

ติวสอบ



9 วิชา สามัญ

“
พร้อมสอบ
ใหม่ล่าสุด
”

- สรุปเนื้อหาครอบคลุมตั้งแต่ระดับชั้น ม.4 ถึง ม.6
- เตรียมความพร้อมสำหรับสอบเข้ามหาวิทยาลัย TCAS และ กสพท.
- จำลองข้อสอบเสมือนจริง พร้อมเฉลยละเอียดทุกข้อ



โดยทีมงาน
ครูจิวติวเตอร์

คำนำ

9 วิชาสามัญ เป็นข้อสอบกลางที่จัดขึ้นโดยสถาบันทดสอบการศึกษาแห่งชาติ (สทศ.) เพื่อใช้ประกอบการสมัครเข้าศึกษาคณะต่างๆ ของมหาวิทยาลัยในรอบการสอบตรง รวมไปถึงกลุ่มสถาบันแพทยศาสตร์แห่งประเทศไทย (กสพท.) โดยจัดสอบรายวิชาหลัก ได้แก่ ภาษาไทย สังคมศึกษา ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี และชีววิทยา จึงถือว่าเป็นสนามสอบที่มีความสำคัญอย่างมาก

หนังสือ “ติวสอบ 9 วิชาสามัญ” เล่มนี้ คณะผู้เขียนมีวัตถุประสงค์ในการจัดทำขึ้นเพื่อให้นักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ได้ใช้ในการศึกษา ฝึกทักษะ และเตรียมความพร้อมก่อนสอบจริงเพื่อให้ผลสอบมีประสิทธิภาพมากที่สุด

หนังสือเล่มนี้ประกอบไปด้วยการสรุปเนื้อหาที่ตรงประเด็นและกระชับตรงตามข้อสอบจริงย้อนหลังใหม่ล่าสุด ข้อสอบเสมือนจริงจำนวนมากถูกออกแบบมาเพื่อวัดความเข้าใจในแต่ละรายวิชา และเฉลยละเอียดพร้อมแนวคิดต่อยอดทุกข้อ

คณะผู้เขียนหวังว่าหนังสือ “ติวสอบ 9 วิชาสามัญ” เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์แก่นักเรียน ครู และบุคคลทั่วไปที่สนใจในการสอบ 9 วิชาสามัญ เป็นแนวทางในการศึกษาค้นคว้า ให้ประสบผลสำเร็จในการสอบและบรรลุความมุ่งหมายทุกประการ

ด้วยความปรารถนาดี
คณะผู้เขียนหนังสือ “ติวสอบ 9 วิชาสามัญ”

สารบัญ

» 1. วิชาคณิตศาสตร์	1
▶ แนวข้อสอบคณิตศาสตร์ 9 วิชาสามัญ	45
▶ เฉลยแนวข้อสอบคณิตศาสตร์ 9 วิชาสามัญ	52
» 2. วิชาฟิสิกส์	71
▶ แนวข้อสอบฟิสิกส์ 9 วิชาสามัญ	115
▶ เฉลยแนวข้อสอบฟิสิกส์ 9 วิชาสามัญ	124
» 3. วิชาเคมี	143
▶ แนวข้อสอบเคมี 9 วิชาสามัญ	222
▶ เฉลยแนวข้อสอบเคมี 9 วิชาสามัญ	256
» 4. วิชาชีววิทยา	291
▶ แนวข้อสอบชีววิทยา 9 วิชาสามัญ	367
▶ เฉลยแนวข้อสอบชีววิทยา 9 วิชาสามัญ	382
» 5. วิชาภาษาไทย	423
▶ แนวข้อสอบภาษาไทย 9 วิชาสามัญ	
▶ แนวข้อสอบการอ่าน	425
▶ แนวข้อสอบการเขียน	434
▶ แนวข้อสอบการพูด การฟัง	445
▶ แนวข้อสอบหลักภาษา	461
▶ เฉลยแนวข้อสอบภาษาไทย 9 วิชาสามัญ	472
» 6. วิชาสังคมศึกษา	487
▶ แนวข้อสอบสังคมศึกษา 9 วิชาสามัญ	
▶ แนวข้อสอบศาสนา ศีลธรรม และจริยธรรม	493
▶ แนวข้อสอบหน้าที่พลเมือง วัฒนธรรม และการดำเนินชีวิตในสังคม	500
▶ แนวข้อสอบเศรษฐศาสตร์	507
▶ แนวข้อสอบประวัติศาสตร์	515
▶ แนวข้อสอบภูมิศาสตร์	522
▶ เฉลยแนวข้อสอบสังคมศึกษา 9 วิชาสามัญ	524
» 7. วิชาภาษาอังกฤษ	535
▶ แนวข้อสอบภาษาอังกฤษ 9 วิชาสามัญ	
▶ PRACTICE FOR SECTION 1 : LISTENING AND SPEAKING	539
▶ PRACTICE FOR SECTION 2 : READING COMPREHENSION	544
▶ PRACTICE FOR SECTION 3.1 : PARAGRAPH ORGANIZATION	552
▶ PRACTICE FOR SECTION 3.2 : CLOZE TEST	558
▶ เฉลยแนวข้อสอบภาษาอังกฤษ 9 วิชาสามัญ	563

จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวน

การแก้สมการ

ทฤษฎีบทเศษเหลือ "พหุนาม $P(x)$ ถูกหารด้วย $x - c$ แล้วเศษจะมีค่าเท่ากับ $P(c)$ "

ตัวอย่าง

$$P(x) = x^2 + 3x - 1 \text{ ถูกหารด้วย } x - 2$$

$$\text{เศษเท่ากับ } P(2) = 2^2 + 3(2) - 1 = 9$$

ใช้สูตรแยกตัวประกอบหรือใช้สูตร

ผลบวกและผลคูณของคำตอบทั้งหมด

$$P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_0$$

ผลบวกของคำตอบทั้งหมด คือ $-\frac{a_{(n-1)}}{a_n}$

ผลคูณของคำตอบทั้งหมด คือ $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

ถ้า $a, b, c \in \mathbb{R}$ และ $ax^2 + bx + c = 0$ แล้ว

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac > 0$ แล้วคำตอบเป็นจำนวนจริง 2 คำตอบ

$b^2 - 4ac = 0$ แล้วคำตอบเป็นจำนวนจริง 1 คำตอบ

$b^2 - 4ac < 0$ แล้วคำตอบเป็นจำนวนจริง 0 คำตอบ

สูตรพหุนาม

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\sqrt{(a + b) \pm 2\sqrt{ab}} = \pm (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$$

การแก้อสมการ

วิธีการแก้อสมการตัวแปรเดียว

ขั้นที่ 1 จัดรูปอสมการให้อยู่ในรูป $(Ax + a)(Bx + b)(Cx + c) \dots$ และอีกข้างหนึ่งของอสมการเป็น 0

ขั้นที่ 2 นำแต่ละวงเล็บจับเท่ากับ 0 และหาค่า x เพื่อมาใส่บนเส้นจำนวนเพื่อแบ่งออกเป็นช่วง ๆ

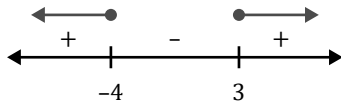
ขั้นที่ 3 ให้ขวามือของเส้นจำนวนเป็น + เสมอ จากนั้นใส่ -, + สลับกันไปเรื่อยๆ

ขั้นที่ 4 $>, \geq$ คำตอบเป็นช่วง + แต่ถ้าเป็น $<, \leq$ คำตอบจะเป็นช่วง -

(สำหรับ \geq และ \leq ให้เอาจุด x จากขั้นที่ 2 เป็นคำตอบด้วย)

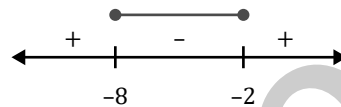
ตัวอย่าง

$$(x + 4)(x - 3) \geq 0$$



ตอบ $(-\infty, -4] \cup [3, \infty)$

$$(x + 8)(x + 2) \leq 0$$



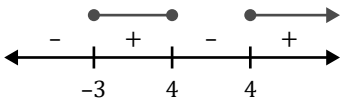
ตอบ $[-8, -2]$

แก้สมการโดยวงเล็บซ้ายมือดีกรีมากกว่า 1

วงเล็บดีกรีคู่ให้ใส่ค่าบนเส้นจำนวน 2 จุด แต่ถ้าวงเล็บดีกรีคี่ให้ใส่ค่าบนเส้นจำนวน 1 จุด

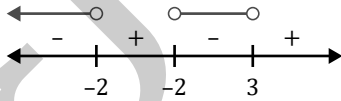
ตัวอย่าง

$$(x - 4)^2(x + 3)^3 \geq 0$$



ตอบ $[-3, 4] \cup [4, \infty)$

$$(x - 3)^5(x + 2)^4 < 0$$



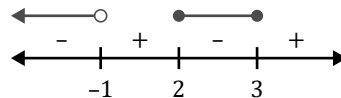
ตอบ $(-\infty, -2) \cup (-2, 3)$

แก้สมการโดยวงเล็บซ้ายมือเป็นเศษส่วน

หลักการ คือ นำค่าในแต่ละวงเล็บทั้งตัวเศษและส่วนมาใส่บนเส้นจำนวน แต่ต้องนำค่าที่ทำให้ตัวหารเท่ากับศูนย์ออกจากช่วงคำตอบ

ตัวอย่าง

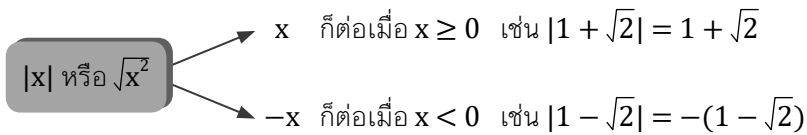
$$\frac{(x - 3)(x - 2)}{(x + 1)} \leq 0$$



ตอบ $(-\infty, -1) \cup [2, 3]$

ค่าสัมบูรณ์

นิยาม



คุณสมบัติค่าสัมบูรณ์

$$|a| \geq 0$$

$$|-a| = |a|$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$|a|^2 = |a^2| = a^2$$

$\sqrt[n]{a^n}$

$|a|$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคู่

a ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$$|a| + |b| \geq |a + b| \quad \text{และ} \quad |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$|a| + |b| = |a + b| \quad \text{เมื่อ} \quad ab \geq 0$$

$$|a| + |b| = |a - b| \quad \text{เมื่อ} \quad ab \leq 0$$

แก้สมการและอสมการสัมบูรณ์

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์

รูปแบบที่ 1 $|\blacksquare| = c$ จะได้ $\blacksquare = \pm c$

และ $c \geq 0$

เช่น $|x + 5| = 3$

$$x + 5 = \pm 3$$

$$x = -2, -8$$

ตอบ $x = -2, -8$

การแก้อสมการค่าสัมบูรณ์

รูปแบบที่ 1 $|\blacksquare| \geq c$

จะได้ $\blacksquare \geq c \cup \blacksquare \leq -c$

เช่น $|x - 2| > 3$

$$x - 2 > 3 \cup x - 2 < -3$$

$$x > 5 \cup x < -1$$

ตอบ $x > 5 \cup x < -1$

รูปแบบที่ 2 $|\blacksquare| = \blacksquare$ เมื่อ $\blacksquare \geq 0$
 $|\blacksquare| = -\blacksquare$ เมื่อ $\blacksquare < 0$

เช่น $|x+2| = x+2$
 $x+2 \geq 0$
 $x \geq -2$
ตอบ $x \geq -2$

รูปแบบที่ 3 $|\blacksquare| = |\Delta|$ จะได้ $\blacksquare^2 = \Delta^2$

เช่น $|2x-1| = |x+1|$
 $(2x-1)^2 = (x+1)^2$
 $(2x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$
 $(2x-1-x-1)(2x-1+x+1) = 0$
 $(x-2)(3x) = 0$
 $x = 2, 0$
ตอบ $x = 2, 0$

รูปแบบที่ 2 $|\blacksquare| \leq c$ จะได้ $-c \leq \blacksquare \leq c$

เช่น $|x+1| < 2$
 $-2 < x+1 < 2$
 $-3 < x < 1$
ตอบ $-3 < x < 1$

รูปแบบที่ 3 $|\blacksquare| \geq |\Delta|$ จะได้ $\blacksquare^2 \geq \Delta^2$

เช่น $|2x-1| < |x+1|$
 $(2x-1)^2 < (x+1)^2$
 $(2x-1)^2 - (x+1)^2 < 0$
 $(x-2)(3x) < 0$
ตอบ $(2, 0)$

แก้สมการและอสมการที่ติดรากที่สอง

สมการติดรากที่สอง

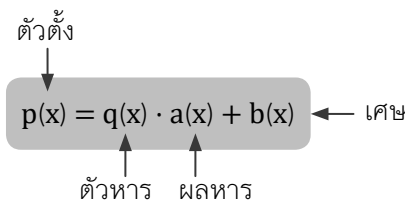
ขั้นที่ 1 ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง
 ขั้นที่ 2 ตรวจสอบคำตอบ $\sqrt{\blacksquare} \rightarrow \blacksquare \geq 0$

อสมการติดรากที่สอง

ขั้นที่ 1 กำหนดเงื่อนไข $\sqrt{\blacksquare} \rightarrow \blacksquare \geq 0$
 ขั้นที่ 2 ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง โดย 2 ข้างต้อง ≥ 0
 ขั้นที่ 3 เงื่อนไขทั้งหมด \cap

ทฤษฎีบทการหารพหุนาม

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n และ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m โดย $m < n$ ซึ่งดีกรีของเศษ $b(x)$ จะน้อยกว่าดีกรีของตัวหารเสมอ



ตัวหารร่วมมาก (ท.ร.ม.)

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์อย่างน้อยหนึ่งตัว จำนวนเต็มบวก d จะเป็นตัวหารร่วมมาก (ท.ร.ม.) ของ a และ b เมื่อ d มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $d|a$ และ $d|b$
2. ถ้า c เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $c|a$ และ $c|b$ แล้วจะได้ $c|d$

การหาจำนวนเต็มบวก d ที่หาร A, B, C แล้วเหลือเศษเท่ากัน โดยที่ $A > B > C$ หลักการ ให้หา ท.ร.ม. ของ $A - B, B - C$ จะได้ d คือ ตัวประกอบของ ท.ร.ม. นี้

สัญลักษณ์ ตัวหารร่วมมาก (ท.ร.ม.) ของ a และ b เขียนแทนด้วย (a, b)

- ท.ร.ม. ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเสมอ ถ้าเจอเลขติดลบ หา ท.ร.ม. ได้ โดยใช้เลขบวกมาคิดแทน
- $(a, 0) = (0, a) = |a|$ โดยที่ $a \neq 0$
- $a, b \in P$ (จำนวนเฉพาะ) จะได้ $(a, b) = 1$ เสมอ เราเรียกจำนวนที่ ท.ร.ม. เป็น 1 ว่าจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

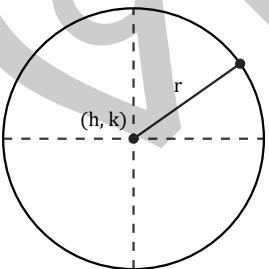
ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวนเต็มบวก c ที่มีค่าน้อยที่สุดซึ่ง $a|c$ และ $b|c$ เรียกว่า ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ a และ b
สัญลักษณ์ $[a, b]$ แทน ค.ร.น. ของ a และ b

ภาคตัดกรวย

วงกลม

บทนิยาม เซตของจุดบนระนาบที่มีระยะห่างจาก "จุดคงที่" (ศูนย์กลาง) เป็น "ระยะทางคงที่" (รัศมี) เสมอ

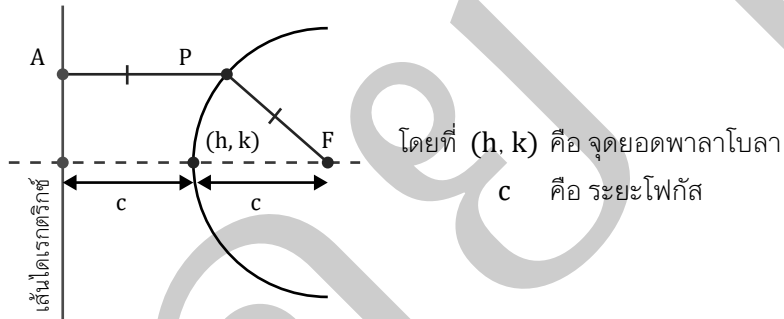
วงกลม	สมการรูปมาตรฐาน	สมการรูปทั่วไป
	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ (h, k) คือ จุดศูนย์กลางวงกลม r คือ รัศมีวงกลม	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ $(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ $r = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$ $= \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$

สรุป

- สมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เป็นสมการวงกลมเมื่อ $A^2 + B^2 - 4C > 0$
- สามารถหาศูนย์กลางได้จาก สูตร $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
- หารัศมีได้จากสูตร $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ หรือ $r = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$

พาราโบลา

บทนิยาม เซตของจุดบนระนาบ ซึ่งห่างจากจุดคงที่ (โฟกัส) มีค่าเท่ากับระยะทางจากจุดนั้นไปเส้นตรงคงที่ (เส้นไดเรกทริกซ์) นั่นคือ “ $PA = PF$ ” นั่นเอง

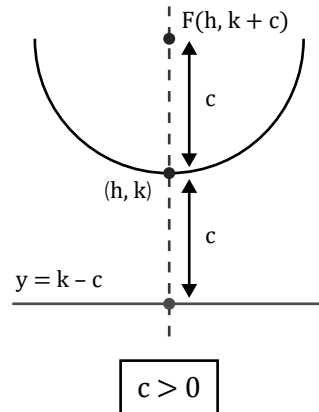
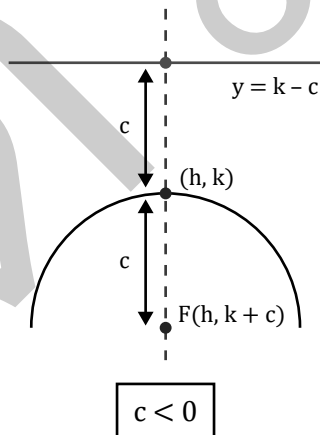


พาราโบลาแกน Y

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

จุดโฟกัส คือ $(h, k + c)$

สมการไดเรกทริกซ์ $y = k - c$

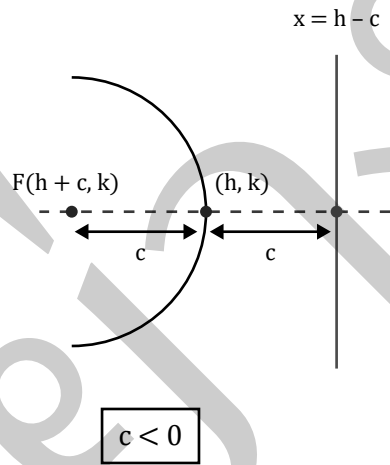
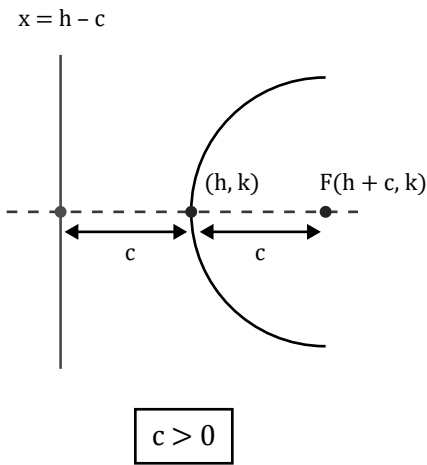


พาราโบลาแกน X

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

จุดโฟกัส คือ $(h + c, k)$

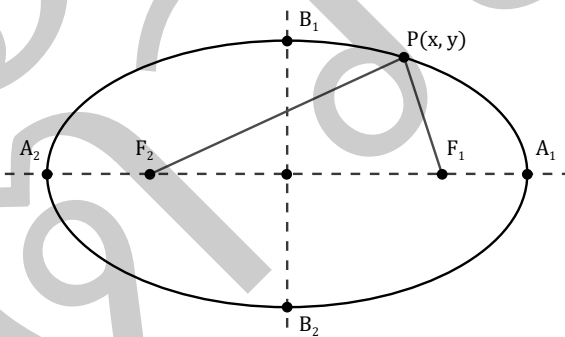
สมการไดเรกตริกซ์ $x = h - c$



วงรี

บทนิยาม เซตของจุดซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุดคงที่สองจุด (โฟกัส)

มีค่าคงตัวเสมอ คือ $PF_1 + PF_2 = 2a$ (ค่าคงที่)



แกนเอกยาว $2a$

แกนโทยาว $2b$

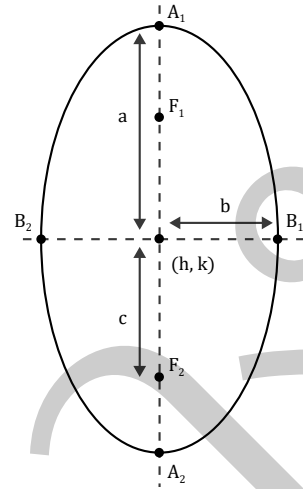
ความยาวโฟกัส $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$

วงรีแนวตั้ง

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

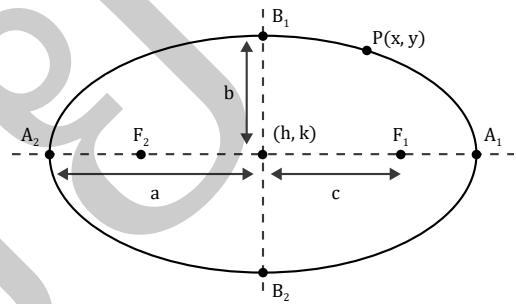
จุดยอด คือ $A_1(h, k + a)$, $A_2(h, k - a)$
 จุดโฟกัส คือ $F_1(h, k + c)$, $F_2(h, k - c)$
 จุดปลายแกนโท $B_1(h + b, k)$, $B_2(h - b, k)$



วงรีแนวนอน

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

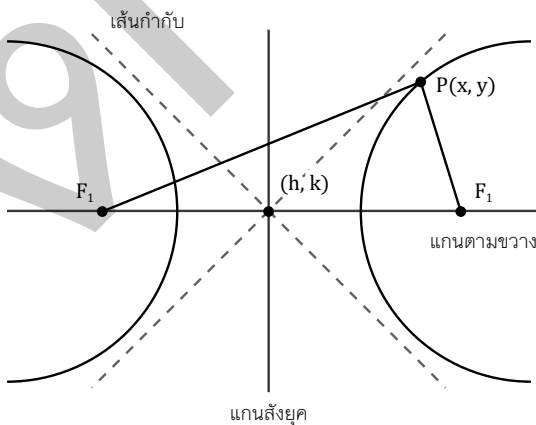
จุดยอด คือ $A_1(h + a, k)$, $A_2(h - a, k)$
 จุดโฟกัส คือ $F_1(h + c, k)$, $F_2(h - c, k)$
 จุดปลายแกนโท $B_1(h, k + b)$, $B_2(h, k - b)$



ไฮเพอร์โบลา

บทนิยาม เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ

ไปยังจุดคงที่สองจุด (โฟกัส) มีค่าคงตัวเสมอ คือ $|PF_1 - PF_2| = 2a$ (ค่าคงที่)



ระยะโฟกัส $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

สมการเส้นกำกับ $\pm \frac{b}{a}(x - h) = y - k$

ความยาวแกนตามขวาง $2a$

ความยาวแกนตั้งยุค $2b$

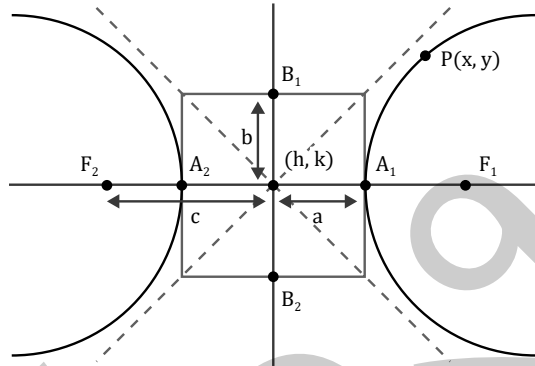
ไฮเพอร์โบลาแนวนอน

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

จุดยอด คือ $(h + a, k)$, $(h - a, k)$

จุดโฟกัส คือ $(h + c, k)$, $(h - c, k)$

จุดปลายแกนโท $(h, k + b)$, $(h, k - b)$



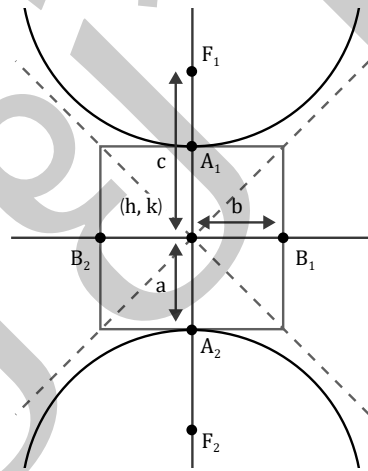
ไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

จุดยอด คือ $(h, k + a)$, $(h, k - a)$

จุดโฟกัส คือ $(h, k + c)$, $(h, k - c)$

จุดปลายแกนโท $(h + b, k)$, $(h - b, k)$

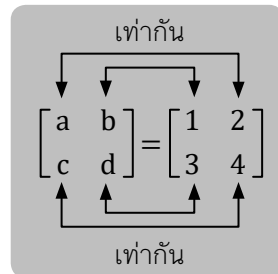


เมตริกซ์

คุณสมบัติของเมตริกซ์

การเท่ากันของเมตริกซ์

1. มิติของเมตริกซ์แรก = มิติของเมตริกซ์ที่สอง
2. สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากันและตรงกันทุกตำแหน่ง



ทรานสโพสของเมตริกซ์

1. เมตริกซ์เปลี่ยนจากแถวเป็นหลัก เปลี่ยนหลักเป็นแถว
2. มิติจาก $m \times n$ จะเป็น $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$
$$A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

การบวกลบเมตริกซ์

1. เมตริกซ์ $A \pm B$ ได้ ก็ต่อเมื่อ มิติเมตริกซ์ $A =$ มิติเมตริกซ์ B
2. การหาผลลัพธ์ $A \pm B$ ให้นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกัน มาบวกหรือลบกัน

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์

คูณด้วยสเกลาร์ $A = [a_{ij}] \rightarrow kA = [ka_{ij}]$ คือ นำค่าคงที่ (k) คูณด้วยสมาชิกทุกตัวในเมตริกซ์

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

1. $A \times B$ จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ หลัก $A =$ แถวของ B
2. มิติ $A \times B =$ มิติ แถว $A \times$ หลัก B
3. นำแถวคูณด้วยหลักที่ละส่วน แล้วนำมาบวกกัน

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(5) + 2(7) & 1(6) + 2(8) \\ 3(5) + 4(7) & 3(6) + 4(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนต์

เป็นการเปลี่ยนเมตริกซ์จัตุรัสไปเป็นตัวเลข เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

คุณขึ้น "สลับเครื่องหมาย" จะได้ $-bc$

คุณลง "เหมือนเดิม" จะได้ ad

คุณสมบัติดีเทอร์มิแนนต์

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\det A^t = \det A$$

$$\det(kA) = k^n \det A; n \text{ คือ มิติของ } A$$

$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

1. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ขนาด 1×1

$$\text{ถ้า } A = [a] \text{ จะได้ว่า } A^{-1} = \left[\frac{1}{a} \right]$$

2. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ขนาด 2×2

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ และ } \det A \neq 0 \text{ แล้ว } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$$

3. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

เพิ่มเติม $(\det A)^{(n-1)} = \det(\text{adj } A)$

คุณสมบัติอินเวอร์สของเมตริกซ์

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

ระบบสมการเชิงเส้น

กฎของคราเมอร์

ตัวอย่าง

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+2}{2+1} = 1$$

$$y = \frac{\det y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4-1}{2+1} = 1$$

การหาค่า x ทำได้โดยการนำเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ไปแทนค่าในหลักที่ 1 ของเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และหลังจากนั้นแทนเข้าไป

$$x = \frac{\det x}{\det A}$$

การหาค่า y ทำได้โดยการนำเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ไปแทนค่าในหลักที่ 2 ของเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และหลังจากนั้นแทนเข้าไป

$$y = \frac{\det y}{\det A}$$

Row Operation

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right]$$

ตัวอย่าง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

เกิดจาก $R_1 - 2R_2$

เกิดจาก $R_1 - R_3$

- สลับแถวที่ i กับแถวที่ j (เขียนแทนด้วย R_{ij})
- คูณแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c โดยที่ $c \neq 0$ (เขียนแทนด้วย cR_i)
- เปลี่ยนแถวที่ i โดยนำค่าคงตัว c คูณกับแถวที่ j แล้วบวกหรือลบกับแถวที่ i (เขียนแทนด้วย $R_i \pm cR_j$)
- กระบวนการจะสิ้นสุดเมื่อได้เมตริกซ์เอกลักษณ์

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

แก้สมการ Exponential

ฐานเท่ากัน – จับเลขชี้กำลังเท่ากัน

เช่น $2^x = 2^3$
 $x = 3$

เลขชี้กำลังเท่ากัน – จับเลขชี้กำลังเท่ากับ 0

เช่น $3^{(x-1)} = 2^{(x-1)}$
 $x - 1 = 0$
 $x = 1$

ฐานไม่เท่าเลขชี้กำลังไม่เท่า – take log

เช่น $2^x = 3^{(x+1)}$
 $\log 2^x = \log 3^{(x+1)}$
 $x \log 2 = (x+1) \log 3$
 $0.3x = (x+1)(0.48)$
 $x = -2.67$

รูปแบบอื่นๆ

เช่น

ข้อ 1) $3^x + 3^{(x+1)} = 108$

$$3^x + 3 \cdot 3^x = 108$$

$$4 \cdot 3^x = 108$$

$$3^x = 27$$

$$x = 3$$

ข้อ 2) $2^{2x} - 2^x - 2 = 0$

สมมติ $a = 2^x$ จะได้

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$a = 2, -1$$

$$2^x = 2^1, -1$$

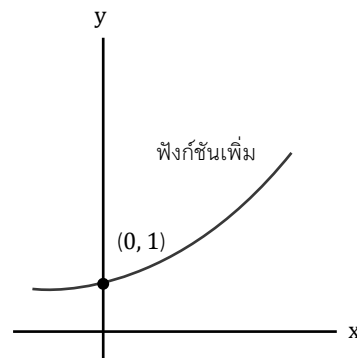
$$x = 1$$

แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล

ฟังก์ชันเพิ่ม ($a > 1$)

ถ้า $a^m > a^n$ แล้ว $m > n$

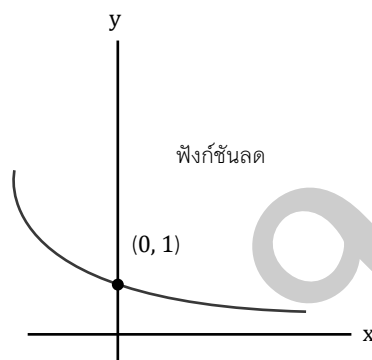
เช่น $2^x \geq 2^3$
 $x \geq 3$



ฟังก์ชันลด ($0 < a < 1$)

ถ้า $a^m > a^n$ แล้ว $m < n$

เช่น $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow x \leq 3$



คุณสมบัติลอการิทึม

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$\log_y x = \frac{\log x}{\log y} = \frac{1}{\log_x y}$$

แก้มการลอการิทึม

ฐานเท่ากันหลัง log เท่ากันด้วย

$$\log_a x_1 = \log_a x_2$$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

เช่น $\log_2 x = \log_2 3$

$$x = 3$$

ฐานไม่เท่ากันหลัง log เท่ากันด้วย

$$\log_a x = \log_b x$$

$$x = 1$$

เช่น $\log_3 x = \log_2 x$

$$x = 1$$

แก้มการลอการิทึม

ฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า $\log_a m > \log_a n$ แล้ว $m > n$

เช่น $\log_2 x > \log_2 3$

$$x > 3$$

ฟังก์ชันลด ($0 < a < 1$)

ถ้า $\log_a m > \log_a n$ แล้ว $m < n$

เช่น $\log_{0.5} x > \log_{0.5} 3$

$$x < 3$$

รูปแบบอื่นๆ

เช่น

$$\log_2 x - 4 \log_x 2 - 3 = 0$$

$$\log_2 x - \frac{4}{\log_2 x} - 3 = 0$$

สมมติ $A = \log_2 x$

$$A - \frac{4}{A} - 3 = 0$$

$$A^2 - 3A - 4 = 0$$

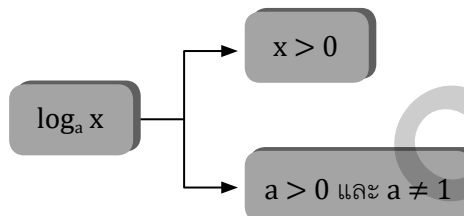
$$(A - 4)(A + 1) = 0$$

$$\log_2 x = 4, -1$$

$$x = 2^4, 2^{-1}$$

$$= 16, \frac{1}{2}$$

การแก้สมการและอสมการต้องตรวจคำตอบ



ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$$

ครึ่งมุม

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

ผลบวกและผลต่างของมุม 2 มุม

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

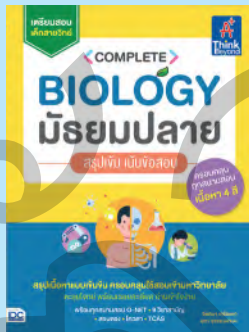
$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

หนังสือ ทิวสอบ 9 วิชาสามัญ

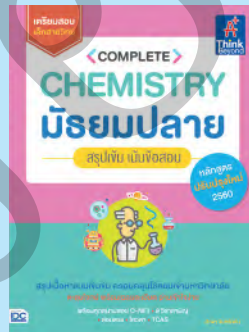
สรุปเนื้อหาครบถ้วน
แนวข้อสอบหลากหลาย พร้อมเฉลยละเอียดทุกข้อ

โดยทีมติวเตอร์คุณภาพ

คณิตศาสตร์-ฟิสิกส์ | อธิชาติ ตียะระ (วิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)
เคมี | วรากรณ์ กิ่งเงิน และวทัญญู ศรีทอง (วิศวกรรมเคมี และประกาศนียบัตรบัณฑิต สาขาวิชาชีวเคมี)
ชีววิทยา | ศรายุทธ ดอนมอญ (แพทยศาสตร์ศิริราชพยาบาล มหาวิทยาลัยมหิดล)
ภาษาอังกฤษ | สรณีนท์ เที้ยวจ้อง (แพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยเจ้อเจียง ประเทศจีน)
ภาษาไทย | ธนิชพร ธนวัฒน์ (มนุษยศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์)
สังคมศึกษา | พันธิกา นอนน้อมธรรม (นิติศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์)



Complete Biology มัธยมปลาย
(สรุปเข้ม เน้นข้อสอบ)



Complete Chemistry มัธยมปลาย
(สรุปเข้ม เน้นข้อสอบ)



Complete Math มัธยมปลาย
(สรุปเข้ม เน้นข้อสอบ)



ซื้อสะดวก ส่งถึงบ้านที่ Shopee และ Lazada หรือผ่านทาง
ร้านหนังสือออนไลน์ www.thinkbeyondbook.com



thinkbeyond books

ISBN(eBook) 885-909-931-097-0



8 859099 310970

ราคา 450 บาท