



เรขาคณิต

(ความรู้พื้นฐาน รูปสามเหลี่ยม ความคล้าย วงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัส รูปสามเหลี่ยมพื้นที่กับรูปวงกลม จุด เส้นตรง
ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม การแบ่งแบบฮาร์โมนิก และการสร้าง ทฤษฎีบทของเซวา และทฤษฎีบทของเมนลอส
อสมการเรขาคณิต จำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ทางเรขาคณิต การแปลงทางคณิตศาสตร์)



โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน.

เรขาคณิต

(ความรู้พื้นฐาน รูปสามเหลี่ยม ความคล้าย วงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัส รูปสามเหลี่ยมพื้นที่กับรูปวงกลม จุด เส้นตรง
ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม การแบ่งแบบฮาร์โมนิก และการสร้าง ทฤษฎีบทของเซวา และทฤษฎีบทของเมนลอส
อสมการเรขาคณิต จำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ทางเรขาคณิต การแปลงทางคณิตศาสตร์)



ถ่ายภาพ : ศ. ศักดา ศิริพันธ์



**มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา
ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา
กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)**

ความเป็นมา

ประเทศไทยส่งนักเรียนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งแรกในปี พ.ศ. 2532 ที่ประเทศเยอรมนี โดยความร่วมมือระหว่างสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา (พระยศในขณะนั้น) ได้พระราชทานเงินส่วนพระองค์จำนวนหนึ่งเพื่อเป็นค่าใช้จ่าย

การคัดเลือกนักเรียนเพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 30 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดคณะกรรมการมหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งมาช่วยฝึกอบรมรวมเป็นเวลาประมาณสองเดือน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติมครอบคลุมหลักสูตรที่จะใช้แข่งขัน ซึ่งอยู่ในระดับชั้นปีที่ 1-2 ของมหาวิทยาลัย จากผลสำเร็จในปีแรก ทำให้รัฐบาลเห็นความสำคัญจึงได้จัดสรรงบประมาณให้กับโครงการนี้ผ่านสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 เป็นต้นมา สมทบกับเงินพระราชทานเป็นรายปีจากสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เพื่อสนับสนุนการส่งนักเรียนไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ 5 สาขา จนถึงปัจจุบันรวม 14 ปี นักเรียนไทยได้ทำชื่อเสียงได้เหรียญทองรวม 17 เหรียญ เหรียญเงิน 53 เหรียญ เหรียญทองแดง 93 เหรียญ และเกียรติคุณประกาศอีก 35 ราย รวมทั้งสิ้น 198 รางวัล จากจำนวนนักเรียนที่ส่งไปแข่งขัน 276 คน (72%)

อย่างไรก็ตาม จากการที่ประเทศไทยดำเนินการจัดส่งนักเรียนเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ตั้งแต่ พ.ศ.2532 จนถึงปัจจุบัน ทำให้เห็นว่ามาตรฐานการศึกษาด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของไทยยังต่ำกว่ามาตรฐานสากล การเตรียมตัวของนักเรียนยังใช้เวลาน้อยเกินไป

เพื่อให้การส่งเสริมและสนับสนุน โครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นสมเด็จพระเจ้า พี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จึงมีพระดำริให้จัดตั้งมูลนิธิ สอวน. และได้รับอนุมัติจากกระทรวงมหาดไทยเมื่อวันที่ 12 ตุลาคม 2542 โดยมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการ

วัตถุประสงค์

1. ส่งเสริมให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วประเทศที่มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีโอกาสได้รับการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ฟิสิกส์ และชีววิทยา ตามความถนัดทั้งด้านทฤษฎีและทักษะด้านปฏิบัติ ให้สามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยจัดให้มีศูนย์อบรมทั่วประเทศเป็นการเพิ่มเวลาฝึกอบรม เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความพร้อมที่จะเข้ารับการคัดเลือกไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ตามพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ องค์ประธานมูลนิธิ สอวน.
2. เพื่อนำประสบการณ์ที่ได้จากการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษาของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าระดับสากล

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) ได้ร่วมมือกับคณาจารย์มหาวิทยาลัยของรัฐ 20 แห่ง และกระทรวงศึกษาธิการ ดำเนินการจัดตั้งศูนย์ สอวน. ในภูมิภาค 12 ศูนย์ และในกรุงเทพฯ 1 ศูนย์ (5 โรงเรียน) เพื่อพัฒนาศักยภาพทางปัญญาของนักเรียนที่มีความพร้อมในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์จากทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนได้มีความรู้ความสามารถเทียบเท่ามาตรฐานสากล และพร้อมที่จะสอบคัดเลือกเป็นผู้แทนประเทศไทยไปร่วมการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศในสาขาวิชาต่างๆ ได้ และเพื่อขยายผลจากประสบการณ์ที่ได้เข้าแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าสากล

ในการอบรมนักเรียนของศูนย์ สอวน. มูลนิธิ สอวน. ได้พิจารณาเห็นว่าตำราที่มีความสมบูรณ์ของเนื้อหาตามหลักสูตรของ สอวน. จะช่วยพัฒนาศักยภาพของนักเรียนในศูนย์ สอวน. ให้สูงขึ้นได้ นอกจากนั้นตำราเรียนในวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสมบูรณ์ถูกต้องยังขาดแคลน นักเรียนและครูสามารถนำตำราที่พัฒนาขึ้นมานี้ไปใช้เป็นหนังสืออ้างอิงประกอบการเรียนการสอนได้อีกด้วย มูลนิธิ สอวน. จึงได้มี “โครงการจัดทำตำราส่งเสริมพัฒนาศักยภาพของนักเรียนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์” ขึ้น เพื่อผลิตตำราคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ที่มีเนื้อหาหลักสูตรตามมาตรฐานสากล โดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นที่ระลึกในมหามงคลสมัยที่สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ทรงเจริญพระชนมายุ 80 พรรษา ซึ่งพระองค์ทรงมีพระมหากรุณาธิคุณต่อโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศและทรงสนับสนุนการดำเนินงานเพื่อพัฒนามาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยอย่างหาที่สุดมิได้

2. เพื่อผลิตหนังสือคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายถึงระดับชั้นปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยให้มีคุณภาพเทียบเท่าสากล เรียบเรียงโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัยของรัฐที่มีประสบการณ์สูงและที่มีส่วนร่วมในการฝึกอบรมนักเรียนในค่าย สอวน. ค่าย สสวท. และควบคุมนักเรียนไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ เนื้อหาในหนังสือเน้นกระบวนการคิดแบบวิทยาศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและประยุกต์ได้โดยจัดพิมพ์บนกระดาษอาร์ตอย่างดีและมีภาพสีประกอบคำบรรยาย

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ รวม 5 เล่ม คอมพิวเตอร์ 3 เล่ม เคมี 3 เล่ม ชีววิทยา 5 เล่ม และฟิสิกส์ 3 เล่ม โดยหนังสือชุดแรกจะนำขึ้นทูลเกล้าถวายในวันที่ 6 มิถุนายน 2547 ซึ่งเป็นวันประชุมสามัญประจำปี พ.ศ. 2547 ของคณะกรรมการบริหาร และสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เสด็จเป็นองค์ประธานที่ประชุม ส่วนที่เหลือคาดว่าจะจัดพิมพ์ให้แล้วเสร็จภายในปี พ.ศ. 2547 นี้ นอกจากนั้นคณะกรรมการโครงการผลิตตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายจะผลิตตำราที่มีคุณภาพสูงนี้ในระดับมัธยมศึกษาต้นโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัย เพื่อวางรากฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพื่อสร้างแรงบันดาลใจและความสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์แก่เยาวชนอีกด้วย หากได้รับความอนุเคราะห์ช่วยเหลือด้านงบประมาณจากภาครัฐและเอกชน

คณะจัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์หวังว่าโครงการตำราคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. จะมีส่วนร่วมในการปฏิรูปการเรียนรู้และยกระดับมาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้เทียบเท่ากับระดับสากลเพื่อสนองพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

*คำขอบคุณ : คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ ขอขอบคุณพิพิธภัณฑ ARTTHMEUM, Bonn ที่อนุญาต

ให้ประธานคณะกรรมการฯ เข้าถ่ายภาพในพิพิธภัณฑ เพื่อนำมาเผยแพร่

คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

คณะกรรมการที่ปรึกษา

- | | |
|---|------------------------|
| 1. ศาสตราจารย์ นายแพทย์ จรัส สุวรรณเวลา | รองประธานมูลนิธิ สอวน. |
| 2. รองศาสตราจารย์ ดร.กำจัด มงคลกุล | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 3. ดร. คุณหญิงกษมา วรวรรณ ณ อยุธยา | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 4. รองศาสตราจารย์ ดร. คุณหญิงสุมณฑา พรหมบุญ | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 5. นายเชาว์ อรรถมานะ (อดีต) | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 6. นายสมนึก พิมลเสถียร | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 7. นายสุนทร อรุณานนท์ชัย | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 8. รองศาสตราจารย์บุญรักษา สุนทรธรรม | กรรมการมูลนิธิฯ |

คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์ (ราชบัณฑิต) เลขานุการมูลนิธิ สอวน. | ประธาน |
| 2. รองศาสตราจารย์เย็นใจ สมวิเชียร | รองประธาน |
| 3. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปิ่นนัม | กรรมการ (วิชาคณิตศาสตร์) |
| 4. รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรรณ | กรรมการ (วิชาคอมพิวเตอร์) |
| 5. รองศาสตราจารย์ ดร. พินิติ รตะนานุกูล | กรรมการ (วิชาเคมี) |
| 6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ | กรรมการ (วิชาฟิสิกส์) |
| 7. ศาสตราจารย์อักษร ศรีเปล่ง | กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทพืช) |
| 8. รองศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ยศยิ่งยวด | กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทสัตว์) |

คณะผู้เขียนวิชาคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปิ่นนัม
2. ศาสตราจารย์ กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ สิริวัฒน์
4. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์
5. รองศาสตราจารย์ ดร. ณวีวรรณ รัตนประเสริฐ

คำนำ

หนังสือเรขาคณิตเล่มนี้ ผู้เขียนได้นำเนื้อหาามาจัดเป็นหมวดหมู่ เรื่องใดที่เกี่ยวข้องกันก็จัดไว้ในบทเดียวกัน ในบทแรกได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานซึ่งประกอบด้วยสัจพจน์ บทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่จะนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ เนื่องจากการพิสูจน์เรขาคณิตจะต้องใช้เหตุผล จึงได้นำรูปแบบของการใช้เหตุผลทั้งแบบอุปนัยและแบบนิรนัยมาแสดงไว้ ตลอดจนได้แสดงให้เห็นแนวทางในการวิเคราะห์แนวคิดก่อนที่จะเขียนพิสูจน์

บทที่ 2 เรื่องรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและความคล้าย ซึ่งกล่าวถึงทั้งรูปสามเหลี่ยมคล้ายและรูปหลายเหลี่ยมคล้าย

บทที่ 3 ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวกับวงกลมจอร์ดและเส้นสัมผัส

บทที่ 4 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากับวงกลม ซึ่งกล่าวถึงวงกลมแบบนอกและแบบในรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม ตลอดจนรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าแบบนอกและแบบในวงกลม

บทที่ 5 จุด เส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม ซึ่งกล่าวถึงจุดรวม จุดออร์ธोเซนเตอร์ วงกลมแกว้จุดรูป สามเหลี่ยมมีเดียและเส้นออยเลอร์

บทที่ 6 การแบ่งแบบฮาร์โมนิกและการสร้างต่างๆ ซึ่งเป็นพื้นฐานการสร้างที่ยากขึ้นตามลำดับ

สำหรับเนื้อหาบทที่ 1 ถึงบทที่ 6 เหมาะสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา แต่บทที่จะกล่าวถึงต่อไปเหมาะสำหรับผู้เรียนในชั้นที่สูงขึ้น

บทที่ 7 ทฤษฎีบทของเซวาและทฤษฎีบทของเมนลอส

บทที่ 8 อสมการเรขาคณิต

บทที่ 9 จำนวนเชิงซ้อนและการประยุกต์ทางเรขาคณิต

บทที่ 10 การแปลงทางเรขาคณิต

นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศแสดงไว้ ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้คงจะเป็นประโยชน์ต่อผู้ใช้ตามสมควร

ผู้เขียน

ศาสตราจารย์ กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล

ปม., อ.บ., ค.บ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, MA (USA)

Grad. Diploma in Ed. Admin, Canada

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อุทัย ธีรวัฒน์

วท.บ. เกียรตินิยมอันดับ 1 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

วท.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

วท.ด. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 974-92234-9-7

สงวนลิขสิทธิ์

จัดพิมพ์โดย มูลนิธิ สอวน.

พิมพ์ครั้งที่ 3 พ.ศ. 2552 (2009)

ออกแบบปก หน้ารองปกและหน้านำบทที่ 1 โดย ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์

ศิลปกรรม: นายปรีชา ฉัตรเนตร

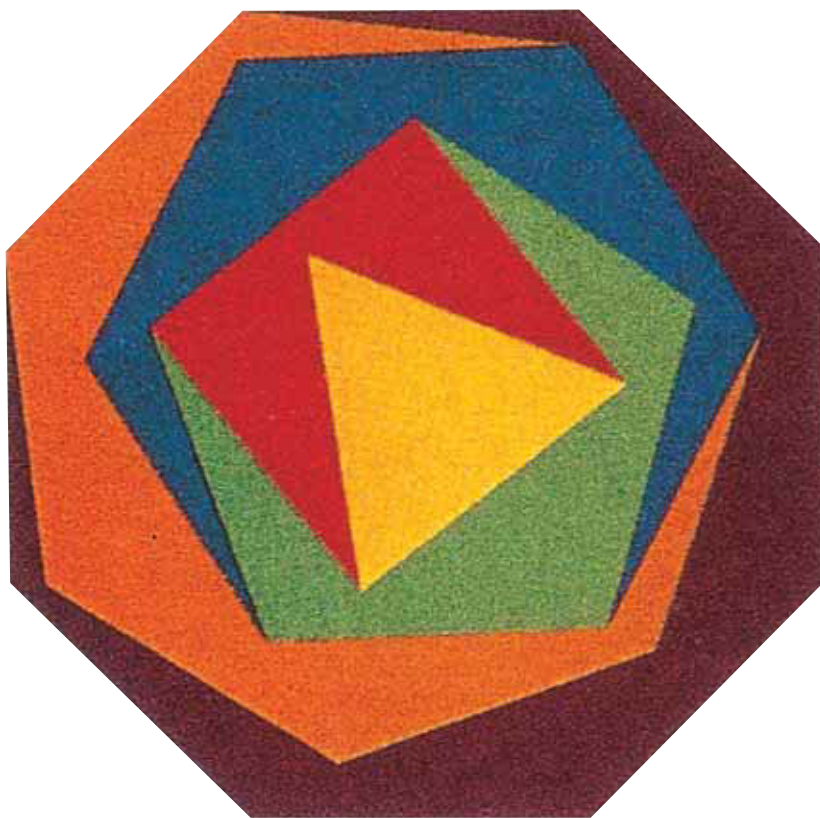
พิมพ์ที่ บริษัทด้านสุทธาการพิมพ์ จำกัด

แยกสี / เพลา เอ็นอาร์ ฟิล์ม

สารบัญ

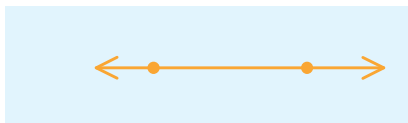
บทที่ 1	ความรู้พื้นฐาน	1
บทที่ 2	รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ความคล้าย	36
บทที่ 3	วงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัส	70
บทที่ 4	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากับรูปวงกลม	92
บทที่ 5	จุด เส้นตรง ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม	114
บทที่ 6	การแบ่งแบบฮาร์โมนิก และการสร้าง	132
บทที่ 7	ทฤษฎีบทของเซวา และทฤษฎีบทของเมนเดลอส	166
บทที่ 8	อสมการเรขาคณิต	178
บทที่ 9	จำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ทางเรขาคณิต	196
บทที่ 10	การแปลงทางเรขาคณิต	209

บรรณานุกรม	245
ภาคผนวก	247
ดัชนี	262
บัญชีสัญลักษณ์	264

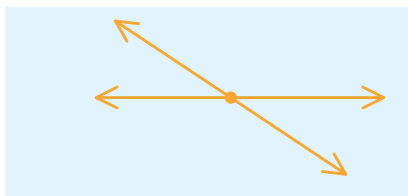


การกล่าวถึงข้อความบางประการที่ไม่ต้องพิสูจน์ เราเรียกสมบัติทางเรขาคณิตของข้อความดังกล่าวว่า
 สัจพจน์ (Postulate) ข้อความคาดการณ์ (Conjecture) บางข้อความเป็นสัจพจน์และยอมรับว่าเป็นความจริง แต่
 บางข้อความที่ต้องใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยก็จะเป็นทฤษฎี

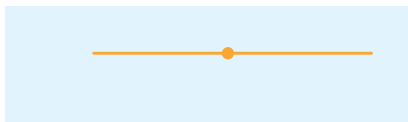
สัจพจน์ทางเรขาคณิตของยุคลิด จะมีพื้นฐานมาจากการสร้างโดยใช้วงเวียนและสันตรง สัจพจน์ที่จะ
 กล่าวถึงต่อไปนี้ ขึ้นอยู่กับการสร้างทางเรขาคณิต เมื่อเกิดการค้นพบด้วยการสร้างทางเรขาคณิต เรามักจะ
 ประจักษ์ในเรื่องเหล่านั้นว่าเป็นความจริง พิจารณาสัจพจน์ต่อไปนี้



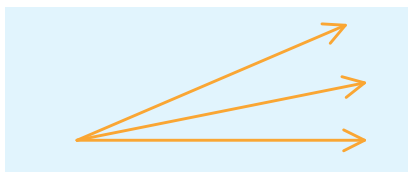
มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้



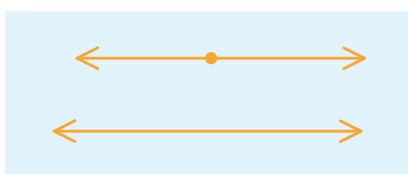
เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น



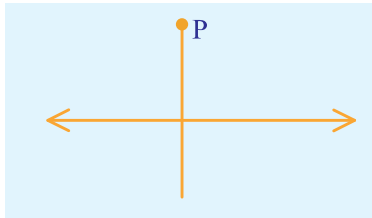
กำหนดจุดกึ่งกลางบนส่วนของเส้นตรง ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น



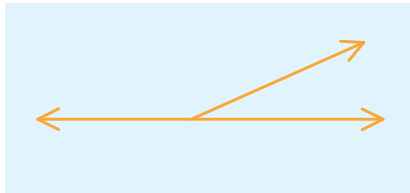
ลากเส้นแบ่งครึ่งมุมได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น



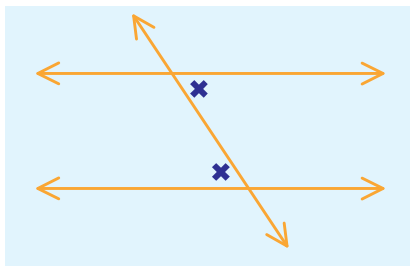
ลากเส้นขนานผ่านจุดจุดหนึ่งและขนานกับเส้นที่กำหนดให้
 ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น



จากจุดจุดหนึ่งภายนอกเส้นตรง สามารถลากเส้นตั้งฉากกับ
เส้นตรงที่กำหนดให้



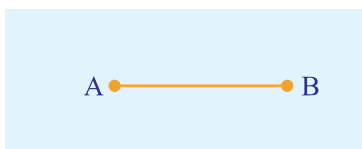
ถ้ามุมสองมุมอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
แล้ว มุมทั้งสองนั้นเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก



เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งเท่ากัน
ถ้าเส้นตรงสองเส้นถูกตัดโดยเส้นตรงเส้นหนึ่ง ทำให้มุมแย้ง
เท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่ขนานกัน

อนิยาม : จุด เส้นตรง ระนาบ

บทนิยาม ส่วนของเส้นตรง คือส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายสองจุด



ส่วนของเส้นตรง AB เขียนแทนด้วย $\overline{AB}$

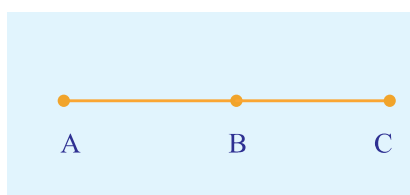
จุด A และจุด B เป็นจุดปลายของ $\overline{AB}$

ความยาวของ $\overline{AB}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $m(\overline{AB})$ หรือ AB

เช่น ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB เท่ากับ 10 เซนติเมตร

เขียนแทนด้วย $m(\overline{AB}) = 10$ เซนติเมตร

หรือ $AB = 10$ เซนติเมตร

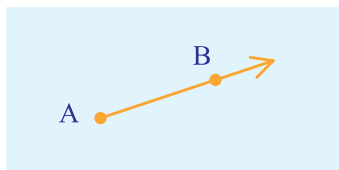


ถ้าจุด B อยู่บน $\overline{AC}$ และอยู่ระหว่างจุด A และจุด C

แล้ว $AB + BC = AC$

บทนิยาม

รังสีคือส่วนหนึ่งของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายเพียงจุดเดียว

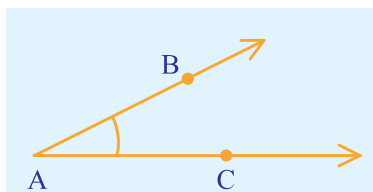


รังสี AB เขียนแทนด้วย $\vec{AB}$

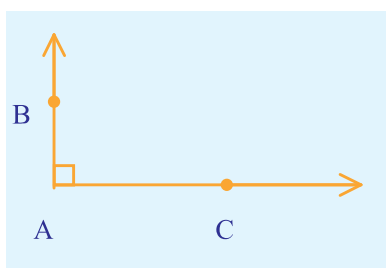
บทนิยาม

มุม คือรังสีสองเส้นที่มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน
เรียกรังสีสองเส้นนี้ว่า **แขนของมุม**
และเรียกจุดปลายที่เป็นจุดเดียวกันนี้ว่า **จุดยอดมุม**

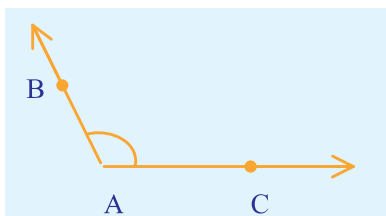
มุม



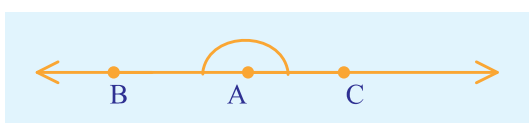
มุมที่มีขนาดเล็กกว่า 90 องศา เรียกว่า **มุมแหลม**



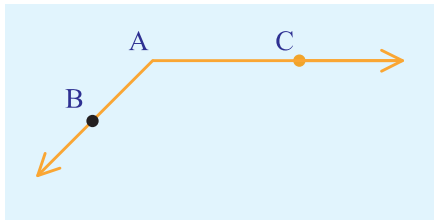
มุมที่มีขนาด 90 องศา เรียกว่า **มุมฉาก**



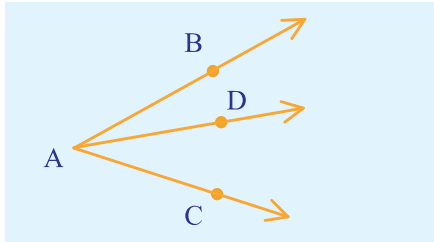
มุมที่มีขนาดโตกว่า 90 องศา แต่ไม่ถึง 180 องศา
เรียกว่า **มุมป้าน**



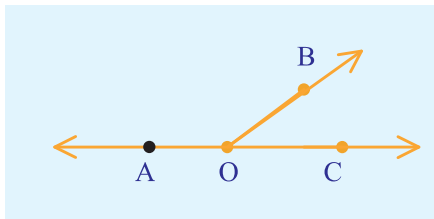
มุมที่มีขนาด 180 องศา เรียกว่า **มุมตรง**



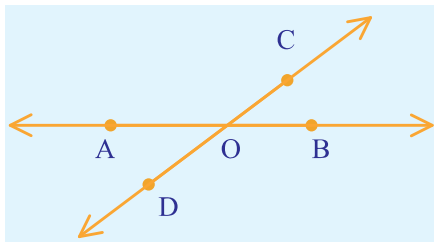
มุมที่มีขนาดโตกว่า 180 องศา แต่ไม่ถึง 360 องศา
เรียกว่า **มุมกลับ**



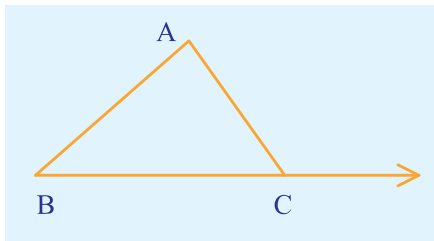
มุมสองมุมที่มีแขนร่วมหนึ่งแขน เรียกว่า **มุมประชิด**



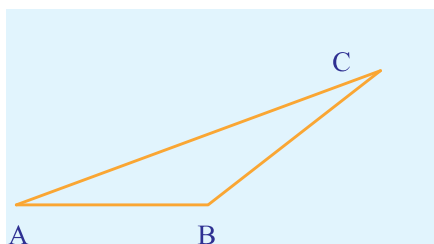
เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมประชิด
รวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก



เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

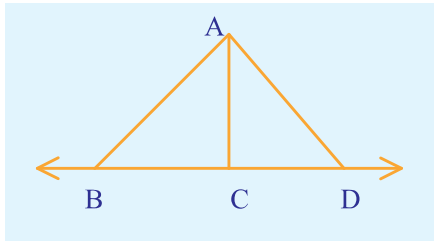


ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอก
ย่อมใหญ่กว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม



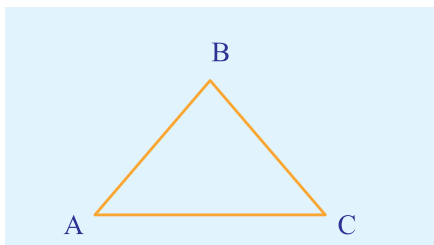
ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่ ย่อมยาว
กว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก
ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาวย่อมใหญ่
กว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านสั้น

ความยาวของด้าน

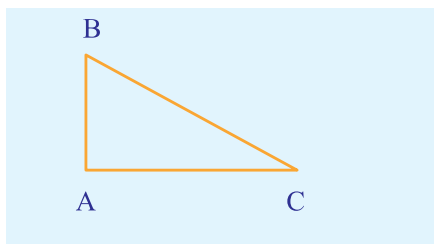


ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรวมกัน ย่อมยาวกว่าด้านที่สาม
ลากเส้นจากจุดจุดหนึ่งไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ เส้นตั้งฉาก
เป็นเส้นสั้นที่สุด

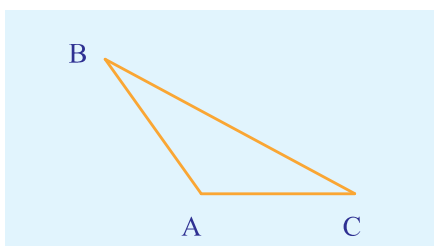
รูปสามเหลี่ยม



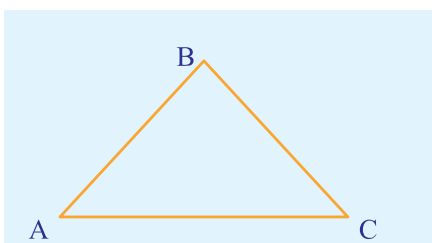
รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามเป็นมุมแหลม
เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม



รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมุมเป็นมุมฉาก
เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

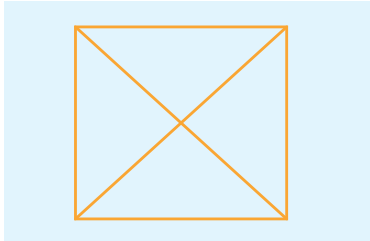


รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน
เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน



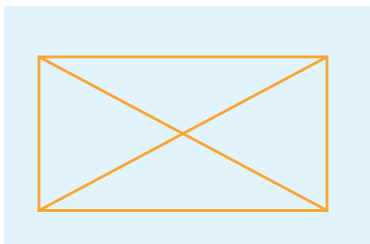
รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน และมุมที่ฐานมีขนาด
เท่ากัน เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

รูปสี่เหลี่ยม

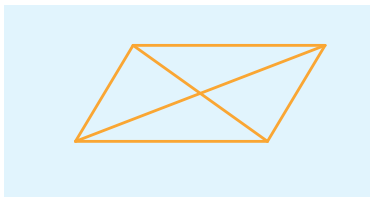


รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
เรียกว่า **รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส**

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากัน เส้นทแยงมุม
ตั้งฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันด้วย

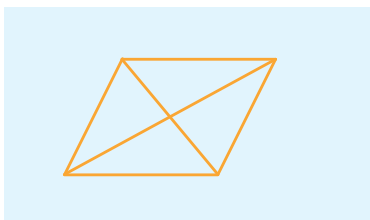


รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แต่ด้านที่อยู่ติดกันยาว
ไม่เท่ากัน มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก เรียกว่า **รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า**
เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวเท่ากัน และแบ่งครึ่งซึ่ง
กันและกัน



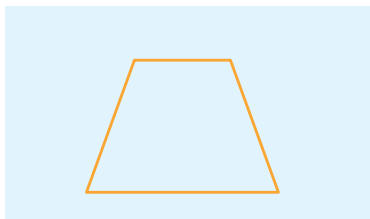
รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกัน
เรียกว่า **รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน**

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



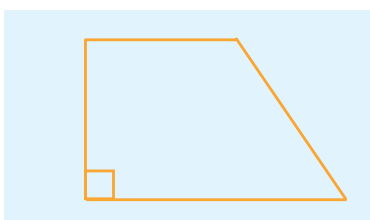
รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มุมแต่ละมุมไม่เป็น
มุมฉาก เรียกว่า **รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน**

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จะแบ่งครึ่งซึ่งกัน
และกัน และตั้งฉากกันด้วย



รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันเพียงคู่เดียว

เรียกว่า **รูปสี่เหลี่ยมคางหมู**



การเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิต

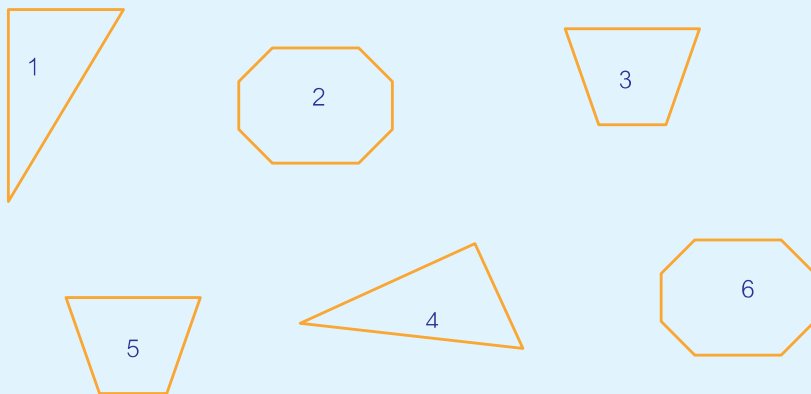
บทนิยาม การเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิต คือการเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

บทนิยาม รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับรูปหนึ่งได้สนิท

ความเท่ากันทุกประการ

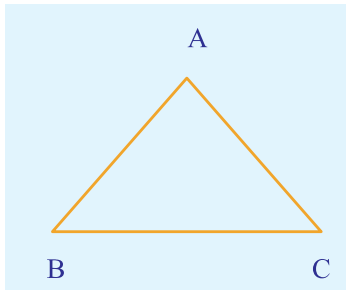
บทนิยาม รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

พิจารณารูปต่อไปนี้ว่ามีรูปคู่ใดที่ทับกันสนิทพอดี ถ้าไม่แน่ใจ
จงใช้กระดาษลอกลายลอกรูปแล้วนำไปซ้อนกัน

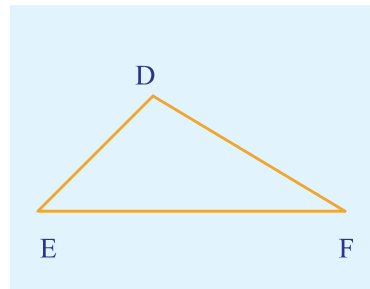
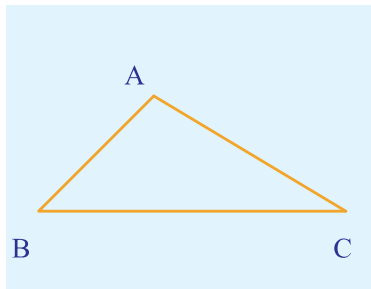


ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ก่อนที่จะกล่าวถึงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม จะนิยามรูปสามเหลี่ยมดังนี้



บทนิยาม รูปสามเหลี่ยม ABC คือรูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เชื่อมต่อจุด A จุด B และจุด C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกจุด A จุด B และจุด C ว่า จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC เรียก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ว่า ด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC เพื่อความสะดวก เขียน $\triangle ABC$ แทนคำว่า “รูปสามเหลี่ยม ABC ”



ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับรูปสามเหลี่ยม DEF ทุกประการ แล้ว

$$\begin{array}{ll} AB = DE & \hat{BAC} = \hat{EDF} \\ BC = EF & \hat{ABC} = \hat{DEF} \\ AC = DF & \hat{ACB} = \hat{DFE} \end{array}$$

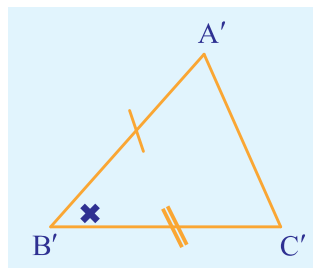
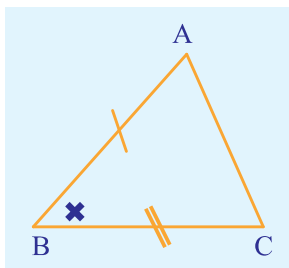
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ กล่าวคือ มีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม

ข้อตกลง เขียน $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ แทนข้อความ “รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับรูปสามเหลี่ยม DEF ทุกประการ”

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน

เมื่อต้องการทราบว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้สองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ อาจจะใช้บทนิยามที่ว่า “รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี” โดยใช้กระดาษลอกลายลอก รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งซ้อนบนอีกรูปหนึ่ง หรือสร้างรูปสามเหลี่ยมสองรูปแล้วตัดออกมาวางซ้อนกันก็ได้

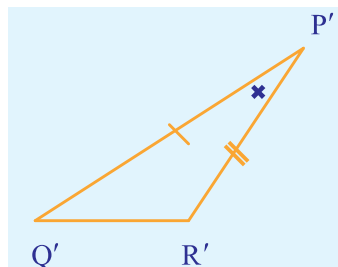
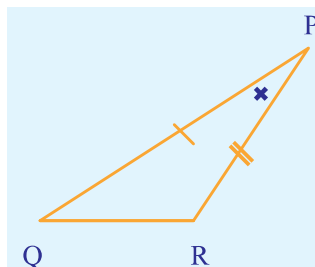
พิจารณารูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ต่อไปนี้ (ใช้กระดาษลอกลาย)



$$AB = A'B'$$

$$\hat{A}BC = \hat{A}'B'C'$$

$$BC = B'C'$$

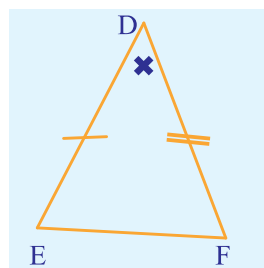
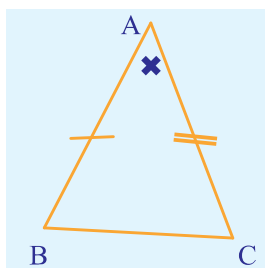


$$PQ = P'Q'$$

$$\hat{Q}PR = \hat{Q}'P'R'$$

$$PR = P'R'$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปต่อไปนี้ (ใช้การยกซ้อนกัน)



ยกรูปสามเหลี่ยม ABC ซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม DEF

ให้จุด A ทับจุด D ด้าน AB ทาบตามด้าน DE

$$AB = DE$$

จุด B ทับจุด E

เนื่องจาก $\hat{B}AC = \hat{E}DF$ ด้าน AC ทาบตามด้าน DF

$$AC = DF$$

จุด C ทับจุด F

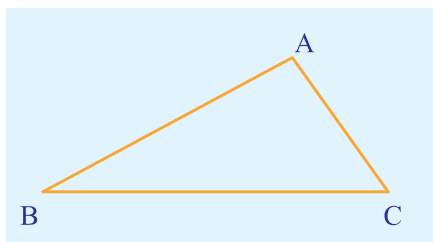
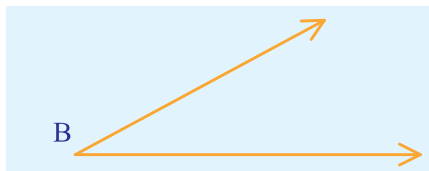
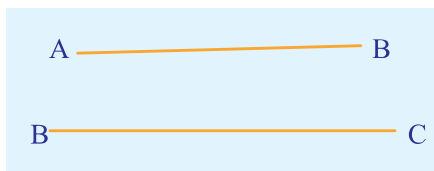
ด้าน BC ทับด้าน EF สนิท

$\triangle ABC$ ทับ $\triangle DEF$ สนิท

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

กำหนดให้ ด้าน AB และ BC เป็นด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC
มุมแหลมหนึ่งมุมซึ่งอยู่ระหว่างด้านทั้งสองนั้น



วิธีสร้าง

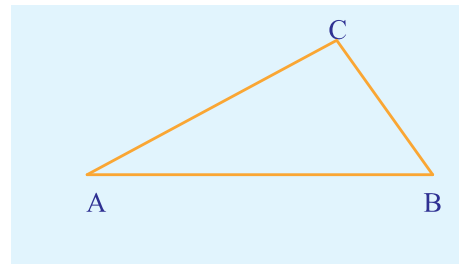
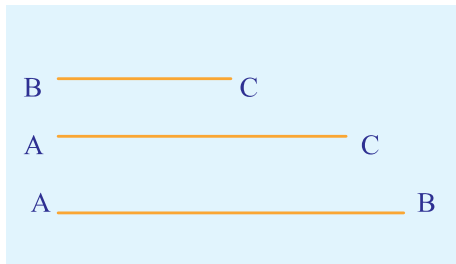
1. สร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบนกระดาษ ให้มีความยาวของด้านสองด้าน และมุมแหลมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด B เท่ากับด้านและมุมที่กำหนดให้
2. ตัดรูปสามเหลี่ยมที่สร้างแล้ว นำไปซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม ABC จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้น เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกประการ

จากที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ค. ม. ค.) ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน

พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

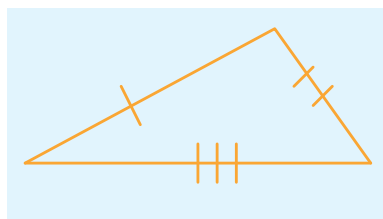
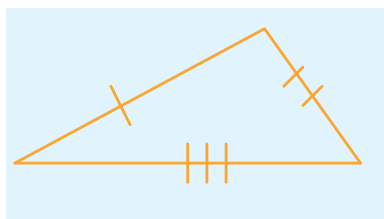


วิธีสร้าง

1. ใช้ส่วนของเส้นตรงทั้งสามเส้น ซึ่งแต่ละเส้นมีความยาวเท่ากับความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC สร้างรูปสามเหลี่ยมแล้วตัดออกมา
2. ขกรูปสามเหลี่ยมที่ตัดออกมาซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม ABC จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้น เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกประการ

จากที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด. ด. ด.) ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

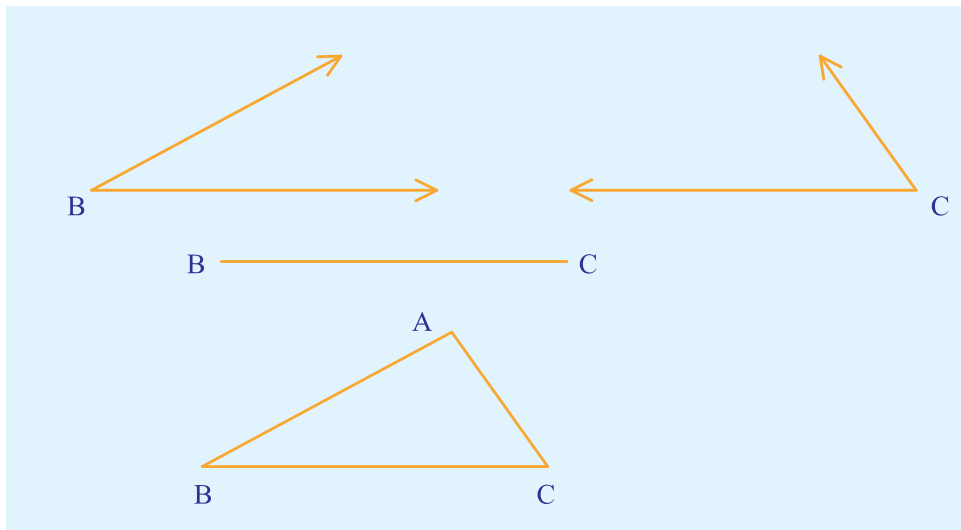
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้านแล้ว
รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ



รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม

พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

กำหนดให้ กำหนดมุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC และความยาวของด้านซึ่งอยู่ระหว่างมุมทั้งสองนั้น

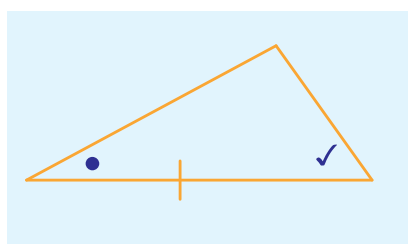
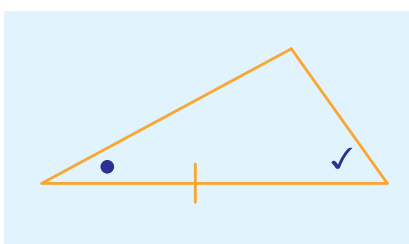


วิธีสร้าง

1. สร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบนกระดาษ ให้มีความยาวของด้านฐานเท่ากับ BC และสร้างมุมที่จุด B และมุมที่จุด C เท่ากับมุมที่กำหนดให้
2. ตัดรูปสามเหลี่ยมที่สร้าง แล้วนำไปซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม ABC จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้น เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกประการ

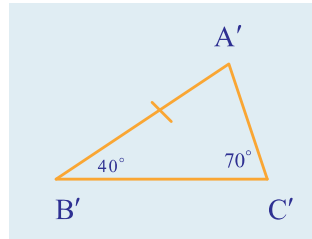
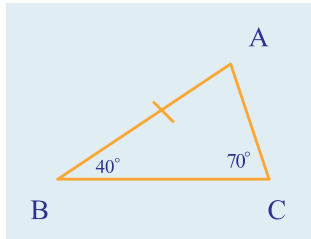
จากที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม (ม. ค. ม.) ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันด้วยแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – มุม

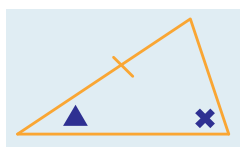
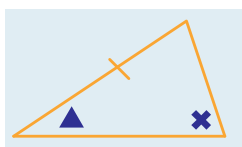
พิจารณาการสร้างรูปสามเหลี่ยมสองรูปต่อไปนี้



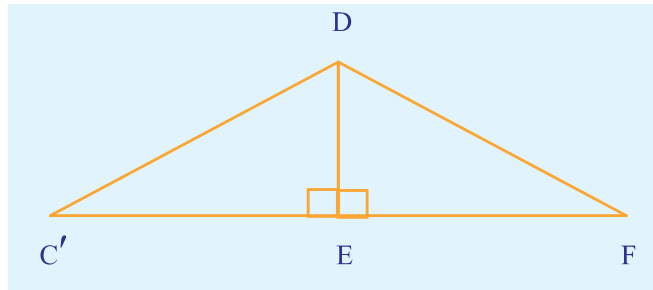
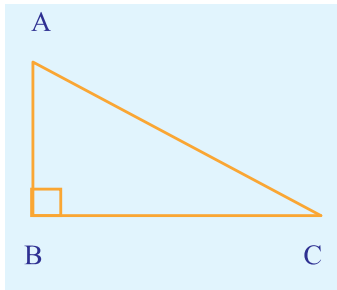
ยกรูปสามเหลี่ยม ABC ซ้อนรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ จะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองทับกันสนิท แสดงว่า $\triangle ABC$ เท่ากับ $\triangle A'B'C'$ ทุกประการ

รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – มุม (ด. ม. ม.) และเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านในลำดับเดียวกันเท่ากัน ด้านหนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากัน และด้านประกอบมุมฉากเท่ากันหนึ่งด้าน
รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป

$$\hat{A}BC = \hat{D}EF = 90^\circ$$

$$AC = DF \text{ และ } AB = DE$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

สร้าง

สร้าง $\triangle DEC'$ ให้เท่ากับ $\triangle ABC$

พิสูจน์

$$\text{เพราะว่า } \hat{A}BC = \hat{D}EF = 90^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{D}EC' = \hat{D}EF = 90^\circ$$

EF และ EC' อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน (เส้นตรงสองเส้นพบกันที่จุดหนึ่ง ทำให้มุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก เส้นตรงสองเส้นเป็นเส้นตรงเดียวกัน)

$$\text{และใน } \triangle C'DF \quad DF = DC' \quad (DC' = AC)$$

$$\hat{D}C'E = \hat{D}FE \quad (\text{มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมเท่ากัน})$$

ในรูป $\triangle DEF$ และ $\triangle DEC'$

$$\hat{D}EF = \hat{D}EC' = 90^\circ$$

$$DF = DC'$$

$$DE \text{ เป็นด้านร่วม}$$

} (พิสูจน์แล้ว)

$$\triangle DEF \cong \triangle DEC' \quad (\text{ค. ม. ม.})$$

$$\text{นั่นคือ } \triangle DEF \cong \triangle ABC$$

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล เมื่อต้องการที่จะกล่าวถึงความเป็นจริงในเรื่องใดก็จะต้องให้เหตุผล การให้เหตุผลมีสองรูปแบบ ได้แก่ การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) และการให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning or logical reasoning) เราคณิตมีการให้เหตุผลทั้งสองแบบดังกล่าวข้างต้น

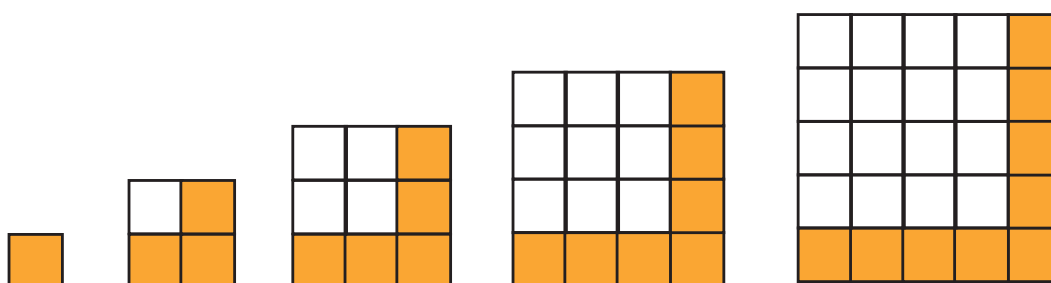
การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการของการสังเกตข้อมูล พิจารณาแบบรูปแล้วสรุปเป็นนัยทั่วไปจากการสังเกตนั้น

การศึกษาเรขาคณิตเริ่มต้นมานานแล้วในอียิปต์และบาบิโลเนีย เรขาคณิตของคนในสมัยโบราณ เป็นการรวบรวมเกี่ยวกับการวัดและกระบวนการง่าย ๆ ซึ่งให้คำตอบที่ถูกต้องอย่างมีเหตุผล การวัดและกระบวนการเหล่านี้ ได้กระทำเรื่อยมาในเวลานานยาวนานซึ่งเป็นผลมาจากประสบการณ์และการสังเกต เขาใช้การคำนวณหาพื้นที่และวางขอบเขตของท้องทุ่งที่จะทำการเกษตร หลังจากปีที่เกิดน้ำท่วมในลุ่มแม่น้ำไนล์ เขาสร้างคลองที่เก็บน้ำและพิระมิดที่ยิ่งใหญ่

การให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่ใช่สำคัญเฉพาะกับเรขาคณิตเท่านั้น การสืบสวนทางวิทยาศาสตร์ส่วนใหญ่ รวมทั้งการสืบสอบทางคณิตศาสตร์ เริ่มต้นด้วยการให้เหตุผลแบบอุปนัยทั้งนั้น เมื่อนักคณิตศาสตร์ให้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ข้อสรุปทั่วไปเรียกว่า ข้อความคาดการณ์ (Conjecture)

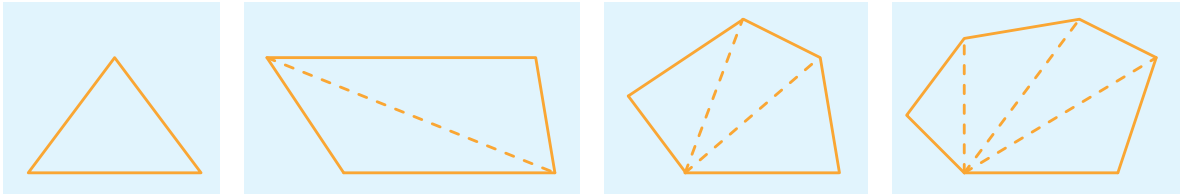
เพื่อให้เกิดความเข้าใจจะยกตัวอย่างที่เป็นเรขาคณิตดังนี้

ตัวอย่างที่ 1



ความยาวของด้านหนึ่งด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	1	2	3	4	5	6	...	35	n
จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เรเงา	1	3	5	?	?	?	...	?	?
จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ไม่เรเงา	0	1	4	?	?	?	...	?	?

ตัวอย่างที่ 2 จำนวนของเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่งในรูปหลายเหลี่ยม



จำนวนด้านของรูปเหลี่ยม	3	4	5	6	...	35	n
เส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่งจุด	?	?	?	?	...		?
จำนวนรูปสามเหลี่ยม	1	2	?	?	...		?

จากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ดังกล่าวข้างต้น ถ้าใช้การสังเกตพิจารณาแบบรูปก็จะสามารถเติมช่องว่างได้ ซึ่งเป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัย และสามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้

การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่แสดงให้เห็นว่า ถ้ายอมรับว่าข้อความกลุ่มหนึ่งเป็นความจริงแล้ว ข้อความอื่นก็อาจจะแสดงให้เห็นจริงได้ โดยอ้างถึงข้อความที่เป็นจริงเหล่านั้น

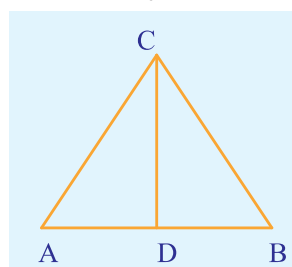
จงใช้เหตุผลแบบนิรนัยแสดงให้เห็นว่า ข้อความคาดการณ์ต่อไปนี้เป็นความจริง

ตัวอย่างที่ 3

ข้อความคาดการณ์ : เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

สิ่งที่กำหนดให้

$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



$\overline{CD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle ACB$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD$$