้เคียงได้ บทที่สามว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนของฟังก์ชันคำตอบ เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเต็ม และมีเนื้อหาว่าด้วยการแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ตลอดจนทฤษฎีบทของบีตี (Beatty's Theorem) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันภาคจำนวนเต็มและความเป็นอตรรกยะ ซึ่งใช้ช่วยในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันบางประเภทได้ บทที่สี่ว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนของฟังก์ชันคำตอบเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง เช่นเซตของจำนวนตรรกยะ หรือช่วง โดยมีเนื้อหาเพิ่มเติมว่าด้วยการแทนจำนวนจริงด้วยเลขฐาน และในส่วนสุดท้ายเป็นเรื่องของสมการเชิงฟังก์ชันที่ต้องการคำตอบเป็นพหุนาม บทสุดท้ายว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันประเภทอื่น ซึ่งไม่สามารถจำแนกด้วยโดเมนของฟังก์ชันคำตอบเช่นในบทที่สาม และสี่ได้ หรือไม่ก็เป็นสมการเชิงฟังก์ชันที่โจทย์ถามถึงสิ่งอื่น ที่ไม่ใช่รูปแบบชัดเจนของฟังก์ชันคำตอบ

การอ้างอิงระบบตัวเลขที่ใช้ในหนังสือเล่มนี้ ในกรณีของตัวอย่างที่มีสามจุดนั้น จำนวนแรกแสดงถึงบท จำนวนที่สองแสดงถึงหัวข้อในบท จำนวนที่สามแสดงถึงลำดับของตัวอย่างนั้น เช่น ตัวอย่างที่ 11.2.3 หมายถึงตัวอย่างที่สาม ในหัวข้อที่ 2 ของบทที่ 11 ในกรณีของตัวอย่างที่มีสองจุด เช่น ตัวอย่างที่ 5.9 หมายถึงตัวอย่างที่ 9 ของบทที่ 5 ส่วนชื่อของทฤษฎีบท (หรือทฤษฎีบทประกอบ) นั้น จะกำกับเลขตามชื่อบท และตำแหน่งของทฤษฎีบท เช่น ทฤษฎีบทที่ 2.1 จะหมายถึง ทฤษฎีบทที่หนึ่ง ของบทที่ 2 ส่วนในการกำกับเลขสมการ (หรืออสมการ หรือข้อความที่ต้องการเน้น) จะมีอยู่ด้วยกันสามแบบ ซึ่งจะกำกับตัวเลขโดยขึ้นกับการปรากฏอยู่ ณ ที่ใด กล่าวคือ ในแบบที่หนึ่งจะเป็นตัวเลขสองตัว (โดยจะเป็นตัวเลขที่อยู่ในเนื้อหาของบท แต่ไม่ได้อยู่ในตัวอย่างใด ๆ) เช่น (x,y) หมายความว่า เป็นสมการที่ y ของบทที่ x ส่วนในแบบที่สองเช่น (x,y,z) จะเป็นการกล่าวถึง สมการที่ z ในตัวอย่างที่ x,y และในแบบสุดท้ายนั้นจะอยู่ในรูป x,y,z,w ซึ่งคือสมการ w และอยู่ในตัวอย่างที่ x,y,z ซึ่งเป็นกรณีที่บทที่ x มีหัวข้อย่อย x,y นั้นเอง

สำหรับข้อความในวงเล็บหลังชื่อของตัวอย่างนั้น หมายถึงตัวอย่างของที่มาของโจทย์ซึ่งสามารถเปิดดูชื่อเต็มได้ที่หน้า บัญชีที่มาของโจทย์ (หน้าที่ 400) ได้

ISBN 974-93130-8-9

ผู้เขียน

สงวนลิขสิทธิ์

ครุภัณฑ์ เรื่องสิทธิบัตร

จัดพิมพ์โดย มูลนิธิ สอวน.

วท.บ.(คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิมพ์ครั้งแรก พ.ศ. 2548 (2005)

วท.ม.(คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ออกแบบปก หน้ารองปก

วท.ค.(คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดย ศาสตราจารย์ศักดิ์ดา ศิริพันธุ์

นายวัชรพล พิมพ์เจริญ

ศิลปกรรม: นายปรีชา นัฏระเนตร

วท.บ.(คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิมพ์ที่ บริษัทด้านสุทธาการพิมพ์ จำกัด

วท.ม.(คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แยกสี เฟลท บริษัทโอเลฟแวนด์เลอร์ส จำกัด

คำนำ

ส่วนที่ 1 อสมการ			
บทที่	1	พื้นฐานของอสมการ	1
บทที่	2	อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต	18
	2.1	อสมการ AM-GM	18
	2.2	อสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก	45
บทที่	3	อสมการ Cauchy-Schwarz	50
บทที่	4	ฟังก์ชันนูน และอสมการ Jensen	61
บทที่	5	อสมการว่าด้วยการจัดเรียง	73
บทที่	6	พหุนามสมมาตร	82
บทที่	7	พหุนามเอกพันธ์	95
บทที่	8	อสมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน	102
บทที่	9	อสมการที่เกี่ยวข้องกับการนับ	117
	9.1	หลักการรังนกพิราบ	117
	9.2	การอุปนัย	123
	9.3	การนับเชิง Combinatorics	134
บทที่	10	อสมการที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพิเศษของฟังก์ชัน	141
	10.1	อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันพีชคณิต	141
	10.2	อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ	153
บทที่	11	อสมการประเภทอื่น ๆ	161
	11.1	อสมการที่เกี่ยวกับลำดับ	161
	11.2	อสมการที่เกี่ยวกับการหาค่า	168
	11.3	อสมการที่เกี่ยวกับเมทริกซ์	173

ส่วนที่ 2 สมการเชิงฟังก์ชัน			
บทที่	1	ฟังก์ชัน	177
	1.1	สมบัติพื้นฐาน	177
	1.2	ฟังก์ชันต่อเนื่อง	182
	1.3	ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม	185
	1.4	ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียลและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	188
บทที่	2	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชัน	190

	2.1	พื้นฐานทั่วไป	190
	2.2	วิธีการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน	192
		2.2.1 การแทนค่า	193
		2.2.2 การเปลี่ยนตัวแปร	195
		2.2.3 การอุปนัย	199
		2.2.4 การใช้สมบัติพิเศษบางประการของฟังก์ชัน	201
		2.2.5 การแยกตัวแปรออกจากกัน	207
		2.2.6 การใช้เอกลักษณ์	209
		2.2.7 การตรวจพินิจ	213
	2.3	สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี	219
	2.4	สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต	230
บทที่ 3		สมการเชิงฟังก์ชัน ที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม	237
	3.1	โดเมนเป็น เซตของจำนวนนับ หรือเซตของจำนวนเต็มไม่ติดลบ	237
	3.2	ความสัมพันธ์เวียนเกิด	266
	3.3	สมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม	277
	3.4	โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม	288
บทที่ 4		สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง	299
	4.1	โดเมนเป็นเซตของจำนวนตรรกยะ	300
	4.2	โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง หรือช่วง	307
	4.3	สมการเชิงฟังก์ชันที่มีคำตอบเป็นพหุนาม	355
บทที่ 5		เบ็ดเตล็ด	375
		บรรณานุกรม	398
		บัญชีสัญลักษณ์	399
		บัญชีที่มาของโจทย์	400
		ดัชนี	401

ส่วนที่ 1
อสมการ
(Inequalities)



Jensen

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

บทที่ 1

พื้นฐานของอสมการ

อสมการที่เป็นอสมการมาตรฐานสากลที่สำคัญมีอยู่หลายรูปแบบ เช่น อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต อสมการของ Cauchy-Schwarz และ อสมการของ Jensen ก่อนที่จะทำการศึกษา พิสูจน์ หรือเรียนรู้วิธีการในการแก้ อสมการ หรือ นำอสมการมาตรฐานดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ (นอกเหนือจากที่เคยพบมาแล้วในหนังสือเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย) จะขอทบทวน สมบัติพื้นฐานบางประการของอสมการ และ หลักการพื้นฐานในการพิสูจน์ หรือ แก้โจทย์อสมการโดยทั่วไป

ทฤษฎีบทที่ 1.1 กำหนดให้ a b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a + c < b + c$ แล้ว $a < b$
4. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

ทฤษฎีบทที่ 1.2 ให้ a b c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
2. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d < b - c$
3. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
4. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd$
5. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
6. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

ทฤษฎีบทที่ 1.3 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < a < b$

1. $a^n < b^n$ สำหรับทุกจำนวน $n \in \mathbb{R}^+$

2. $a^n > b^n$ สำหรับทุกจำนวน $n \in \mathbb{R}^+$

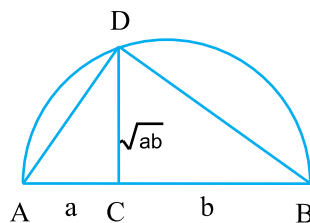
ทฤษฎีบทที่ 1.4 ให้ a , n และ m เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a > 0$ และ $n < m$

1. ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^n < a^m$
2. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^n > a^m$

การพิสูจน์ข้อความในรูปอสมการหรือการแก้สมการในตัวแปร x ไม่มีหลักเกณฑ์เฉพาะเจาะจง แต่จะมีหลักการพื้นฐานที่สำคัญคือ การจัดรูปทางพีชคณิต หรือ การพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < a \leq b$ จงแสดงว่า $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

วิธีทำ วิธีที่ 1 พิสูจน์โดยการพิจารณาความหมายทางเรขาคณิต



ให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของครึ่งวงกลมที่มีความยาว $a+b$

C เป็นจุดที่ทำให้ $AC = a$, $CB = b$

และ D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งเส้นตรง DC ตั้งฉากกับ AB ที่จุด C

จะได้ว่า $\triangle ACD \sim \triangle CDB$

$$\text{ดังนั้น } \frac{a}{CD} = \frac{CD}{b} \quad \therefore (CD)^2 = ab$$

$$\text{นั่นคือ } CD = \sqrt{ab}$$

$$\text{เนื่องจาก } CD \leq \text{รัศมีของวงกลม} = \frac{a+b}{2} \quad \text{ดังนั้น } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

วิธีที่ 2 พิสูจน์โดยการจัดรูปทางพีชคณิต

$$\text{เนื่องจาก } 0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

จากการพิสูจน์ทั้งสองวิธีพบว่า อสมการจะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $a = b$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

วิธีทำ วิธีที่ 1 พิสูจน์โดยการทำย้อนกลับจากสิ่งที่ต้องการ

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

คูณตลอดทั้งอสมการด้วย 2 จะได้สมการต่อไปนีสมมูลกัน

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ca + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$$

ซึ่งอสมการสุดท้ายเป็นจริงเสมอ ดังนั้น อสมการที่ต้องการเป็นจริงด้วย

วิธีที่ 2 ในบางครั้งการพิสูจน์ข้อความในรูปอสมการ อาจจะใช้นิยามเริ่มต้นของอสมการคือ

$$A \leq B \text{ สมมูลกับ } A - B \leq 0$$

เนื่องจากอสมการมีความสมมาตรในตัวแปร a, b และ c ดังนั้นเราสามารถสมมติให้ $a \geq b \geq c$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= a(a - b) + b(b - c) - c(a - c) \\ &= a(a - b) + b(b - c) - c(a - b + b - c) \\ &= a(a - b) + b(b - c) - c(a - b) - c(b - c) \\ &= (a - c)(a - b) + (b - c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

นอกจากนี้จากการพิสูจน์ทั้งสองวิธีจะได้ว่า อสมการจะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a = b = c$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ จงพิสูจน์ว่า $\cos^2 x + x \sin x < 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2 - \cos^2 x - x \sin x &= 2 - (1 - \sin^2 x) - x \sin x \\ &= 1 + \sin^2 x - x \sin x \\ &= 1 - 2 \sin x + \sin^2 x + 2 \sin x - x \sin x \\ &= (1 - \sin x)^2 + (2 - x) \sin x \end{aligned}$$

เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2} < 2$ จะได้ว่า $2 - x > 0$ และ $\sin x > 0$

ดังนั้น $2 - \cos^2 x - x \sin x > 0$

ทำให้ได้ว่า $\cos^2 x + x \sin x < 2$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 \leq a, b, c \leq 1$ จงแสดงว่า

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \quad (1.4.1)$$

วิธีทำ การกระจายพจน์ทางขวามือของอสมการโดยตรงจะได้รูปพีชคณิตที่ยุ่งยากมาก ดังนั้นโดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ จะได้ว่า

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{a+b+1} + \frac{c}{a+b+1} = \frac{a+b+c}{a+b+1}$$

และถ้าเราพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \quad (1.4.2)$$

อสมการ (1.4.1) ที่ต้องการก็เป็นจริงด้วย

อสมการ (1.4.2) อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นแต่ก็ยังคงยุ่งยาก และอาจจะไม่จริงเพราะเราลดรูปลงทำให้เกิดการตัดทอนค่อนข้างมาก อย่างไรก็ตามลองพิจารณาอสมการ (1.4.2) ว่าเป็นจริงหรือไม่

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) &= \frac{a+b+1}{a+b+1} + \frac{c-1}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \\ &= 1 - \frac{1-c}{a+b+1} [1 - (1+a+b)(1-a)(1-b)] \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } 0 &\leq (1+a+b)(1-a)(1-b) \leq (1+a+b+ab)(1-a)(1-b) \\ &= (1+a)(1+b)(1-a)(1-b) = (1-a^2)(1-b^2) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{และ } 0 \leq \frac{1-c}{a+b+1} \leq 1$$

นั่นคืออสมการ (1.4.2) เป็นจริง ดังนั้นอสมการ (1.4.1) เป็นจริงด้วย

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a_i \geq 1$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{จงแสดงว่า } (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1} (1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

วิธีทำ การพิสูจน์สามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน n ก็เป็นวิธีหนึ่งแต่วิธีจัดรูปพีชคณิตต่อไปนี้จะดูง่ายกว่ามาก

$$\begin{aligned} (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &= 2^n \left(\frac{1+a_1}{2} \right) \left(\frac{1+a_2}{2} \right) \cdots \left(\frac{1+a_n}{2} \right) \\ &= 2^n \left(1 + \frac{a_1-1}{2} \right) \left(1 + \frac{a_2-1}{2} \right) \cdots \left(1 + \frac{a_n-1}{2} \right) \\ &\geq 2^n \left(1 + \frac{a_1-1}{2} + \frac{a_2-1}{2} + \cdots + \frac{a_n-1}{2} \right) \\ &\geq 2^n \left(1 + \frac{a_1-1}{n+1} + \frac{a_2-1}{n+1} + \cdots + \frac{a_n-1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2^n}{n+1} (1+a_1+a_2+\cdots+a_n) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของ $\frac{1}{k!}$ ใน (1.6.1) และ (1.6.2) จะได้ว่า เมื่อ $k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) &< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

ดังนั้น

ตัวอย่าง 1.7 (Canadian MO 1979) ให้

- (i) $a, b \in \mathbb{R}^+$
- (ii) a, A_1, A_2, b เป็นลำดับเลขคณิต
- (iii) a, G_1, G_2, b เป็นลำดับเรขาคณิต

จงแสดงว่า $A_1 A_2 \geq G_1 G_2$

วิธีทำ จาก (ii) ได้ $A_1 = a + \frac{b-a}{3}$, $A_2 = a + \frac{2(b-a)}{3}$

ดังนั้น

$$A_1 A_2 = ab + \frac{2(b-a)^2}{9}$$

จาก (iii) ได้

$$G_1 = a \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}, \quad G_2 = a \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$$

ดังนั้น $G_1 G_2 = ab$

เพราะฉะนั้น

$$A_1 A_2 - G_1 G_2 = \frac{2(b-a)^2}{9} \geq 0$$

ตัวอย่าง 1.8 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกที่มีสมบัติว่า $abc = 1$ และให้

$$S(x, y) := \frac{a^x b^x}{a^y + b^y + a^x b^x} + \frac{b^x c^x}{b^y + c^y + b^x c^x} + \frac{c^x a^x}{c^y + a^y + c^x a^x} \quad (x, y > 0)$$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x \leq 2y$ แล้ว $S(x, y) \leq 1$ และถ้า $x > 2y$ แล้ว $S(x, y) \geq 1$

วิธีทำ สังเกตว่า

$$a^y + b^y = a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} \{a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3}\} + \{a^{(2y-x)/3} - b^{(2y-x)/3}\} \{a^{(x+y)/3} - b^{(x+y)/3}\}$$

ถ้า $x \leq 2y$ แล้ว

$$a^y + b^y = a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} \{a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3}\}$$

ซึ่งให้ว่า

$$\begin{aligned} S(x, y) &\leq \sum \frac{a^x b^x}{a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} (a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3}) + a^x b^x} \\ &= \sum \frac{1}{a^{(y-2x)/3} b^{(y-2x)/3} (a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3}) + 1} \\ &= \sum \frac{c^{(y-2x)/3}}{a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3} + c^{(y-2x)/3}} = 1 \end{aligned}$$

ถ้า $x > 2y$ แล้ว $a^y + b^y \leq a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} \{a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3}\}$ ข้อโต้แย้งเช่นในกรณีที่แล้ว ยังใช้ได้เพียงแต่อสมการกลับทิศทาง

ตัวอย่าง 1.9 จงพิสูจน์ว่า $(x^3 + x^2 + 3)^2 > 4x^3(x-1)^2$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

วิธีทำ กรณีที่ $x \leq 0$ อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน จากนั้นไปพิจารณาเพียง $x > 0$

เนื่องจาก $\{p(x) + q(x)\}^2 \geq 4p(x)q(x)$ สำหรับทุก $p(x), q(x)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (x^3 + x^2 + 3)^2 &= (x^3 + 2x + 2 + x^2 - 2x + 1)^2 \\ &\geq 4(x^3 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 1) \\ &> 4x^3(x-1)^2 \end{aligned} \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 1.10 ให้ u, v เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับอสมการ $u^2 < c^2$ และ $v^2 < c^2$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \right)^2 < c^2$$

วิธีทำ $\{(u+v)(1 + uv/c^2)^{-1}\}^2 < c^2 \Leftrightarrow (u+v)^2 < c^2(1 + uv/c^2)^2$

$$\Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 < c^2(1 + 2uv/c^2 + u^2 v^2 / c^4) = c^2 + 2uv + \frac{u^2 v^2}{c^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow c^2 u^2 + c^2 v^2 < c^4 + u^2 v^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < c^4 + u^2 v^2 - c^2 u^2 - c^2 v^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < (c^2 - u^2)(c^2 - v^2)
\end{aligned}$$

อสมการทำนี้เป็นจริง จากสมมุติฐานที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 1.11 (AMOC 1997) ให้ m, n เป็นจำนวนนับ > 1 จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} > 1$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีทวินาม ได้ว่า $(1+x)^m > 1+mx$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x ซึ่งให้ว่า

$$\left(1 + \frac{n}{m}\right)^m > 1 + n$$

ดังนั้น $\sqrt[m]{n+1} < 1 + \frac{n}{m}$ ในทำนองเดียวกัน ได้

$$\sqrt[n]{m+1} < 1 + \frac{n}{m}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} > \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$$

ตัวอย่าง 1.12 ถ้า $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ แล้ว จงแสดงว่า $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^4 > 0$ เมื่อ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ดังนั้น อสมการที่ต้องการสมมูลกับอสมการ

$$x^{12} - x^9 - x^3 + 1 \geq 0$$

อสมการหลังนี้เป็นจริง เพราะ

$$\begin{aligned}
x^{12} - x^9 - x^3 + 1 &= x^9(x^3 - 1) - (x^3 - 1) = (x^3 - 1)(x^9 - 1) = (x^3 - 1)^2(x^6 + x^3 + 1) \\
&= (x^3 - 1)^2 \left\{ \left(x^3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \geq 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.13 ให้ $x_1, x_2, \dots, x_6 \in [0, 1]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \dots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + 5} \leq \frac{3}{5}$$

วิธีทำ เงื่อนไข $x_1, x_2, \dots, x_6 \in [0, 1]$ หมายความว่า นิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการที่ต้องการมีค่า

$$\leq \frac{x_1^3}{x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_6^5 + 4} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_6^5 + 4} + \dots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_6^5 + 4}$$

$$= \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_6^5 + 4} \leq \frac{3}{5}$$

อสมการสุดท้ายเป็นจริง เพราะ $3t^5 + 2 \geq 5t^3 \Leftrightarrow (t-1)^2(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2) \geq 0$ สำหรับทุก $t \geq 0$

ตัวอย่าง 1.14 จงแสดงว่า $\frac{1}{2} \leq \frac{a(c-d) + 2d}{b(d-c) + 2c} \leq 2$ สำหรับทุกจำนวนจริง $a, b, c, d \in [1, 2]$

วิธีทำ เราแยกการพิจารณาออกเป็นสองกรณี

- กรณี $c - d \geq 0$ อสมการที่ต้องการ เป็นผลตามมาโดยตรงจากกลุ่มของอสมการต่อไปนี้
$$2 \leq 2d \leq a(c-d) + 2d \leq 2(c-d) + 2d = 2c \leq 4$$

$$4 \geq 2c \geq b(d-c) + 2c \geq 2(d-c) + 2c = 2d \geq 2$$
- กรณี $c - d < 0$ เป็นไปในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.15 จงพิสูจน์ว่า $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq 2(x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2})$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x, y, z ที่มีสมบัติว่า $xyz = 1$

วิธีทำ เมื่อใช้เงื่อนไข $xyz = 1$ ได้ว่า $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 2(x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2})$
 $= (x^2 + 1/x - 2x^{1/2}) + (y^2 + 1/y - 2y^{1/2}) + (z^2 + 1/z - 2z^{1/2})$
 $= (x^{3/2} - 1)^2/x + (y^{3/2} - 1)^2/y + (z^{3/2} - 1)^2/z \geq 0$

ตัวอย่าง 1.16 (APMO 1991) ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$$

จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k$

วิธีทำ เพื่อความสะดวก กำหนดสัญลักษณ์ $\sum x$ แทน $\sum_{k=1}^n x_k$ ดังนั้น อสมการที่ต้องการพิสูจน์เขียนได้ในรูป

$$\sum \frac{x^2}{x+y} \geq \frac{1}{2} \sum x \quad \text{ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า } \sum x = \sum y \quad \text{เมื่อ } x, y > 0$$

พิจารณา

$$\sum \frac{x^2}{x+y} = \sum \frac{x^2 + xy - xy}{x+y} = \sum x - \sum \frac{xy}{x+y} \geq \frac{1}{2} \sum x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum x \geq \sum \frac{xy}{x+y}$$

อสมการสุดท้ายนี้เป็นจริง เพราะว่าจาก $(x-y)^2 \geq 0$ ได้ $(x+y)^2 \geq 4xy$ ซึ่งให้ว่า

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{1}{4}(x+y)$$

เพราะฉะนั้น $\sum \frac{xy}{x+y} \leq \frac{1}{4} \sum (x+y) = \frac{1}{4} (2 \sum x) = \frac{1}{2} \sum x$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.17 จงพิสูจน์ว่า ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า $a < b + c$ แล้ว

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} - \frac{a}{1+a} &= \frac{b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b) - a(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{abc + 2bc + b + c - a}{(1+a)(1+b)(1+c)} > \frac{abc + 2bc}{(1+a)(1+b)(1+c)} > 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.18 ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \\ &= 3 - (a+b+c)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.19 ถ้า $x_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$x_n^n \geq x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2) \dots \{nx_n - (n-1)x_{n-1}\}$$

วิธีทำ ขั้นแรก เราจะพิสูจน์ว่า ถ้า $x_k \geq 0$ แล้ว

$$x_k^k \geq \{kx_k - (k-1)x_{k-1}\}x_{k-1}^{k-1} \quad (1.19.1)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_k = x_{k-1}$

ถ้า $x_k \geq x_{k-1}$ แล้ว $x_k^{k-1} + x_k^{k-2}x_{k-1} + x_k^{k-3}x_{k-1}^2 + \dots + x_{k-1}^{k-1} \geq kx_{k-1}^{k-1}$ แต่ถ้า $x_k \leq x_{k-1}$ แล้ว อสมการดังกล่าวนี้ กลับข้าง ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม เราได้ว่า

$$x_k^k - x_{k-1}^k \geq kx_{k-1}^{k-1}(x_k - x_{k-1}) \quad (1.19.2)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_k = x_{k-1}$ จากนี้เห็นชัดเจนว่า (1.19.1) เป็นผลตามมาโดยตรงจาก (1.19.2)

ขั้นต่อไป แทนค่า $k = n, n-1, \dots, 2$ ใน (1.19.1) ตามลำดับ แล้วจัดรูป ได้

$$x_n^n \geq x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2) \dots \{nx_n - (n-1)x_{n-1}\} \quad (1.19.3)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_k = x_{k-1}$ ($k = 2, \dots, n$)

ตัวอย่าง 1.20 จงพิสูจน์ว่า $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_n} \leq n-1 + 2^{a_1+a_2+\dots+a_n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ≥ 2

และ $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$

วิธีทำ เมื่อ $n = 2$ อสมการคือ $2^{a_1} + 2^{a_2} \leq 1 + 2^{a_1+a_2}$ ซึ่งสมมูลกับ $(1 - 2^{a_1})(1 - 2^{a_2}) \geq 0$

อสมการหลังนี้เป็นจริงอย่างชัดเจน สมมุติว่าสมการที่ต้องการพิสูจน์ เป็นจริง เมื่อ $n = k$ ดังนั้น

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{k+1}} \leq k - 1 + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_k} + 2^{a_{k+1}} \leq k + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}$$

ตัวอย่าง 1.21 (Canadian MO 1978, AMOC 1985) ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า $x + y + z = 5$,

$xy + yz + zx = 3$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$

วิธีทำ จาก $x + y + z = 5$ ได้ $(x + y)^2 = (5 - z)^2$

จาก $xy + yz + zx = 3$ ได้ $xy = 3 - z(x + y) = 3 - z(5 - z)$

ดังนั้น

$$0 \leq (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = (5 - z)^2 - 4[3 - z(5 - z)] = -3z^2 + 10z + 13 = (13 - 3z)(1 + z)$$

ซึ่งให้ว่า $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.22 ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_0$ มีสมบัติว่า

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j x_k)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.22.1)$$

เมื่อผลบวกทั้งสองกระทำเหนือทุกตรรกะ 1, 2, ..., n อย่างสมมาตร ครบทุกตรรกะนี้

(i) จงหาค่าสูงสุดของ $\sum_{k=1}^n x_k$

(ii) จงพิสูจน์หรือแสดงให้เห็นว่าเป็นเท็จว่าค่าต่ำสุดของ $\sum x_k$ คือ $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2}$

วิธีทำ (i) สมการ (1.22.1) ที่กำหนดให้ เป็นจริงเมื่อ $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ ดังนั้น ค่าสูงสุดของ $\sum_{k=1}^n x_k$ จึง $\geq n$

จากอสมการ $2t - t^2 \leq 1$ ($t \in \mathbb{R}$) ได้ว่า

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}^2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \{ (x_j x_k)^2 - (x_j x_k)^2 \} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j x_k)^2 \leq \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} 1 = n^2 \end{aligned}$$

ซึ่งให้ $\sum_{k=1}^n x_k \leq n$

ดังนั้นค่าสูงสุดของ $\sum_{k=1}^n x_k$ คือ n

(ii) เมื่อ $n = 1$ เห็นได้ชัดเลยว่า ค่าต่ำสุดของ $\sum_{k=1}^n x_k$ คือ 1

เมื่อ $n = 2$ จากเงื่อนไข $x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 = 3$ ได้ว่า

$$x_1 x_2 \leq \sqrt{3} < 2$$

ซึ่งให้ว่า

$$(x_1 + x_2)^2 = 3 + x_1 x_2 (2 - x_1 x_2) \geq 3$$

กล่าวคือ $x_1 + x_2 \geq \sqrt{3}$

เนื่องจากอสมการนี้เป็นสมการ เมื่อ $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 0$ จึงได้ว่าค่าต่ำสุดของ $\sum_{k=1}^n x_k$ คือ $\sqrt{3}$

เมื่อ $n = 3$ สมมติว่า $\max \{x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3\} > 2$

ถ้า $x_1 x_2 > 2$ แล้ว

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2(x_1 x_2)^{1/2} > 2\sqrt{2} > \sqrt{6}$$

ไม่เช่นนั้น จะได้ว่า

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 6 + x_1 x_2 (2 - x_1 x_2) + x_1 x_3 (2 - x_1 x_3) + x_2 x_3 (2 - x_2 x_3) \geq 6$$

กล่าวคือ $x_1 + x_2 + x_3 \geq \sqrt{6}$

เนื่องจาก อสมการนี้เป็นสมการ เมื่อ $x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = x_3 = 0$ ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ $\sum_{k=1}^n x_k$ คือ $\sqrt{6}$

ในกรณีที่ $n \geq 4$ เราจะแสดงว่าอสมการที่อ้างถึงไม่เป็นจริง

สังเกตว่าสมการ (1) เป็นจริงเมื่อ $x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{2n(n+1)+4} - 2 \}}$, $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$

อย่างไรก็ตาม

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sqrt{2 \{ \sqrt{2n(n+1)+4} - 2 \}} < \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^{1/2}$$

ทั้งนี้ เพราะ อสมการท้ายนี้ ลดรูปเป็น $n(n+1) > 16$ ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $n \geq 4$

ตัวอย่าง 1.23

(APMO 1993) ให้ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ และ $g(x) = c_{n+1} x^{n+1} + c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$

เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามศูนย์ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับ $g(x) = (x-r)f(x)$ สำหรับบาง $r \in \mathbb{R}$

ถ้า $a = \max \{ |a_n|, \dots, |a_0| \}$, $c = \max \{ |c_{n+1}|, \dots, |c_0| \}$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{c} \leq n+1$

วิธีทำ แยกการพิจารณาเป็นสองกรณี

- กรณีที่หนึ่ง $|r| \leq 1$:

สัมประสิทธิ์ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ ของ $f(x) = \frac{g(x)}{x-r}$ มีค่าเท่ากับ $c_{n+1}, rc_{n+1} + c_n, \dots, r^n c_{n+1} + \dots + c_1$

ดังนั้น $a \leq (n+1)c$

- กรณีที่สอง $|r| > 1$: ให้ $y = \frac{1}{x}$

$$\text{ดังนั้น } (y - \frac{1}{r})(a_0 y^n + \dots + a_n) = -\frac{c_0}{r} y^{n+1} - \dots - \frac{c_{n+1}}{r}$$

สังเกตว่า $\left| \frac{1}{r} \right| < 1$ เมื่อใช้ผลของกรณีที่แล้ว ได้ว่า

$$a \leq (n+1) \frac{c}{|r|} < (n+1)c$$

ตัวอย่าง 1.24 ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}_0$ จงพิสูจน์ว่า $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

วิธีทำ $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \Leftrightarrow 4(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ ซึ่งเป็นจริงเสมอ

ตัวอย่าง 1.25 ให้ $a \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$

วิธีทำ $3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 = (1-a)^2 + (a-a^2)^2 + (a^2-1)^2 \geq 0$

ตัวอย่าง 1.26 (AMOC 1981) ให้ $n \in \mathbb{N}$, a และ $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $a^{n+1} \leq x \leq 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$P(x) := \frac{(x-a)(x-a^2) \cdots (x-a^n)}{(x+a)(x+a^2) \cdots (x+a^n)} \leq \frac{(1-a)(1-a^2) \cdots (1-a^n)}{(1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^n)} := P$$

วิธีทำ ถ้า $x = a^j$ สำหรับบาง j แล้ว

$$P(x) = 0 < P(1) = P$$

ถ้า $0 < a < x \leq 1$ แล้ว สำหรับ จำนวนจริง b ใด ๆ ที่ $b < x$ จะได้ว่า

$$0 < \frac{x-b}{x+b} = 1 - \frac{2b}{x+b} \leq 1 - \frac{2b}{x+a} = \frac{1-b}{1+a}$$

ดังนั้น $P(x) \leq P$

ถ้า $a^{n+1} \leq x < a$ แล้ว จะมี j เพียงหนึ่งเดียวในช่วง $0 \leq j \leq n$ ที่ทำให้ $a^{j+1} < x < a^j$

สังเกตว่าในนิพจน์ที่โจทย์ให้พิจารณา แต่ละพจน์ต่อไปนี้เป็นลบ $\frac{x-a}{x+a}, \dots, \frac{x-a^i}{x+a^i}$ ในขณะที่พจน์ที่เหลือเป็น

บวก ดังนั้น ผลคูณจะเป็นลบ เมื่อ j เป็นคี่ และเป็นบวก เมื่อ j เป็นคู่

ดังนั้น จึงเพียงพอที่จะพิจารณา กรณีที่ j เป็นคี่ ซึ่งได้ว่า

$$0 < \prod_{r=1}^j \frac{x-a^r}{x+a^r} = \prod_{r=1}^j \frac{a^r - x}{a^r + x} < \prod_{r=1}^j \frac{a^r - a^{j+1}}{a^r + a^{j+1}} = \prod_{r=1}^j \frac{1-a^{j+1-r}}{1+a^{j+1-r}} = \prod_{r=1}^j \frac{1-a^r}{1+a^r}$$

เนื่องจาก $0 < \prod_{r=j+1}^n \frac{x-a^r}{x+a^r} < \prod_{r=j+1}^n \frac{1-a^r}{1+a^r}$ เมื่อคูณด้วยจำนวนบวกสองจำนวน จะได้ผลที่ต้องการ

สังเกตว่า เงื่อนไข $a^{n+1} \leq x$ ถูกใช้ในกรณีที่ $j = n$

ตัวอย่าง 1.27 (IMO 1972) จงหาคำตอบทั้งหมด $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ของระบบอสมการ

$$\begin{aligned}(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0 \\(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0 \\(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0 \\(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0 \\(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0\end{aligned}$$

วิธีทำ สังเกตว่าแต่ละอสมการของโจทย์อยู่ในรูป

$$(x_i^2 - x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \leq 0$$

เมื่อตรรกะนี้ อ่านแบบ modulo 5 กล่าวคือ $x_{j+5} = x_j$ ถ้าเราคูณกระจายแต่ละนิพจน์ทางซ้ายมือ แล้วบวกอสมการ

เหล่านี้เข้าด้วยกัน จะได้ทั้งสิ้น $\binom{5}{4} = 10$ พจน์ ที่อยู่ในรูป $x_i^2 x_j^2$ ($i \neq j$) ปรากฏในผลบวก รวมกับพจน์ไขว้ 5 พจน์ใน

รูป $-x_i^2 x_{i+1}x_{i+3}$ และมีอีก 5 พจน์ในรูป $-x_i^2 x_{i+2}x_{i+4}$ เหล่านี้แนะนำผลบวก น่าจะเขียนได้เป็นผลบวกของกำลังสองในรูป

$\frac{1}{2} \{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2\}$ โดยที่แต่ละพจน์ไขว้ เราจับคู่กับ y

ยกตัวอย่างเช่น พจน์ไขว้ $x_2^2 x_3x_5$ จับคู่กับ $y_1 = x_2x_3 - x_2x_5$ เพราะทราบว่า พจน์ $x_2^2 x_3^2, x_2^2 x_5^2$ ที่ปรากฏอยู่ใน y_1^2 ปรากฏในผลบวกด้วย ดังนั้น จะได้การแทนเป็นผลบวกของอสมการเหล่านี้เป็น

$$0 \geq \sum_{i=1}^5 (x_i^2 - x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \{(x_i x_{i+1} - x_i x_{i+3})^2 + (x_{i-1} x_{i+1} - x_{i-1} x_{i+3})^2\}$$

เนื่องจากผลบวกของกำลังสอง ไม่เป็นลบ เราสรุปได้ว่า มันต้องเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่า แต่ละพจน์เป็นศูนย์ สิ่งนี้ชี้ว่า $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ กล่าวคือ ทุกเซตของจำนวนบวกเป็นคำตอบของระบบอสมการที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 1.28 (USAMO 1999) ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 3$) เป็นจำนวนจริง ที่มีสมบัติว่า

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad \text{และ} \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2$$

จงพิสูจน์ว่า $\max \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2$

วิธีทำ ให้ $b_i = 2 - a_i$ ($i = 1, \dots, n$), $S := b_1 + \dots + b_n$, $T := b_1^2 + \dots + b_n^2$

ดังนั้น เงื่อนไขทั้งสองของโจทย์ คือ

$$(2 - b_1) + \dots + (2 - b_n) \geq n \quad \text{และ} \quad (4 - 4b_1 + b_1^2) + \dots + (4 - 4b_n + b_n^2) \geq n^2$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$S \leq n \quad \text{และ} \quad T \geq n^2 - 4n + 4S$$

เมื่อใช้อสมการคู่นี้ พร้อมกัน ได้

$$T \geq n^2 - 4n + 4S \geq (n - 4)S + 4S = nS$$

ในทำนองกลับกัน ถ้า $b_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) แล้ว

$$b_i < b_1 + \dots + b_n = S \leq n$$

ดังนั้น

$$T \leq b_1^2 + \dots + b_n^2 < nb_1 + \dots + nb_n = nS$$

ซึ่งชี้ว่าเป็นไปไม่ได้ที่ $b_i > 0$ สำหรับทุก i ดังนั้น มีบาง i ที่ให้ $b_i \leq 0$ กล่าวคือ $a_i \geq 2$ สำหรับ i ค่านี้ ซึ่งคือสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 1.29 (USAMO 1997) สำหรับทุกจำนวนจริงบวก a, b, c

จงพิสูจน์ว่า $(a^3 + b^3 + abc)^{-1} + (b^3 + c^3 + abc)^{-1} + (c^3 + a^3 + abc)^{-1} \leq (abc)^{-1}$

วิธีทำ จากอสมการ $(a-b)(a^2 - b^2) \geq 0$ ได้ว่า $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

ดังนั้น

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b) + abc} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(b+c) + abc} = \frac{a}{abc(a+b+c)}$$

และ

$$\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ca(c+a) + abc} = \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

เมื่อบวกอสมการทั้งสามนี้เข้าด้วยกัน ได้

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.30 (AMOC 1997) ให้ $a_1, a_2, \dots, a_k$ เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$

(ii) $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$

จงพิสูจน์ว่า $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \frac{1}{k}$ สำหรับ $n = 1, 2, \dots, k$

วิธีทำ สังเกตว่าสำหรับแต่ละ i ในช่วง $1 \leq i \leq k$ จากเงื่อนไข (i) ได้ว่า $a_1 + \dots + a_i \leq ia_{i+1}$

ดังนั้น

$$(i+1)(a_1 + \dots + a_i) \leq i(a_1 + \dots + a_{i+1})$$

กล่าวคือ

$$\frac{a_1 + \dots + a_i}{i} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{i+1}}{i+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{a_1}{1} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \dots \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \dots \leq \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} = \frac{1}{k}$$

ตัวอย่าง 1.31 (USAMO1991) ให้ $a = \frac{m^{m+1} + n^{n+1}}{m^m + n^n}$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนนับ

จงพิสูจน์ว่า $a^m + a^n \geq m^m + n^n$

วิธีทำ ให้ N เป็นจำนวนนับที่ $a \neq N$ ดังนั้น

$$\frac{a^N - N^N}{a - N} = a^{N-1} + a^{N-2}N + \dots + N^{N-1}$$

ถ้า $0 \leq a < N$ แล้ว $\frac{a^N - N^N}{a - N} \leq N^N$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a > N$ แล้ว $\frac{a^N - N^N}{a - N} \geq N^N$

ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม เราได้ว่า

$$a^N - N^N \geq (a - N)N^N \quad (1.31.1)$$

อสมการนี้เป็นจริงเมื่อ $a = N$ ด้วย ดังนั้น (1.31.1) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $N \geq 0$

เมื่อใช้ (1.31.1) สังเกตว่า

$$\begin{aligned} (a^m + a^n) - (m^m + n^n) &= (a^m - m^m) + (a^n - n^n) \geq (a - m)m^m + (a - n)n^n \\ &= a(m^m + n^n) - (m^{m+1} + n^{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.32 (Canadian MO 1971) ให้ $x, y \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $x + y = 1$ จงแสดงว่า

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 < x < 1$ จึงได้ว่า

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) \geq 9 \Leftrightarrow (x+1)(1-x+1) \geq 9x(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 9x - 9x^2$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0 \quad \text{ซึ่งเห็นชัดเจนว่าเป็นจริง}$$

ตัวอย่าง 1.33 (Canadian MO 1972) ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0$ นิยาม M เป็นผลบวกของทุกผลคูณ $a_i a_j$ เมื่อ $i < j$

กล่าวคือ $M = a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_n) + a_2(a_3 + a_4 + \dots + a_n) + \dots + a_{n-1}a_n$

จงพิสูจน์ว่า กำลังสองของอย่างน้อยหนึ่งจำนวนจาก $a_1, a_2, \dots, a_n$ มีค่าไม่เกิน $\frac{2M}{n(n-1)}$

วิธีทำ ให้ a เป็นจำนวนค่าน้อยสุดในบรรดา $a_1, a_2, \dots, a_n$ ดังนั้น $a_i a_j \geq a^2$ และ

$$M = \sum_{i < j} a_i a_j \geq \binom{n}{2} a^2$$

ซึ่งให้ว่า $a^2 \leq M / \binom{n}{2} = \frac{2M}{n(n-1)}$

ตัวอย่าง 1.34 (Canadian MO 1974) ให้ $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$0 \leq a_i \leq a_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ให้ $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนาม

$$\{f(x)\}^2 = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_{2n}x^{2n}$$

จงพิสูจน์ว่า $b_{n+1} \leq \frac{1}{2}\{f(1)\}^2$

วิธีทำ จากการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$b_{n+1} = a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1 \leq a_1a_0 + a_2a_0 + \cdots + a_na_0$$

เมื่อบวกเข้าด้วยกันได้

$$\begin{aligned} 2b_{n+1} &\leq a_1(a_0 + a_n) + a_2(a_0 + a_{n-1}) + \cdots + a_n(a_0 + a_1) \\ &\leq a_1(a_0 + \cdots + a_n) + a_2(a_0 + \cdots + a_n) + \cdots + a_n(a_0 + \cdots + a_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n)(a_0 + \cdots + a_n) \\ &\leq (a_0 + \cdots + a_n)^2 = \{f(1)\}^2 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

- กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a + b + c \geq abc$ จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$
- กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a \neq b$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- จงพิสูจน์ว่า $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$ สำหรับทุกจำนวนจริง a
- กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ จงแสดงว่า $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$
- จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$
- ให้ $Q_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ จงพิสูจน์ว่า
$$\frac{19}{12} - \frac{1}{n+1} < Q_n < \frac{7}{4} - \frac{1}{n} \quad (n \geq 3)$$
- ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$
- เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}_0$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า
$$a^3(b+1) + b^3(a+1) \geq a^2(b+b^2) + b^2(a+a^2)$$

9. จงพิสูจน์ว่า $11 \cdot \sqrt[1994]{10} > 10 + \sqrt[1000]{10}$
10. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว จงแสดงว่า $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq \frac{9}{a+b}$
11. จงพิสูจน์ว่า $\left(1 - \frac{1}{(1993)^3}\right) \left(1 - \frac{1}{(1994)^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1992}{1993}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ≥ 1993
12. จงแก้สมการ $(x^3 + x^2 + 1)^2 > 4x^3(x-1)^2$
13. ให้ $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ จงแสดงว่า
 อสมการ $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} > 0$ เป็นจริง สำหรับทุก n -อันดับ ของจำนวนจริง $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$
 ก็ต่อเมื่อ $a_2 \geq 2$
14. จงหาจำนวนนับ n ที่ทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง
 สำหรับทุก n -อันดับของจำนวนบวก $(a_1, \dots, a_n)$:
- $$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i^3 \geq 6 \prod_{i=1}^n a_i$$
15. ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \right| < \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right|$$

บทที่ 2

อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต (Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality)

2.1 อสมการ AM-GM

กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $x_i \in \mathbb{R}^+$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$ แล้วนิยาม

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) ของ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็น $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ และ

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean) ของ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็น $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$

ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (harmonic mean) ของ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็น $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

ทฤษฎีบทที่ 2.1 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2.1)$$

อสมการ (2.1) เรียกว่า อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต-ฮาร์โมนิก และเพื่อความสะดวกจะขอเรียกย่อๆว่า อสมการ **AM-GM-HM** หรืออสมการ AM-GM ในส่วนหลังและ GM-HM ในส่วนแรก

อสมการ (2.1) จะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) เท่ากันทุกจำนวน

วิธีการพิสูจน์อสมการ AM-GM สามารถทำได้หลายทาง ในที่นี้จะขอเสนอวิธีการพิสูจน์ 2 แบบ

พิสูจน์แบบที่ 1 (Cauchy-Forward & Backward Induction)

เราเริ่มต้นโดยการพิสูจน์ว่าอสมการ AM-GM เป็นจริงสำหรับจำนวนจริงบวกสองจำนวน

จากอสมการ $(y_1 - y_2)^2 \geq 0$ จะได้ว่า $y_1^2 + y_2^2 \geq 2y_1y_2$ สำหรับทุก $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
 แทนค่า $y_1^2 = x_1$ และ $y_2^2 = x_2$ จะได้ว่า

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \quad (2.2)$$

ดังนั้นอสมการ AM-GM เป็นจริงสำหรับจำนวนจริงบวกใดๆสองจำนวนและ จากเงื่อนไขว่า

$$(y_1 - y_2)^2 = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } y_1 = y_2$$

ทำให้ได้ว่าอสมการ (2.2) จะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$

ขั้นต่อมา แทนค่า x_1 ด้วย $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ และ แทนค่า x_2 ด้วย $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$ ใน (2.2) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} &\geq \left[\frac{(x_1 + x_2)}{2} \cdot \frac{(x_3 + x_4)}{2} \right]^{1/2} \\ &\geq \left[(x_1x_2)^{1/2} (x_3x_4)^{1/2} \right]^{1/2} \\ &= (x_1x_2x_3x_4)^{1/4} \end{aligned}$$

ดำเนินการซ้ำเช่นนี้จะทำให้ได้ อสมการ (2.1) เป็นจริง เมื่อ $n = 2, 4, \dots$ นั่นคือ n เป็นกำลังของสอง
 การดำเนินการแบบนี้เรียกว่า **forward induction**

ต่อไปจะใช้วิธีการที่เรียกว่า **backward induction** โดยการแสดงว่า ถ้าอสมการเป็นจริงที่จำนวนจริง n
 จำนวน แล้วจะเป็นจริงที่ $n - 1$ จำนวนด้วย

ให้ $x_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$ โดยที่ $n \geq 2$ และแทนค่า x_n ใน (2.1) จะได้

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{1/n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{1/n}$$

เนื่องจาก

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$$

ดังนั้น

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{1/n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{1/n}$$

จัดรูปใหม่ได้ว่า

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^n \geq (x_1x_2 \dots x_{n-1}) \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \geq (x_1x_2 \dots x_{n-1})$$

แสดงว่า
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{1/(n-1)}$$

นั่นคืออสมการ (2.1) เป็นจริงที่ $n-1$ จำนวนด้วย

จากวิธี forward induction เราได้ว่า อสมการ (2.1) เป็นจริงเมื่อ $n = 2, 4, \dots$ ดังนั้นจากวิธี backward induction ก็จะได้ว่าอสมการ (2.1) เป็นจริงเมื่อ $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ เมื่อรวมทั้งสองขั้นตอนก็จะได้ว่าอสมการ (2.1) เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ □

พิสูจน์แบบที่ 2 (Ehlers's Method)

ขั้นที่ 1 เราเริ่มต้นพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริงใดๆ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$

ถ้า $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ แล้วจะได้ว่า $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

“สำหรับจำนวนจริงใดๆ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ ถ้า $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ แล้วจะได้ว่า $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ ”

เมื่อ $n = 1$ เห็นได้ชัดว่า $P(1)$ เป็นจริง

สมมุติให้ $P(n)$ เป็นจริง จะพิสูจน์ว่า $P(n+1)$ เป็นจริงด้วย

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1$

ดังนั้นจะต้องมี x_i, x_j บางจำนวนซึ่ง $x_i \geq 1$ และ $x_j \leq 1$

โดยไม่เสียหายนัยทั่วไปสมมุติให้ $x_1 \geq 1$ และ $x_2 \leq 1$

ทำให้ได้ว่า $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$ นั่นคือ $1 + x_1 x_2 \leq x_1 + x_2$

เนื่องจาก $P(n)$ เป็นจริง และ $x_1 x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ เป็นจำนวน n จำนวนซึ่ง $(x_1 x_2) x_3 \cdots x_{n+1} = 1$

ดังนั้น $x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geq n$

$$\therefore x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \geq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geq n + 1$$

นั่นคือ $P(n+1)$ เป็นจริงด้วย สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

ขั้นที่ 2 พิสูจน์อสมการ AM-GM โดยให้ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ และ $x_1 x_2 \cdots x_n = G > 0$

ให้ $a_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{G}}, a_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{G}}, \dots, a_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{G}}$

ดังนั้น $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$

จากขั้นที่ 1 จะได้ว่า
$$n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt[n]{G}}$$

$$\therefore (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} = \sqrt[n]{G} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ได้ อสมการ AM-GM เป็นจริง

ต่อไปเป็นการพิสูจน์ส่วนอสมการ GM-HM

เมื่อใช้สมการ AM-GM กับ $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ ได้ว่า

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^{1/n}$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

โดยได้เป็นสมการก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \dots = \frac{1}{x_n}$ กล่าวคือ $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ □

ตัวอย่าง 2.1 จงพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีปริมาตรสูงสุด เมื่อกำหนดพื้นที่ผิวคงตัวมาให้ และเป็นรูปทรงที่มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุดเมื่อกำหนดปริมาตรคงตัวมาให้

วิธีทำ กำหนดให้ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้าง a หน่วย ความยาว b หน่วย และความสูง c หน่วย ให้ A และ V เป็นพื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากตามลำดับ ดังนั้น

$$A = 2(ab + bc + ca) \quad \text{และ} \quad V = abc$$

โดยอสมการ AM-GM จะได้ว่า

$$V^2 = a^2 b^2 c^2 = (ab)(bc)(ca) \leq \left(\frac{ab + bc + ca}{3} \right)^3 = \left(\frac{2(ab + bc + ca)}{6} \right)^3 = \left(\frac{A}{6} \right)^3$$

ดังนั้น สำหรับทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใดๆ จะได้ว่า $6(V)^{2/3} \leq A$
และจะได้เป็นสมการก็ต่อเมื่อ $ab = bc = ca$ นั่นคือ $a = b = c$

กรณีที่ 1 เมื่อกำหนดพื้นที่ผิวคงตัว A มาให้ ปริมาตร V สูงสุดที่เป็นไปได้คือ $V = \left(\frac{A}{6} \right)^{3/2}$

ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ $a = b = c$ นั่นคือทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นเป็นลูกบาศก์

กรณีที่ 2 เมื่อกำหนดปริมาตรคงตัว V มาให้ พื้นที่ผิว A ต่ำสุดที่เป็นไปได้คือ $A = 6(V)^{2/3}$

ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ $a = b = c$ นั่นคือทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นเป็นลูกบาศก์

ตัวอย่าง 2.2 จงพิสูจน์ว่าสำหรับทุกจำนวน $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$n((n+1)^{1/n} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < n - (n-1)n^{-1/(n-1)}$$

วิธีทำ ให้ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ พิจารณาอสมการแรกทางซ้ายมือ

ต้องการแสดงว่า $n((n+1)^{1/n} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = s_n$

นั่นคือต้องแสดง ว่า

$$(n+1)^{1/n} < \frac{n+s_n}{n}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{n+s_n}{n} &= \frac{(1+1) + (1+\frac{1}{2}) + (1+\frac{1}{3}) + \cdots + (1+\frac{1}{n})}{n} \\ &= \frac{2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n}}{n} \\ &> \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n} \right)^{1/n} = (n+1)^{1/n} \quad \text{ได้ตามที่ต้องการ} \end{aligned}$$

พิจารณาอสมการทางขวามือ ต้องการแสดงว่า

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < n - (n-1)n^{-1/(n-1)}$$

นั่นคือต้องได้ว่า

$$\frac{n-s_n}{n-1} > \left(\frac{1}{n} \right)^{1/(n-1)}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{n-s_n}{n-1} &= \frac{(1-1) + (1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{3}) + \cdots + (1-\frac{1}{n})}{n-1} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}}{n-1} \\ &> \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n} \right)^{1/(n-1)} = \left(\frac{1}{n} \right)^{1/(n-1)} \quad \text{ได้ตามที่ต้องการ} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.3 กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ และ $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ จงพิสูจน์ว่า $abc \leq 1$

วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้ $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ จะได้ว่า

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$

โดย อสมการ AM-GM จะได้

$$a+b+c \geq 3(abc)^{1/3} \quad \text{และ} \quad ab+bc+ca \geq 3(a^2b^2c^2)^{1/3} = 3(abc)^{2/3}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 8 &= 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc \\ &\geq 1 + 3(abc)^{1/3} + 3(abc)^{2/3} + abc = \left(1 + (abc)^{1/3}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\therefore 1 + (abc)^{1/3} \leq 2 \quad \text{นั่นคือ} \quad (abc)^{1/3} \leq 1 \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \quad abc \leq 1$$

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ และ $x_{n+1} = x_1$

จงแสดงว่า

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} \right)^n$$

วิธีทำ กรณี $n = 1$ จะได้ว่า $x_2 = x_1$ และ $\frac{x_2}{x_1} = 1 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ นั่นคือ อสมการเป็นจริง

พิจารณากรณี $n = 2$ โดยอสมการ AM-GM จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x_2}{x_1} &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + 1^2 \right] \\ \frac{x_3}{x_2} &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_3}{x_2} \right)^2 + 1^2 \right] \\ 1 &= \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_2} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

เมื่อบวกสมการทั้งสามเข้าด้วยกันได้

$$1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} \leq 1 + \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3} \right)^2$$

ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ

กรณี $n = 3$ จากอสมการ AM-GM ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_1} \cdot 1 \leq \frac{1}{3} \left[\left(\frac{x_2}{x_3} \right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^3 + 1^3 \right] \\ \frac{x_3}{x_2} &= \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_3}{x_1} \cdot 1 \leq \frac{1}{3} \left[\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^3 + 1^3 \right] \\ \frac{x_1}{x_3} &= \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot 1 \leq \frac{1}{3} \left[\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3} \right)^3 + 1^3 \right]\end{aligned}$$

และ

$$1 = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_1} \leq \frac{1}{3} \left[\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3} \right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^3 \right]$$

เมื่อบวกอสมการทั้งสี่เข้าด้วยกันได้

$$1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} \leq 1 + \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3} \right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^3$$

ตามต้องการ การพิสูจน์ในกรณี n ใดๆ ทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.5 ให้ k, n เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า $n^{kn} \geq (n^k + n^{k-1} + \dots + n + 1)^{n-1}$

วิธีทำ กรณี $n = 1$ เห็นได้ชัดเจนว่าอสมการที่ต้องการพิสูจน์เป็นสมการ

จากนี้ไปสมมุติว่า $n > 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
n^k &= \frac{(n^{k+1} - 1) + 1}{n} = \frac{(n-1)(n^k + n^{k-1} + \dots + 1) + 1}{n} \\
&= \frac{(n^k + n^{k-1} + \dots + 1) + \dots + (n^k + n^{k-1} + \dots + 1) + 1}{n} && \text{(ในตัวเลขมี } n-1 \text{ พจน์เหมือนกัน)} \\
&> \sqrt[n]{(n^k + n^{k-1} + \dots + 1)^{n-1} \cdot 1} && \text{(โดยอสมการ AM-GM)} \\
&= (n^k + n^{k-1} + \dots + 1)^{(n-1)/n}
\end{aligned}$$

เมื่อยกกำลัง n ทั้งสองข้างได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.6 (IMO 2001) จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1 \quad \text{เมื่อ } a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

วิธีทำ เราคาดว่าจะมีจำนวนจริงบวก s ที่มีสมบัติว่า

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^s}{a^s + b^s + c^s} \quad (2.6.1)$$

เมื่อพบดังนี้แล้ว โดยการบวกอสมการประเภทเดียวกันกับ (2.6.1) สามครั้ง เทียบกับ a, b, c จะได้อสมการที่ต้องการ

หลังจากทดลองหลาย ๆ ค่า พบว่าใช้ $s = \frac{4}{3}$ ได้ ซึ่งตรวจสอบได้ดังนี้ โดยอสมการ AM-GM

$$(a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3})^2 - (a^{4/3})^2 = (b^{4/3} + c^{4/3})(2a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}) \geq 2b^{2/3}c^{2/3} \cdot 4a^{2/3}b^{1/3}c^{1/3} = 8a^{2/3}bc$$

$$\text{ดังนั้น } (a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3})^2 \geq (a^{4/3})^2 + 8a^{2/3}bc = a^{2/3}(a^2 + 8bc)$$

ซึ่งให้ว่า

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}} \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 2.7 ให้ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ($n \geq 1$) เป็นจำนวนจริง ให้ $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ มีสมบัติว่า

$|f(0)| = f(1)$ และทุกราก r ของ f เป็นจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับอสมการ $0 < r < 1$ จงพิสูจน์ว่า ผลคูณของราก

ทั้งหมดของ f มีค่าไม่เกิน $\frac{1}{2^n}$

วิธีทำ ให้ $r_1, r_2, \dots, r_n$ เป็นรากทั้งหมดของ f ดังนั้น $f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$

$$\text{สังเกตว่า } r_1 r_2 \dots r_n = |f(0)| = f(1) = (1 - r_1)(1 - r_2)\dots(1 - r_n)$$

เนื่องจาก $0 < r_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) โดยอสมการ AM-GM ได้

$$(r_1 r_2 \dots r_n)^2 = r_1(1 - r_1)r_2(1 - r_2)\dots r_n(1 - r_n) \leq \left(\frac{r_1 + 1 - r_1 + r_2 + 1 - r_2 + \dots + r_n + 1 - r_n}{2n} \right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\text{ดังนั้น } r_1 r_2 \dots r_n \leq \frac{1}{2^n}$$

ตัวอย่าง 2.8 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ในช่วง $[1, 2]$ จงแสดงว่า

$$\left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right| \leq \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

วิธีทำ ให้ $A = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right| = \frac{|a-c||a-b||b-c|}{abc}$

โดยความสมมาตรของโจทย์ สามารถสมมติได้โดยไม่เสียทั่วไปว่า $c \leq b \leq a$

ให้ $x = \frac{c}{a}$, $y = \frac{b}{a}$ ดังนั้น $\frac{1}{2} \leq x \leq y \leq 1$ และโดยอสมการ AM-GM ได้

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a-ax)(a-ay)(ay-ax)}{a \cdot ax \cdot ay} = \frac{(1-x)(1-y)(y-x)}{xy} \leq \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1-y)\left(y - \frac{1}{2}\right)}{\frac{y}{2}} \\ &= \frac{3}{2} - \left(y + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.9 จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x, y, z ใดๆ

$$(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$$

วิธีทำ ให้ $a = x + y - z$, $b = x + z - y$, $c = y + z - x$ สังเกตว่า มีอย่างมากเพียงจำนวนเดียวจาก a, b, c เท่านั้นที่อาจเป็นลบได้ ซึ่งในกรณีนี้ อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน ดังนั้นจากนี้ไปจึงเพียงพอที่จะพิจารณากรณีที่ $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ซึ่งโดยอสมการ AM-GM ซ้ำสองครั้งให้ว่า

$$\begin{aligned} (x+y)(x+z)(y+z) &= \frac{1}{2}(b+c+2a) \frac{1}{2}(a+c+2b) \frac{1}{2}(a+b+2c) \\ &\geq \{(b+c)2a\}^{1/2} \{(a+c)2b\}^{1/2} \{(a+b)2c\}^{1/2} \\ &\geq 2a^{1/2}(bc)^{1/4} 2b^{1/2}(ac)^{1/4} 2c^{1/2}(ab)^{1/4} = 8abc = 8(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.10 จงพิสูจน์ว่า $1 < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{3001} < \frac{4}{3}$

วิธีทำ พิจารณาจำนวนจริง 2001 จำนวนในรูป $\frac{1}{k}$ ($1001 \leq k \leq 3001$) โดยอสมการ AM-HM ได้

$$\sum_{k=1001}^{3001} k \sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k} \geq \frac{(2001)^2}{\frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{3001}} \left(\frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{3001} \right) \geq (2001)^2$$

แต่ $\sum_{k=1001}^{3001} k = (2001)^2$ ดังนั้น $\sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k} > 1$

ในการทำนองตรงข้าม เมื่อรวมพจน์ครั้งละ 500 พจน์ ได้

$$\sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k} < \frac{500}{1000} + \frac{500}{1500} + \frac{500}{2000} + \frac{500}{2500} + \frac{1}{3001} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3000} = \frac{3851}{3000} < \frac{4}{3}$$

ตัวอย่าง 2.11 ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0$ โดยที่ $a + b + c + d = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$S := \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM $2a+1 = \frac{1}{2} \{(4a+1) + 1\} \geq \sqrt{(4a+1) \cdot 1}$ ดังนั้น $\sqrt{4a+1} \leq 2a+1$

โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $a = 0$ อสมการทำนองเดียวกัน เป็นจริงสำหรับอีกสามพจน์ที่เหลือ เพราะฉะนั้น

$$S < (2a+1) + (2b+1) + (2c+1) + (2d+1) = 2(a+b+c+d) + 4 = 6$$

ซึ่งเป็นอสมการแท้เพราะ a, b, c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ตัวอย่าง 2.12 ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a+b=1$ จงพิสูจน์ว่า $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &= a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + 4 = (a+b)^2 - 2ab + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2}{ab} + 4 \\ &= 1 - 2ab + \frac{1}{a^2b^2} - \frac{2}{ab} + 4 = (1-2ab)\left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right) + 4 \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1+16) + 4 \quad (\text{เนื่องจาก } ab \leq \{(a+b)/2\}^2 = \frac{1}{4} \text{ โดยอสมการ AM-GM}) \\ &= \frac{25}{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.13 ถ้า $x_i > 0$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, $x_{n+1} = x_1$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $\prod_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})^{-1} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^n$

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{โดยอสมการ AM-GM} \quad \prod_{i=1}^n (x_i + x_{i+1}) \leq \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + x_{i+1})}{n} \right\}^n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$$

เมื่อกลับเศษเป็นส่วน ได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.14 จงพิสูจน์ว่า $(\sqrt{2}-1)(\sqrt[3]{6}-\sqrt{2})\dots(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}) < \frac{n!}{(n+1)^n}$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM

$$\begin{aligned} 1 \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt[3]{6}-\sqrt{2}) \cdots (\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}) &< \left(\frac{1 + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt[3]{6}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.15 ให้ $a_n = (n!)^{1/n}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณาลำดับ $\{b_n\}$ ที่นิยามโดย $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

จงพิสูจน์ว่า $b_n > 2^{1/(n+1)}$ สำหรับทุก $n > 1$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM $(1 \cdot 2 \cdots n)^{1/n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{1}{2}(n+1)$

เมื่อคูณตลอดด้วย $n!$ ได้ $\frac{(n+1)!}{2} > (n!)^{(n+1)/n}$ ซึ่งให้ว่า $a_{n+1}^{n+1} > 2a_n^{n+1}$ เมื่อเปลี่ยนเป็น b_n ได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.16 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง $\in (0, 1)$ และ $a + b + c = 2$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{1-a} \cdot \frac{b}{1-b} \cdot \frac{c}{1-c} \geq 8$$

วิธีทำ ให้ $x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c$

ดังนั้น อสมการที่ต้องการเปลี่ยนรูปเป็น $\frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} \cdot \frac{1-z}{z} \geq 8$ ภายใต้เงื่อนไข $x, y, z \in (0, 1), x + y + z = 1$

อสมการนี้สมมูลกับอสมการ $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$ เมื่อกระจายนิพจน์ทางซ้ายมือ และใช้เงื่อนไข พบว่า

อสมการกลายเป็น $xy + yz + zx \geq 9xyz$ กล่าวคือ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ สังเกตว่าอสมการทำนี้เป็นจริง

จากอสมการ AM-HM โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x = y = z$ กล่าวคือ $a = b = c$

ตัวอย่าง 2.17 ให้ $x_1, \dots, x_{n+1}$ เป็นจำนวนจริงบวกที่มีสมบัติว่า $\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$

จงพิสูจน์ว่า $x_1 \cdots x_{n+1} \geq n^{n+1}$

วิธีทำ ให้ $a_i = \frac{1}{1+x_i}$ ดังนั้น $x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$ และให้ $A = a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$ ดังนั้น

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1-a_i}{a_i} = \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n+1} (1-a_i)$$

จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ได้ $a_1 + \dots + a_{n+1} = 1$ ซึ่งให้ว่า $1 - a_i = a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{n+1}$

โดยอสมการ AM-GM $\frac{a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{n+1}}{n} \geq (a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_{n+1})^{1/n}$ ซึ่งให้ว่า

$$\frac{1-a_i}{n} \geq \left(\frac{A}{a_i} \right)^{1/n} \quad \text{กล่าวคือ} \quad \frac{\prod_{i=1}^{n+1} (1-a_i)}{n^{n+1}} \geq \left(\frac{A^{n+1}}{a_1 \cdots a_{n+1}} \right)^{1/n} = A$$

เพราะฉะนั้น $x_1 \cdots x_{n+1} = \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n+1} (1-a_i) \geq n^{n+1}$

ตัวอย่าง 2.18 ให้ x, y แปรไปเหนือเซตของจำนวนจริงไม่ติดลบ ถ้า $x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} = 4$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $x^2y \leq 4$

วิธีทำ ถ้า x หรือ y เป็น 0 อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน จากนี้ไปสมมติว่า ทั้ง x และ y ไม่เป็น 0 โดย

อสมการ AM-GM $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y\right) \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y}$ ซึ่งให้ว่า $x + y \geq 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{1}{15}(2x^2 + 2xy + 3y^2) &= \frac{1}{15}\left\{\left(\frac{2x^2}{8} + \cdots + \frac{2x^2}{8}\right) + \left(\frac{2xy}{4} + \cdots + \frac{2xy}{4}\right) + (y^2 + y^2 + y^2)\right\} \\ &\geq \left\{\left(\frac{2x^2}{8}\right)^8 \left(\frac{2xy}{4}\right)^4 (y^2)^3\right\}^{1/15} = \left(\frac{x^{20}y^{10}}{2^{20}}\right)^{1/15} \end{aligned}$$

กล่าวคือ $2x^2 + 2xy + 3y^2 \geq 15\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{2/3}$

เพราะฉะนั้น $4 = x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} \geq 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3} + \sqrt{15}\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3} > 4\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3}$

ตัวอย่าง 2.19 ถ้า $p, q, r \in \mathbb{N}$ แล้ว จงแสดงว่า

$$3^{p+q+r} \geq \left(1 + \frac{q+r}{p}\right)^p \left(1 + \frac{r+p}{q}\right)^q \left(1 + \frac{p+q}{r}\right)^r$$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM

$$\begin{aligned} \frac{3}{p+q+r} &= \frac{\underbrace{\left(\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}\right)}_{p \text{ ครั้ง}} + \underbrace{\left(\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}\right)}_{q \text{ ครั้ง}} + \underbrace{\left(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r}\right)}_{r \text{ ครั้ง}}}{p+q+r} \\ &\geq \left(\frac{1}{p^p q^q r^r}\right)^{\frac{1}{p+q+r}} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$3^{p+q+r} \geq \frac{(p+q+r)^{p+q+r}}{p^p q^q r^r} = \left(1 + \frac{q+r}{p}\right)^p \left(1 + \frac{r+p}{q}\right)^q \left(1 + \frac{p+q}{r}\right)^r$$

ตัวอย่าง 2.20 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาค่าสูงสุดของ $F = \frac{(x^{2n} - a^{2n})(b^{2n} - x^{2n})}{(x^{2n} + a^{2n})(x^{2n} + b^{2n})}$ เมื่อ x แปรไปเหนือจำนวนจริง

วิธีทำ โดยไม่เสียหยาทั่วไป สมมติว่า $a, b \geq 0$ โดยการตั้งหาร ได้

$$F = -1 + \frac{2(a^{2n} + b^{2n})x^{2n}}{x^{4n} + (a^{2n} + b^{2n})x^{2n} + a^{2n}b^{2n}} = -1 + \frac{2(a^{2n} + b^{2n})}{x^{2n} + (a^{2n} + b^{2n}) + \left(\frac{a^{2n}b^{2n}}{x^{2n}}\right)}$$

โดยอสมการ AM-GM

$$x^{2n} + \frac{a^{2n}b^{2n}}{x^{2n}} + (a^{2n} + b^{2n}) \geq 3\{a^{2n}b^{2n}(a^{2n} + b^{2n})\}^{1/3}$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x^{2n} = \left(\frac{ab}{x}\right)^{2n} = a^{2n} + b^{2n}$ คือเมื่อ $x^2 = ab$ เพราะฉะนั้น

$$F_{\max} = \frac{((ab)^n - a^{2n})(b^{2n} - (ab)^n)}{((ab)^n + a^{2n})(a^{2n} + b^{2n})} = \frac{(b^n - a^n)^2}{(b^n + a^n)^2}$$

ตัวอย่าง 2.21

ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots$ นิยาม

$a_{n+i} = a_i$, $b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+m}$ จงพิสูจน์ว่า $m^n a_1 a_2 \dots a_n < b_1 b_2 \dots b_n$ ยกเว้นในกรณีที่ทุก a_i มีค่าเท่ากัน

วิธีทำ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ สมมูลกับ $\prod_{i=1}^n \frac{b_i}{m} > a_1 a_2 \dots a_n$ โดยอสมการ AM-GM

$$\frac{b_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_{i+k} \geq \left(\prod_{k=1}^m a_{i+k} \right)^{1/m}$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ ทุก a_{i+k} มีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{b_i}{m} \right) > \prod_{i=1}^n \left(\prod_{k=1}^m a_{i+k} \right)^{1/m} = \left(\prod_{i=1}^n a_i^m \right)^{1/m} = a_1 a_2 \dots a_n$$

ยกเว้นในกรณีที่ทุก a_i มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 2.22

(IMO 2000) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $abc = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

วิธีทำ เนื่องจากเงื่อนไข $abc = 1$ ไม่เป็นเอกพันธ์ แต่สามารถเปลี่ยนเป็นเอกพันธ์ ได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร

$a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ โดยที่ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ซึ่งทำให้เงื่อนไข $1 = abc$ หมดไป และ นิพจน์ทางซ้ายมือของ

อสมการที่ต้องการเปลี่ยนรูปเป็น

$$\begin{aligned} \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) &= \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right) \left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right) \left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y)}{xyz} \end{aligned}$$

และอสมการที่ต้องการพิสูจน์ เปลี่ยนเป็น $(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz$