



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย
Mahachulalongkornrajavidyalaya University Press

หลักสูตรปริญญาพุทธศาสตรบัณฑิต
หมวดวิชาศึกษาทั่วไป

ตำรา
๐๐๐ ๑๓๙

คณิตศาสตร์เบื้องต้น

Basic Mathematics



โครงการผลิตและพัฒนาเทคโนโลยีสารสนเทศเพื่อการเรียนรู้พระพุทธศาสนา
กองวิชาการและสำนักหอสมุดและเทคโนโลยีสารสนเทศ

คณิตศาสตร์เบื้องต้น (Basic Mathematics)

ผู้แต่ง : คณาจารย์ มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย

บรรณาธิการ : ผศ.ทวีศักดิ์ ทองทิพย์

ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบ : พลตรีวีระ วงศ์สรรค์

ผู้ทรงคุณวุฒิร่วมผลิต : รศ.ชัชณะ รุ่งปัจฉิม นายนิทัศน์ วีระโพธิ์ประสิทธิ์

ศิลปะและจัดรูปเล่ม : พระมหาสุระศักดิ์ ธีรวโส

พิสูจน์อักษร : นายสุชญา ศิริธัญญกร

ผู้ออกแบบปก : นายพิจิตร พรหมลี

พิมพ์ครั้งที่ ๔ : ตุลาคม ๒๕๕๕ จำนวนพิมพ์ ๒,๐๐๐ เล่ม

พิมพ์ครั้งที่ ๕ : มีนาคม ๒๕๕๙ จำนวนพิมพ์ ๒,๐๐๐ เล่ม

พิมพ์ครั้งที่ ๖ : มิถุนายน ๒๕๖๑ จำนวนพิมพ์ ๒,๐๐๐ เล่ม

ลิขสิทธิ์ ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย

ห้ามการลอกเลียนไม่ว่าส่วนใดๆ ของหนังสือเล่มนี้

นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรเท่านั้น

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

คณิตศาสตร์เบื้องต้น-- พิมพ์ครั้งที่ 6.-- พระนครศรีอยุธยา :

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย, 2561.

193 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. คณาจารย์มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย. II. ชื่อเรื่อง.

510

ISBN 978-616-300-212-9

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย (ผลงานลำดับที่ ๔)

เลขที่ ๗๙ หมู่ ๑ ตำบลลำไทร อำเภอน้อย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา ๑๓๑๗๐

จัดจำหน่ายโดย :

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์มหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย

๑๑-๑๗ ถนนมหาราช แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ ๑๐๒๐๐

โทรศัพท์ ๐๒-๖๒๓-๕๖๒๔, โทรสาร ๐๒-๖๒๓-๕๖๒๓

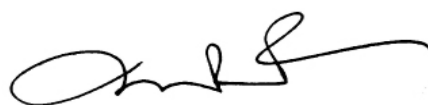
คำปรารภ

มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย มีโครงการผลิตและพัฒนาเทคโนโลยีสารสนเทศ เพื่อการเรียนรู้พระพุทธศาสนาของมหาวิทยาลัย ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาเนื้อหารายวิชาในวิชา กลุ่มพระพุทธศาสนาและหมวดวิชาศึกษาทั่วไป ให้เป็นที่ยอมรับและใช้ร่วมกันพัฒนารูปแบบของหนังสือ และตำราให้มีเอกลักษณ์ร่วมกัน สวยงาม คงทน น่าสนใจต่อการศึกษาค้นคว้า นำเนื้อหาสาระไปพัฒนา สื่อการศึกษาและเผยแพร่ในรูปแบบต่างๆ ทั้งสื่อสิ่งพิมพ์ สื่ออิเล็กทรอนิกส์ ระบบคลังข้อสอบ พัฒนา บุคลากรและผลงานด้านวิชาการของมหาวิทยาลัยให้แพร่หลายและเป็นเวทีเสนอผลงานทางวิชาการ ของคณาจารย์ของมหาวิทยาลัย

โครงการนี้เกิดขึ้นมาได้จากความร่วมมือร่วมใจกันของคณาจารย์มหาวิทยาลัย จากทุกส่วนงาน ทั้งส่วนกลาง วิทยาเขต วิทยาลัยสงฆ์ ห้องเรียน ร่วมกันพัฒนาเอกสารการสอนหรือตำราในวิชา แกนพระพุทธศาสนาและหมวดวิชาศึกษาทั่วไป ด้วยวิริยะอุตสาหะแรงกล้า พัฒนางานทางวิชาการให้ มีเนื้อหาสาระถูกต้อง เพียบพร้อมด้วยอัตราและพยัญชนะ เป็นที่ยอมรับของสังคม

ตำรา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น” เล่มนี้ เป็นรายวิชาหนึ่งในหมวดวิชาศึกษาทั่วไป แบ่งเนื้อหาสาระ เป็น ๗ บท มุ่งหมายให้ศึกษาเรียนรู้เกี่ยวกับธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ความรู้พื้นฐาน ทางตรรกศาสตร์ เซต ระบบจำนวน สมการและอสมการ เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ ความสัมพันธ์และ ฟังก์ชัน เนื้อหาสาระปรากฏแจ้แล้วในเล่มนี้

ขออนุโมทนาขอบคุณคณะกรรมการโครงการผลิตและพัฒนาเทคโนโลยีสารสนเทศ เพื่อการ เรียนรู้พระพุทธศาสนา คณาจารย์และเจ้าหน้าที่ของมหาวิทยาลัยทุกรูปทุกท่าน ที่ได้เสียสละเวลาพัฒนา เนื้อหารายวิชาเล่มนี้ให้เกิดมีขึ้น อันจะเป็นสมบัติของมหาวิทยาลัยสืบไป หวังเป็นอย่างยิ่งว่า ตำรา เล่มนี้คงอำนวยประโยชน์เชิงวิชาการด้านหลักพื้นฐานทางคณิตศาสตร์แก่คณาจารย์ นิสิต นักศึกษา และประชาชนผู้ที่สนใจตลอดไป



(พระพรหมบัณฑิต, ศ.ดร.)

อธิการบดีมหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย

คำนำ

ตำราวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น” เล่มนี้ ได้พัฒนาขึ้นตามโครงการผลิตและพัฒนาเทคโนโลยีสารสนเทศเพื่อการเรียนรู้พระพุทธศาสนา ปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๐ ของสำนักหอสมุดและเทคโนโลยีสารสนเทศ ร่วมกับกองวิชาการ มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย โดยมีวัตถุประสงค์ ดังนี้ ๑) เพื่อพัฒนาเนื้อหาวิชาในหมวดวิชาศึกษาทั่วไปและวิชากลุ่มพระพุทธศาสนา หลักสูตรพุทธศาสตรบัณฑิต ให้เป็นที่ยอมรับและใช้ร่วมกันได้ทุกคณะ วิทยาเขต วิทยาลัยสงฆ์ ๒) เพื่อพัฒนารูปแบบ เอกสารประกอบการสอน หนังสือ ตำรา ให้มีเอกลักษณ์ร่วมกัน ทั้งมีความคงทน สวยงาม น่าสนใจต่อการศึกษา ค้นคว้า ๓) เพื่อนำเนื้อหาสาระไปพัฒนาสื่อการศึกษาและเผยแพร่ในรูปแบบต่างๆ ทั้งสื่อสิ่งพิมพ์ สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และระบบคลังข้อสอบ ๔) เพื่อเสริมสร้างทักษะคณาจารย์ในการสร้างผลงานทางวิชาการอย่างมีคุณภาพ รองรับการประกันคุณภาพการศึกษาของมหาวิทยาลัย และเป็นที่ยอมรับทั่วไปในประเทศและระดับสากล

ตำราวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น” เล่มนี้ เป็นวิชาหนึ่งในหมวดวิชาศึกษาทั่วไป ที่ต้องใช้ความคิดอย่างมีระบบ มีเหตุผล มีหลักการและมีวิธีการที่แน่นอน ต้องใช้ทักษะอย่างมากในการทำแบบฝึกหัด ผู้เรียนที่ไม่มีความถนัดและขาดทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ จึงมีความรู้สึกลัว วิชาคณิตศาสตร์นี้เป็นวิชาที่ทำความเข้าใจได้ยาก ดังนั้น การสอนแต่ละบทในชั้น นำเข้าสู่บทเรียนผู้สอน จึงควรบอกสาระสำคัญของเรื่องที่จะเรียน เพื่อเป็นการทบทวนความรู้เดิมให้ผู้เรียนได้มองเห็นสาระสำคัญของเรื่องเป็นภาพรวมทั้งหมดก่อน หลังจากนั้นในชั้นสอน จึงนำเนื้อหาในแต่ละหัวข้อมาสอนอย่างละเอียดอีกทีหนึ่ง เมื่อสอนจบเนื้อหาของแต่ละเรื่อง ผู้สอนควรสรุปประเด็นสำคัญให้ผู้เรียนได้เข้าใจ เพราะเมื่อเข้าใจเนื้อหาแล้ว จะทำให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง เมื่อทำแบบฝึกหัดได้ ก็ส่งผลให้ผู้เรียนเกิดกำลังใจและมีทัศนคติที่ดีในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

คณะผู้เขียนหวังว่า ตำราเล่มนี้จะยังประโยชน์ต่างๆ ให้เกิดขึ้นกับผู้เกี่ยวข้องทุกท่าน ตามวัตถุประสงค์ของโครงการพอสมควร จึงขอขอบคุณทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมเขียนตำราเล่มนี้ให้สำเร็จสมบูรณ์เป็นรูปเล่ม จึงขอขอบคุณผู้บริหาร คณาจารย์ เจ้าหน้าที่กองวิชาการ มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัยและคณะวิทยากร คือ รศ.ชัชชนะ รุ่งปัจฉิม และอาจารย์นิทัศน์ วีระโพธิ์ประสิทธิ์ จากมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช ที่ให้คำแนะนำ ปรับแก้ไข ทำให้เนื้อหา มีความถูกต้อง สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ทุกประการ

คณะกรรมการผู้พัฒนาเนื้อหาวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น”

กรกฎาคม ๒๕๕๑

คำนำสำนักพิมพ์

การศึกษาเล่าเรียนที่จะช่วยให้ประสบความสำเร็จ จำต้องอาศัยวิธีการเรียนรู้จากหลากหลายวิชา ประกอบกัน จุดหมายของการศึกษาคือ รู้ เข้าใจ นำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้ ซึ่งวิชาการ คำนวณ ที่เรียกว่า คณิตศาสตร์ จึงเป็นอีกศาสตร์หนึ่งที่ควรเรียนรู้ เพราะเป็นเครื่องมือของวิทยาศาสตร์ ตำราวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น” เล่มนี้ เป็นวิชาหนึ่งในหมวดวิชาศึกษาทั่วไป แต่งโดยคณาจารย์ มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย ซึ่งได้รวบรวมเนื้อหาสาระเกี่ยวกับความรู้คณิตศาสตร์เบื้องต้น อันประกอบด้วยการมุ่งหมายให้ศึกษาเรียนรู้เกี่ยวกับธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ความรู้ พื้นฐานทางตรรกศาสตร์ เซต ระบบจำนวน สมการและอสมการ เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ไว้อย่างครบถ้วน อธิบายเนื้อหาเป็นลำดับขั้นอย่างละเอียด รวมทั้งได้สรุปและ แบบฝึกหัดท้ายบท พร้อมตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และวิธีคิด เหมาะกับการใช้ประกอบการเรียนการสอนอย่างยิ่ง

ทางสำนักพิมพ์ต้องขอขอบพระคุณคณะกรรมการบริหารสำนักพิมพ์ มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย โดยมีพระพรหมบัณฑิต, ศ.ดร. อธิการบดีมหาวิทยาลัยและประธานกรรมการบริหารสำนักพิมพ์ ที่เมตตาสนับสนุนฉบับตำราวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น” และขอขอบพระคุณคณาจารย์ ผู้แต่งตำราวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น” ที่ได้เสียสละเวลาร่วมกันพัฒนาเนื้อหาอารยวิชานี้จนสำเร็จ เป็นรูปเล่มสมบูรณ์ ขอขอบคุณกองวิชาการที่ช่วยเป็นแรงสนับสนุนงานต้นฉบับและบุคลากร ช่วยให้สำนักพิมพ์สามารถจัดพิมพ์ตำราเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี หวังเป็นอย่างยิ่งว่า ตำราวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น” จะเป็นแหล่งค้นคว้าข้อมูลความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์อีกทางหนึ่ง ให้นิสิต นักศึกษา ตลอดจนผู้สนใจสืบไป

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย

มิถุนายน ๒๕๖๑

**คณะกรรมการผลิตและพัฒนาเทคโนโลยีสารสนเทศเพื่อการเรียนรู้พระพุทธศาสนา
มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย ปีงบประมาณ ๒๕๕๐**

<p style="text-align: center;">คณะกรรมการดำเนินงาน</p> <p>ที่ปรึกษา พระธรรมโกศาจารย์, ศ.ดร.</p> <p>ประธานกรรมการ พระมหาสมจินต์ สมมาปญโญ, รศ.ดร.</p> <p>รองประธานกรรมการ พระมหาเจิม สุวโจ</p> <p>กรรมการ พระครูบวรสิกขการ พระมหาสุทัศน์ ติสสรวาที พระมหาหรรษา ธมฺมหาโส, ผศ.ดร. พระมหาชำนาญ มหาชาโน พระกิตติพงศ์ สิริวิฑฒโน พระมหาเผื่อน กิตติโสภโณ พระครูสังฆรักษ์เกียรติศักดิ์ กิตติปญโญ พระมหาสาธิต สาธิโต นายกิตติศักดิ์ ณ สงขลา ผศ.เวทย์ บรรณกรกุล พระเทวา รตนโชโต พระมหาบุญมา จิตธมโม พระมหาศรี ปณณาสิริ นายธนาชัย บุรณะวัฒนากุล นายคำพันธ์ วงศ์เสน่ห์ นายพีรวัฒน์ ชัยสุข นายรัฐพล เย็นใจมา นายประสิทธิ์ ก่อกระโทก นายสุชญา ศิริธัญญกร</p> <p>กรรมการและผู้ช่วย พระมหาศรีทนต์ สมจาโร พระมหาวิโรพงษ์ วีรวโส นายไกรวุฒิ มโนรัตน์ นายเกษม แสงนนท์ นายสนธิญาณ รักษาภักดิ์ นายประเสริฐ คำนวล นางสาวกาญจนากร วงษา นางสาวอนันทัย บุญทัน</p>	<p style="text-align: center;">คณะกรรมการผู้พัฒนาเนื้อหารายวิชา “คณิตศาสตร์เบื้องต้น”</p> <p>ประธานกรรมการ ผศ.ชัชชัย ไชยสา</p> <p>รองประธานกรรมการ พระใบฎีกาสุพจน์ ตปสีโล</p> <p>กรรมการ อาจารย์เสาวณีย์ ไชยกุล</p> <p>เลขานุการและผู้ช่วย อาจารย์สุกญา คงจันทร์ นายกิตติศักดิ์ ณ สงขลา</p> <p>คณะบรรณาธิการ ผศ.ทวีศักดิ์ ทองทิพย์ อาจารย์นรินทร์ เลิศวีรพล</p> <p>ผู้ทรงคุณวุฒิร่วมผลิต รศ.ชัชณะ รุ่งปัจฉิม อาจารย์นัทศน์ วีระโพธิ์ประสิทธิ์</p> <p>ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบ พลตรีวีระ วงศ์สรรค์</p>
--	---

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำปรารภ	(3)
คำนำ	(4)
คำนำสำนักพิมพ์	(5)
คณะกรรมการผลิตและพัฒนาเทคโนโลยีสารสนเทศเพื่อการเรียนรู้พระพุทธศาสนา	(6)
บทที่ 1 ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์	1
1.1 ธรรมชาติของคณิตศาสตร์	2
1.2 ความหมายของคณิตศาสตร์	3
1.3 โครงสร้างของคณิตศาสตร์	4
1.4 ประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์	6
สรุปท้ายบท	8
แบบฝึกหัดท้ายบท	10
เอกสารอ้างอิงประจำบท	12
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานทางตรรกศาสตร์	13
2.1 ความหมายทางตรรกศาสตร์	14
2.2 ประพจน์	14
2.3 ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์	15
2.4 การเชื่อมประพจน์	16
2.5 ประพจน์ที่สมมูลกัน	24
2.6 ประพจน์ข้อแย้งกัน	24
2.7 สัจนิรันดร์	25
สรุปท้ายบท	26
แบบฝึกหัดท้ายบท	27
เอกสารอ้างอิงประจำบท	30

บทที่ 3 เขต	30
3.1 ความหมายของเขต	32
3.2 การเขียนเขต	33
3.3 ประเภทของเขต(เขตว่าง เขตจำกัดและเขตอนันต์)	35
3.4 สับเขต	36
3.5 เขตที่เท่ากัน	39
3.6 เขตที่เทียบเท่ากัน	39
3.7 เพาเวอร์เซต	40
3.8 เอกภพสัมพัทธ์	41
3.9 แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์	42
3.10 การดำเนินการของเขต	45
3.11 กฎทางพีชคณิตของเขต	57
3.12 การประยุกต์เกี่ยวกับสมาชิกของเขตจำกัด	61
สรุปท้ายบท	67
แบบฝึกหัดท้ายบท	68
เอกสารอ้างอิงประจำบท	74
บทที่ 4 ระบบจำนวน	75
4.1 ความเป็นมาของตัวเลข	76
4.2 โครงสร้างของระบบจำนวน	80
4.3 สมบัติที่สำคัญของระบบจำนวน	86
สรุปท้ายบท	94
แบบฝึกหัดท้ายบท	96
เอกสารอ้างอิงประจำบท	99

บทที่ 5 สมการและอสมการ	101
5.1 ความหมายของสมการ	102
5.2 สมบัติที่สำคัญของสมการ	102
5.3 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	104
5.4 สมการกำลังสองหรือสมการควอดราติก(ตัวแปรเดียว)	107
5.5 อสมการ	115
5.6 ค่าสัมบูรณ์	120
สรุปท้ายบท	124
แบบฝึกหัดท้ายบท	126
เอกสารอ้างอิงประจำบท	134
บทที่ 6 เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	135
6.1 ความหมายของเมตริกซ์	136
6.2 มิติของเมตริกซ์	137
6.3 ชนิดของเมตริกซ์	137
6.4 เมตริกซ์เท่ากัน	140
6.5 การดำเนินการของเมตริกซ์	141
6.5 ดีเทอร์มิแนนต์	151
สรุปท้ายบท	157
แบบฝึกหัดท้ายบท	159
เอกสารอ้างอิงประจำบท	163
บทที่ 7 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	165
7.1 ความหมายของความสัมพันธ์	166
7.2 คู่อันดับ	166
7.3 ผลคูณคาร์ทีเซียน	167
7.4 ความสัมพันธ์	169

7.5 โดเมน และเรนจ์	171
7.6 ฟังก์ชัน	174
สรุปท้ายบท	177
แบบฝึกหัดท้ายบท	179
เอกสารอ้างอิงประจำบท	184
บรรณานุกรม	185
ภาคผนวก : ประมวลรายวิชาและแผนการสอน	187
คณะกรรมการผู้พัฒนาเนื้อหารายวิชา	192

บทที่ 1

ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ (Nature and Construction of Mathematic)

พระใบฎีกาสุนทร ตรีปิไล

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อได้ศึกษาเนื้อหาในบทนี้แล้ว ผู้ศึกษาสามารถ

1. เขียนบรรยายเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ได้
2. บอกความหมายของคณิตศาสตร์ได้
3. เขียนโครงสร้างของคณิตศาสตร์ได้
4. อธิบายประโยชน์ของคณิตศาสตร์ได้
5. เขียนตัวอย่างของอนิยาม นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีได้

ขอบข่ายเนื้อหา

- ธรรมชาติของคณิตศาสตร์
- ความหมายของคณิตศาสตร์
- โครงสร้างของคณิตศาสตร์
- ประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์ เป็นศาสตร์แห่งการเรียนรู้และเป็นฐานความรู้ที่จะเป็นเครื่องมือในการทำ ความเข้าใจในศาสตร์อื่นๆ ทั้งที่เป็นนามธรรมและรูปธรรม ความรู้ทางคณิตศาสตร์ช่วยส่งเสริม ให้เกิดประโยชน์ในด้านต่างๆ เช่น ความมีเหตุผล ความคิดสร้างสรรค์ ความอดทน ความมี สมานธิ และนันทนาการ รวมทั้งสามารถอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติได้ อันแสดงถึงวิวัฒนาการ การคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่างๆ ของมนุษย์ได้เป็นอย่างดี ด้วยลักษณะความเป็นสากลที่ทุกชาติทุก ภาษาสามารถเรียนรู้ได้ด้วยภาษาคณิตศาสตร์ที่มีสัญลักษณ์เช่นเดียวกันทั้งหมด จึงเป็นที่มาของ ระเบียบวิธีคิด บทนิยาม และทฤษฎีบทต่างๆ ดังจะกล่าวต่อไปนี้

1.1 ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อชีวิตของมนุษย์เป็นอันมาก อาจกล่าวได้ว่ามนุษย์เติบโตมา พร้อม กับการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ทั้งที่เป็นการเรียนรู้โดยธรรมชาติที่แวดล้อมตัว เราและการเรียนรู้ในชั้นเรียน คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในการเป็นเครื่องมือศึกษาหาความรู้ใน ศาสตร์อื่น ๆ และใช้ในการคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ เช่น เครื่องคำนวณและเครื่องคอมพิวเตอร์ อย่างไรก็ตาม ในวงการศึกษปัจจุบันได้มีการยอมรับบทบาทของคณิตศาสตร์ มากยิ่งขึ้น ปีรต์นั จาตุรันตบุตร ได้สรุปธรรมชาติของคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้ คือ

1.1.1 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด ความคิด รวบยอดทางคณิตศาสตร์เป็นความคิดที่เกิดขึ้นจากการสรุปความคิดที่เหมือน ๆ กัน อันเกิดจาก ประสบการณ์หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น เช่น ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับปริมาณ จำนวนเท่ากัน การเท่ากันทุกประการ เป็นต้น ดังนั้น การสื่อความหมายแนวคิดทาง คณิตศาสตร์จึงต้องใช้ สัญลักษณ์ และการเขียนแผนภาพหรือภาพประกอบเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ง่ายขึ้นและเข้าใจได้ ตรงกัน เช่น "จำนวน" เป็นนามธรรมจับต้องไม่ได้ แต่ใช้ตัวเลขเป็นสัญลักษณ์แสดง เมื่อกกล่าวถึง จำนวนสมดุ 3 เล่ม และจำนวนคน 3 คน เราสามารถตัดสินใจได้ว่า ทั้งสองสิ่งมีจำนวนเท่ากัน โดยใช้ การจับคู่หนึ่งต่อหนึ่ง เป็นต้น

1.1.2 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นภาษาสากล คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดของมนุษย์ และมนุษย์สร้างสัญลักษณ์แทนความคิด แล้วสร้างกฎในการนำสัญลักษณ์มาเพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกัน คณิตศาสตร์จึงมีภาษาเฉพาะของตัวเอง เป็นภาษาที่กำหนดขึ้นด้วยสัญลักษณ์ที่รัดกุม และสื่อความหมายได้ถูกต้อง เป็นภาษาที่ทุกชาติทุกภาษาที่เรียนคณิตศาสตร์จะมีความเข้าใจตรงกัน เช่น $\sqrt{9} = 3$ เป็นต้น

1.1.3 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่แสดงความเป็นเหตุเป็นผลกัน เนื่องจากทฤษฎีบทเป็นองค์ประกอบหนึ่งของระบบคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ จะใช้วิธีการอ้างเหตุผลตามหลักตรรกวิทยา เช่น การพิสูจน์ข้อความ " ถ้า p แล้ว q " อาจพิสูจน์โดยใช้ข้อความขัดแย้งกลับที่เป็น " ถ้านิเสธ q แล้วนิเสธ p" เป็นต้น

ดังนั้น การใช้เหตุผลในคณิตศาสตร์นอกจากจะใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทแล้ว ยังสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ได้โดยอาศัยหลักความสัมพันธ์สมเหตุสมผลในการวิเคราะห์ปัญหา ซึ่งนักศึกษาก็ได้ฝึกการใช้เหตุผลในเรื่องต่อไป

1.1.4 คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง เช่นเดียวกับศิลปะอื่น ๆ ความงามของคณิตศาสตร์อยู่ที่ความมีระเบียบและความกลมกลืนกันของความคิดตลอดจนความละเอียดถี่ถ้วนรอบคอบ ซึ่งแสดงออกให้เห็นได้จากการกำหนดโครงสร้างของคณิตศาสตร์ อันประกอบด้วยคำนิยาม (Undefined Term) คำนิยาม (Defined Term) สัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate) และทฤษฎี (Theorem) ซึ่งจะได้ศึกษาต่อไป¹

1.2 ความหมายของคณิตศาสตร์

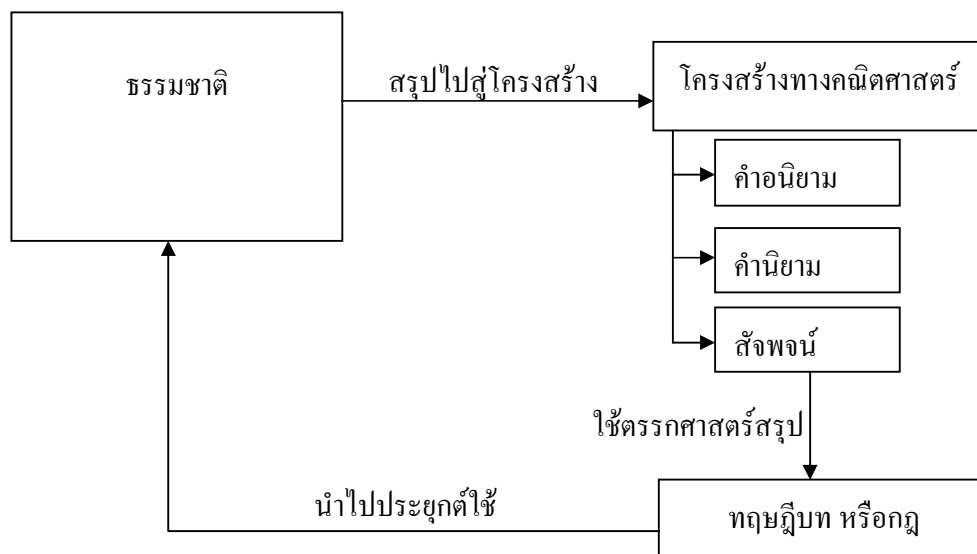
คำว่า "คณิตศาสตร์" (คำอ่าน: คะ-นิด-ตะ-สาด) มาจากคำว่า คณิต (การนับ หรือ คำนวณ) และ ศาสตร์ (ความรู้ หรือ การศึกษา) ซึ่งรวมกันมีความหมายโดยทั่วไปว่า การศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณ หรือ วิชาที่เกี่ยวกับการคำนวณ คำนี้ตรงกับคำภาษาอังกฤษว่า mathematics มาจากคำภาษากรีก μάθημα (máthema) แปลว่า "วิทยาศาสตร์ ความรู้ และการเรียน" และคำว่า μαθηματικός

¹ ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร, หลักการคณิตศาสตร์, (กรุงเทพฯ : ด่านสุทธาคารพิมพ์, 2547), หน้า 2.

(mathematikós) แปลว่า "รักที่จะเรียนรู้" ในอเมริกาเหนือนิยมย่อ mathematics ว่า math ส่วนประเทศอื่นๆ ที่ใช้ภาษาอังกฤษนิยมย่อว่า maths²

1.3 โครงสร้างทางคณิตศาสตร์

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เริ่มจากธรรมชาติ โดยพิจารณาปัญหาต่างๆ ของเนื้อหาเหล่านั้นแล้วสรุปในรูปแบบนามธรรม โดยสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเนื้อหานั้นๆ โครงสร้างของคณิตศาสตร์ประกอบด้วย คำนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎี จากนั้นใช้ตรรกศาสตร์สรุปออกมาเป็นทฤษฎีบท หรือกฎต่างๆ จากนั้นนำทฤษฎีบทหรือกฎไปประยุกต์ใช้ต่อไป ดังแสดงในแผนภูมิที่ 1.1



แผนภูมิที่ 1.1 แสดงแบบจำลองโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

² <http://th.wikipedia.org/ : 1/6/ 2550>.

1.3.1 คำนิยาม (Undefined Term) หมายถึงบทหรือศัพท์ที่ไม่ต้องให้คำจำกัดความ เช่นคำว่า “จุด” “เส้น” เป็นต้น ถ้าให้คำจำกัดความของ “จุด” หมายถึงสิ่งที่ไม่มีความกว้าง ความยาว ความหนาแต่มีตำแหน่ง จะเห็นได้ชัดว่าขัดแย้งกับการปฏิบัติไม่ว่าจะสร้างจุดโดยใช้ปากกาหรือดินสอก็ตาม สามารถวัดความกว้าง ความยาว และความหนาได้ไม่มากก็น้อย จึงให้จุดเป็นคำนิยาม

เส้น ถ้าให้คำจำกัดความของเส้น คือสิ่งที่ไม่มีความกว้าง ความหนา มีแต่ความยาว ขัดแย้งกับสิ่งที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน เช่น เชือก หรือเส้นก๋วยเตี๋ยว เป็นต้น จึงให้คำว่า “เส้น” เป็นคำนิยาม

สีขาว ถ้าให้คำจำกัดความของสีขาว คือสีของสำลี จะมีปัญหาตามต่อไปว่า สีของสำลี เป็นอย่างไร ซึ่งจำเป็นจะต้องวกกลับมาใช้คำว่า “สีขาว” ไปอธิบายสีของสำลี จึงเป็นการวนเวียนไปมาอย่างนี้ไม่รู้จบ โดยที่ยังไม่รู้เลยว่า “สีขาว” เป็นอย่างไร โดยธรรมชาติแล้วคำที่เป็นคำนิยามทั้งหลายคนทั่วไป มักจะเข้าใจได้โดยอาศัยประสบการณ์ตรงคือได้พบเห็นมาด้วยตนเอง เมื่อกล่าวถึงจึงสามารถรู้ได้โดยไม่ต้องอาศัยการอธิบาย เช่น ถ้าหากพูดถึง “สีขาว” คนทั่วไปสามารถเข้าใจได้ทันทีว่าสีขาวเป็นอย่างไร เพราะคนมีความคุ้นเคยกับวัตถุสีขาวมาก่อน ไม่ได้ทราบความหมายของ “สีขาว” โดยการอธิบายด้วยคำอื่น

1.3.2 คำนิยาม (Defined Term) หมายถึงบทหรือศัพท์ที่ต้องให้คำจำกัดความให้ชัดเจน โดยใช้ศัพท์ต่าง ๆ ของคำนิยาม เช่น สมมติคำว่า “พ่อ” และ “ลูก” เป็นคำนิยาม สามารถนำคำเหล่านี้ไปอธิบายคำอื่น ๆ ได้ เช่น “ปู่” คือพ่อของพ่อ “ปู่ทวด” คือ พ่อของปู่ “หลาน” คือลูกของลูก “เหลน” คือลูกของหลาน เป็นต้น

โดยปกติ คำที่เป็นคำนิยามจะอาศัยคำที่ไม่มีนิยามมาก่อน ซึ่งบางทีก็เรียกกันง่าย ๆ ว่า “คำอธิบาย” ขอให้พิจารณาตัวอย่างของคำที่มีคำจำกัดความต่อไปนี้

- | | |
|----------------------|---------------------------------------|
| “สามเหลี่ยมหน้าจั่ว” | คือ สามเหลี่ยมที่มีด้าน 2 ด้านเท่ากัน |
| “จำนวนเต็มคู่” | คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว |
| “เส้นขนาน” | คือ เส้นตรงที่ไม่ตัดกันเลย |

คุณสมบัติของบทนิยามที่ดี

- (1) บทนิยามที่ดีควรระบุคุณสมบัติที่เด่นเพื่อให้เข้าใจง่าย เช่น
 - สี่เหลี่ยมมุมฉาก คือสี่เหลี่ยมที่มีมุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก
 - สี่เหลี่ยมมุมฉาก คือสี่เหลี่ยมที่มีมุมฉากอย่างน้อยสามมุม
 จากนิยามทั้งสองจะเห็นว่าถูกทั้งคู่ แต่อันแรกเป็นนิยามที่ดีกว่าเพราะนำลักษณะเด่นมากล่าวไว้ทำให้เข้าใจง่าย ส่วนอันหลังเป็นลักษณะแฝงเพราะมุมทั้งสามเป็นมุมฉากแล้วบังคับให้มุมที่เหลือเป็นมุมฉากด้วย จึงทำให้เข้าใจช้ากว่าลักษณะแรก
- (2) บทนิยามที่ดีต้องสั้น กระชับ รัดกุมและประหยัดคำ ได้ใจความ เช่น
 - สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน
 - สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามเท่ากันและขนานกัน
 นิยามแบบแรกดีกว่าแบบหลัง เพราะประหยัดคำทำให้สั้น กระชับและได้ใจความ ในนิยามแบบแรกสามารถพิสูจน์คุณสมบัติที่นิยามแบบที่สองระบุเพิ่มเติมมาได้อยู่แล้ว
- (3) บทนิยามที่ดีต้องวกกลับได้ เช่น
 - สามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านเท่ากัน
 - สามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านเท่ากันคือสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- (4) บทนิยามที่ดีต้องประกอบด้วย คำนิยาม คือ เมื่อให้คำว่า “พ่อ” เป็นคำที่ไม่มีคำจำกัดความนำมาใช้นิยามคำว่า “ปู่” และ “ทวด” เช่น
 - ปู่ คือ พ่อของพ่อ
 - ปู่ทวด คือ พ่อของปู่
- (5) ไม่ควรมีบทนิยามหลายแบบสำหรับคำ ๆ หนึ่ง เช่น
 - สามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านเท่ากัน
 - สามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือสามเหลี่ยมที่มีมุมสองมุมเท่ากัน
 ตัวอย่างนี้ บทนิยามอันหลังเป็นผลมาจากอันแรกจึงไม่จำเป็นต้องกำหนดเป็นบทนิยามขึ้นมาอีก
- (6) บทนิยามที่ดีต้องไม่มีข้อโต้แย้ง เช่น
 - สี่เหลี่ยมคางหมู คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านคู่หนึ่งขนานกัน

นิยามดังกล่าวมีข้อโต้แย้งได้ เพราะทำให้สี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นสี่เหลี่ยมคางหมูด้วย จึงควรกำหนดใหม่ว่า

สี่เหลี่ยมคางหมู คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านคู่หนึ่งขนานกันและคู่ที่เหลือไม่ขนานกัน

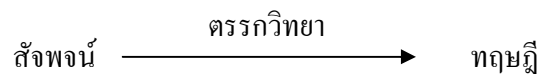
นอกจากข้อกำหนดที่กล่าวมาแล้ว ยังอาจมีข้อกำหนดอื่นๆ ในการสร้างบทนิยามที่ดีได้ด้วย

1.3.3 สัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate) หมายถึงข้อความที่ตกลงร่วมกันว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์หาเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อตกลง กติกาหรือความเชื่อเหล่านั้น เช่น ความเชื่อที่ว่า

- มนุษย์ทุกคนเป็นสัตว์ที่ต้องตาย
- ไม่มีสิ่งมีชีวิตใดอาศัยอยู่บนดวงอาทิตย์
- สามารถลากเส้นจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งได้เสมอ
- มุมฉากทั้งหลายย่อมเท่ากัน

ฯลฯ

1.3.4 ทฤษฎี (Theorem) เกิดจากการใช้สัจพจน์ค้นหาความจริงอื่น ๆ ต่อไป โดยใช้เหตุผลทางตรรกวิทยา ความจริงที่ได้จากการพิสูจน์เรียกว่า ทฤษฎี แสดงด้วยแผนผังดังนี้



สรุปตัวอย่างโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

อนิยาม : P, q, r

นิยาม : 1.
$$P^r = \underbrace{P \times P \times P \times \dots \times P}_r \text{ จำนวน}$$

2. จำนวนตรรกยะคือ จำนวนที่อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ และ $b \neq 0$

3. จำนวนอตรรกยะคือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนอตรรกยะ

4. จำนวนจริงคือ จำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

สังพจน์ : 1. เมื่อ P, q, r เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $(P \cdot q)^r = P^r \cdot q^r$

2. ผลคูณของจำนวนตรรกยะย่อมเป็นจำนวนตรรกยะ

ทฤษฎี : ถ้า 2^c เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว 4^c เป็นจำนวนตรรกยะด้วย

1.4 ประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีประโยชน์มากมาย ในที่นี้ขอสรุปให้เห็นเป็น 3 ประเด็น ดังนี้คือ

1.4.1 ประโยชน์ในการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น การซื้อขายสินค้า การแลกเปลี่ยนเงินตรา การวัดพื้นที่ การก่อสร้าง เป็นต้น กิจกรรมในชีวิตประจำวันเหล่านี้ล้วนเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น

1.4.2 ประโยชน์ในการนำไปใช้กำหนดหลักสูตรทางการศึกษา ในการศึกษาทุกระดับมักกำหนดให้วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาบังคับในหลักสูตรทุกระดับการศึกษา เช่น หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2544 มีสาระคณิตศาสตร์เป็นหนึ่งใน 8 ของสาระวิชาที่กำหนดไว้ในหลักสูตร ในหลักสูตรระดับอุดมศึกษาทั่วไป วิชาคณิตศาสตร์ถูกนำไปใช้ในหมวดวิชาการศึกษาทั่วไป เช่น ในหลักสูตรพุทธศาสตรบัณฑิตของมหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย พ.ศ. 2550 เป็นต้น ก็มีวิชาคณิตศาสตร์เช่นเดียวกัน

1.4.3 ประโยชน์ในการนำไปใช้เป็นเครื่องมือของศาสตร์ในสาขาอื่นๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ แพทยศาสตร์ ศีรษะศาสตร์ เป็นต้น ก็ได้นำเอาความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือหรือเป็นฐานการศึกษาในศาสตร์ของตนทั้งสิ้น

สรุปท้ายบท

คณิตศาสตร์ หมายถึงศาสตร์ หรือวิชาที่เกี่ยวกับการคิดคำนวณ การแก้ปัญหาและการใช้เหตุผล ธรรมชาติของคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม เป็นภาษาสากล ที่แสดงความเป็นเหตุเป็นผลกัน อีกทั้งยังมีความเป็นระบบ คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่งโดยความงามของคณิตศาสตร์อยู่ที่ความมีระเบียบ และความกลมกลืนกันของความคิดตลอดจนความละเอียดถี่ถ้วนรอบคอบ โครงสร้างของคณิตศาสตร์ประกอบไปด้วย คำนิยาม คำนิยาม สังพจน์ และทฤษฎีบท

คณิตศาสตร์มีกระบวนการในการพัฒนาระบบการคิดของมนุษย์โดยเริ่มจาก การคิดพื้นฐาน การคิดวิเคราะห์ และการคิดสร้างสรรค์ ดังนั้น คณิตศาสตร์ นอกจากจะเสริมสร้างสติปัญญาแก่ผู้ที่ศึกษาแล้ว ยังมีอิทธิพลต่อพฤติกรรมของผู้ที่ศึกษาด้วย ประโยชน์ที่เห็นได้ชัดเจนคือ การนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน และยังนำไปกำหนดหลักสูตรทางการศึกษาในทุกระดับ นอกจากนั้นยังนำไปใช้เป็นเครื่องมือของศาสตร์ในสาขาอื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ศึกษาศาสตร์ เป็นต้น

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ธรรมชาติของคณิตศาสตร์คืออะไร จงอธิบาย

.....

.....

.....

.....

.....

2. ความหมายของคณิตศาสตร์คืออะไร จงบอกความหมาย

.....

.....

.....

.....

.....

3. โครงสร้างของคณิตศาสตร์ มีอะไรบ้าง จงเขียนโครงสร้างของคณิตศาสตร์

.....

.....

.....

.....

.....

4. ประโยชน์ของคณิตศาสตร์ มีอะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....

.....