

# ฝึกโจทย์ สอบ คณิตและคอม จนกว่าจะพิชิตภูเขาสูงนี้

หนังสือแบบฝึกหัด

ชุดที่ 2 พิชคณิต



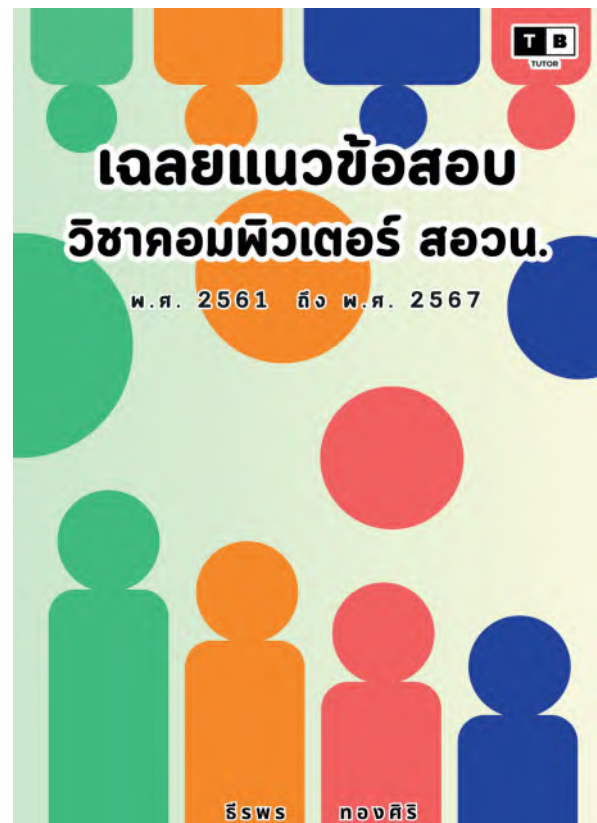


**TUTOR**

สวัสดีครับ ผมหนึ่งในทีมงานของ TBTUTOR  
ต้องขอขอบคุณในการสนับสนุนหนังสือ  
ของ TBTUTOR เป็นอย่างมากครับ  
ผมหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับคุณมากนะครับ  
สามารถดูหนังสือเล่มอื่นหรือข้อมูลต่าง ๆ ของเราได้  
ตามนี้เลยนะครับ

ติดตามผลงานได้ที่    **TBTUTOR**

## หนังสือในเครือของ TBTUTOR



# สารบัญ

<b>1 เลขยกกำลัง</b>	<b>5</b>
1.1 บทนิยามและสมบัติของเลขยกกำลัง	6
1.2 จำนวนติดลบ	14
1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	23
<b>2 พังก์ชัน (1)</b>	<b>35</b>
2.1 พังก์ชันและการหาค่าของฟังก์ชัน	36
2.2 ลำดับ	52
2.3 อนุกรม	56
2.4 ประเภทของฟังก์ชัน	70
2.5 ฟังก์ชันหลายตัวแปร	89
<b>3 พหุนาม</b>	<b>91</b>
3.1 พหุนามและการดำเนินการ	92
3.2 การแยกตัวประกอบพหุนาม	103
3.3 ทฤษฎีเศษเหลือ	105
3.4 พหุนามเอกพันธ์และพหุนามสมมาตร	115
3.5 การหาสัมประสิทธิ์ของพหุนาม	123
<b>4 เอกลักษณะทางพีชคณิต</b>	<b>127</b>
4.1 เอกลักษณะของพหุนามสองตัวแปร	128
4.2 เอกลักษณะของพหุนามสามตัวแปร	138
<b>5 สมการ</b>	<b>141</b>
5.1 สมการเชิงเส้น	142
5.2 สมการกำลังสอง	151
5.3 สมการพหุนามและสูตรของวีต	165
5.4 สมการดีกรีของพหุนาม	179

5.5	สมการค่าสัมบูรณ์	183
5.6	สมการเศษส่วนพหุนาม	185
5.7	สมการหลายตัวแปร	191
<b>6</b>	<b>ระบบสมการ</b>	<b>195</b>
6.1	ระบบสมการเชิงเส้น	196
6.2	ระบบสมการไม่เชิงเส้น	201
6.3	ระบบสมการฟังก์ชันสมมาตร	211
<b>7</b>	<b>อสมการ</b>	<b>219</b>
7.1	อสมการเบื้องต้น	220
7.2	อสมการค่าสัมบูรณ์	234
7.3	ปัญหาค่าต่ำสุด - ค่าสูงสุด	242
<b>8</b>	<b>ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (2)</b>	<b>249</b>
8.1	ความสัมพันธ์	250
8.2	ฟังก์ชัน	259
8.3	คุณสมบัติของฟังก์ชัน	263
8.4	การดำเนินการของฟังก์ชัน	270
8.5	ฟังก์ชันผกผัน	273

# ส่วนที่ 1

## เลขยกกำลัง

เนื้อหาในบทนี้มุ่งเน้นการขยายขอบเขตของนิยามเลขยกกำลังจากเดิมที่พิจารณาเพียงจำนวนเต็ม ไปสู่กรณีที่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งถือเป็นรากฐานสำคัญในการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลังและค่าราก โดยผู้อ่านจะได้ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตที่จำเป็น การจัดรูปนิพจน์ที่ซับซ้อน และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องอย่างเป็นระบบ

## 1.1 บทนิยามและสมบัติของเลขยกกำลัง

### บทนิยาม 1.1: เลขยกกำลังบนจำนวนเต็ม

กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก นิยามดังนี้

- เลขยกกำลังที่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$$

- เลขยกกำลังที่เลขชี้กำลังเป็นศูนย์

ถ้า  $a \neq 0$  นิยาม

$$a^0 = 1$$

- เลขยกกำลังที่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ

ถ้า  $a \neq 0$  นิยาม

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### ตัวอย่างที่ 1.1. จงหาค่าของ

1.  $2^6 =$

6.  $(-5)^3 =$

2.  $(-3)^3 =$

7.  $4^3 =$

3.  $9^4 =$

8.  $(-0.2)^4 =$

4.  $0.6^3 =$

9.  $2.4^3 =$

5.  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

10.  $\left(-\frac{7}{3}\right)^2 =$

### ตัวอย่างที่ 1.2. จงหาค่าของ

1.  $4^{-3} =$

4.  $2.4^{-2} =$

2.  $(-2)^{-5} =$

5.  $\left(\frac{6}{11}\right)^{-3} =$

3.  $0.5^{-3} =$

6.  $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-3} =$

**โจทย์ปัญหา 1.1.**  $\left[2^{(-2)^{(-2)}}\right]^{(-2)^{(-2)^2}}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{1}{16}$

2.  $\frac{1}{4}$

3. 4

4. 16

**โจทย์ปัญหา 1.2.**  $30(1 + 2^4)(1 + 2^8)(1 + 2^{16})(1 + 2^{32})(1 + 2^{64})$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $2^{129} + 4$

2.  $2^{129} - 4$

3.  $2^{129} + 2$

4.  $2^{129} - 2$

**โจทย์ปัญหา 1.3.** (สอวน คอม 2562)

ข้อใดมีค่ามากที่สุด

1.  $2^{59}$

2.  $3^{34}$

3.  $4^{29}$

4.  $6^{20}$

**โจทย์ปัญหา 1.4.** (สอวน คณิต 2547)

ให้  $n$  เป็นจำนวนนับที่เล็กที่สุดที่ทำให้  $2^n$  และ  $5^n$  เป็นจำนวน 2 จำนวน ซึ่งตัวเลขที่มีค่าประจำหลักที่มากที่สุดของ  $2^n$  และ  $5^n$  เป็นตัวเลขตัวเดียวกัน แล้วเศษจากการหาร  $5^n$  ด้วย  $2^n$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 1.5.** (สอวน คอม 2561)

กำหนด  $k^2 = -1$  และ  $n = 40$  จงหาค่าของ  $k^n + k^{2n-1} + k^{2n+1}$

1. 1

2. -1

 3.  $k$ 

 4.  $k + 1$

**ทฤษฎีบท 1.1: สมบัติของเลขยกกำลัง**

กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง และให้  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ เมื่อ } a \neq 0$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (ab)^n = a^n b^n$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ เมื่อ } b \neq 0$$

$$6. a^m = a^n \text{ ก็ต่อเมื่อ } m = n \text{ โดยที่ } a \neq 0, 1, -1$$

**ตัวอย่างที่ 1.3.** เขียนให้อยู่ในรูปสำเร็จ

$$1. \frac{a^2 \cdot (a^3 \cdot a^{-5})^{-2}}{(a^{-3} \cdot a^7)^{-2}}$$

$$2. \left(\frac{ab^{-1}}{a^{-1}b}\right)^{-4} \div \left(\frac{a^2b^{-2}}{a^{-2}b^2}\right)^{-2}$$

$$3. \frac{a^2 + a^3 + a^4}{a^5 + a^6 + a^7}$$

$$4. \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}}$$

5.  $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{(a + b)^{-1}}$

6.  $\frac{a + b}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^{-1} - b^{-1}}$

**โจทย์ปัญหา 1.6.** (สอวน คณิต 2549)

ถ้า  $3^x = 5$  จงหาค่าของ  $3^{2x+3}$

**โจทย์ปัญหา 1.7.** ถ้า  $3^{27^x} = 27^{3^x}$  แล้ว  $x$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.5

2. 1

3. 1.5

4. 2

**โจทย์ปัญหา 1.8.** (สอวน คณิต 2550)

ให้  $x$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$2^{16^x} = 16^{2^x}$$

จงหาค่าของ  $3x$

**โจทย์ปัญหา 1.9.** (สอวน คอม 2562)

ถ้า  $x$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $256^x = (2^x + 6)^4$  จงหาค่าของ  $8^x$

1. 3

2. 9

3. 18

4. 27

**โจทย์ปัญหา 1.10.** (สอวน คอม 2561)

ถ้า  $2^a \times 2^b = 65536$  และ  $2^a \div 2^b = 4096$  จงหาค่าของ  $\frac{a}{b}$

1.  $\frac{1}{7}$

2. 7

3.  $\frac{4}{3}$

4.  $\frac{3}{4}$

**โจทย์ปัญหา 1.11.** (สอวน คอม 2561)

การเพิ่มขึ้นของจำนวนยีสต์ในแป้งหมักขนมปังทุก ๆ นาที ยีสต์จะเพิ่มจำนวนเป็น 2 เท่า ถ้าใช้เวลา 48 นาที จำนวนยีสต์ จะมีปริมาณเต็มตามสูตรทำขนมปังพอดี จงหาเวลาที่จะมีปริมาณจำนวนยีสต์เป็นครึ่งหนึ่งของสูตรทำขนมปัง

1. 6

2. 12

3. 24

4. 47

**โจทย์ปัญหา 1.12.** (สอน คอม 2565)

จงหาค่าของ  $k$  และ  $m$  ที่สอดคล้องสมการ  $\frac{x^{2k} \times x^m}{x^m \div x^k} = x^{45}$  ตามลำดับ

1. 5, 5

2. 5, 15

3. 15, 5

4. 25, 15

**โจทย์ปัญหา 1.13.** กำหนดให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์โดยที่  $x + y \neq 0$  และสอดคล้องกับสมการ

$$3^x \cdot 5^y = 1$$

$$\frac{3^{x^2-x}}{5^x + 3^{x^2-x}} = \frac{5^y \cdot 3^{y^2+y}}{135^{x+y} + 5^y \cdot 3^{y^2+y}}$$

จงหาค่าของ  $\left( \frac{3^{4x} \cdot 25^{3x+y} \cdot 135^y}{75^{x+y} \cdot 3^{2x+2y} \cdot 5^{4x-1}} \right)^{y-x}$

1. 1

2. 9

3. 16

4. 25

## 1.2 จำนวนติดกรณฑ์

### บทนิยาม 1.2: รากที่สองของจำนวนจริง

กำหนดให้  $a$  และ  $x$  เป็นจำนวนจริงโดยที่  $a \geq 0$

เราเรียก  $x$  ว่ารากที่สองของ  $a$  ก็ต่อเมื่อ  $x^2 = a$

เราจะใช้สัญลักษณ์  $\sqrt{a}$  คือรากที่สองที่ไม่ติดลบของ  $a$

ในกรณีที่  $a > 0$  เราเรียก  $-\sqrt{a}$  คือรากที่สองที่เป็นจำนวนลบของ  $a$

### ทฤษฎีบท 1.2: สมบัติของรากที่สอง

กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงที่ไม่ติดลบ จะได้ว่า

$$1. \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$2. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ เมื่อ } b \neq 0$$

**ตัวอย่างที่ 1.4.** จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปติดเครื่องหมายกรณฑ์

$$1. \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$2. \frac{4}{\sqrt{8}} =$$

$$3. \frac{21}{\sqrt{3}} =$$

$$4. \frac{100}{\sqrt{5}} =$$

$$5. \frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{3}-1} =$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} =$$

$$8. \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$$

**โจทย์ปัญหา 1.14.** (สอวน คอม 2561)

จงหาค่า  $x$  ในสมการ  $(\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{x})^2 = 200$

1. 72

2. 50

3. 32

4. 18

**โจทย์ปัญหา 1.15.**  $\frac{4}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2$

2.  $\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2$

3.  $\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2$

4.  $\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2$

**โจทย์ปัญหา 1.16.**  $\frac{4}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{6}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $7 - 2\sqrt{2}$

2.  $5 - \sqrt{2}$

3.  $2 + \sqrt{2}$

4.  $1 + 2\sqrt{2}$

**โจทย์ปัญหา 1.17.** ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{9}}$

1.  $1 + \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}$

2.  $1 + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}$

3.  $1 - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}$

4.  $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - 1$

**โจทย์ปัญหา 1.18.** (สอวน คอม 2562)

กำหนดให้  $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  และ  $y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  จงหาค่าของ  $3y^2 - 5xy + 3x^2$

1. 147

2. 289

3. 294

4. 298

**โจทย์ปัญหา 1.19.** ค่าของ

$$(2\sqrt{2} + \sqrt{15} + \sqrt{17})(2\sqrt{2} - \sqrt{15} + \sqrt{17})(2\sqrt{2} + \sqrt{15} - \sqrt{17})(-2\sqrt{2} + \sqrt{15} + \sqrt{17})$$

เท่ากับเท่าใด

1. 111

2. 222

3. 333

4. 444

**โจทย์ปัญหา 1.20.** กำหนดให้  $A = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{4})$

และ  $B = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4})$  แล้ว ค่าของ  $|AB|$  เท่ากับเท่าใด

1. 23

2. 25

3. 27

4. 29

**โจทย์ปัญหา 1.21.** (สอวน คณิต 2546)

กำหนดให้  $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} = 3 - 2\sqrt{2}$  แล้วค่าของ  $\frac{2^{6x} - 2^{-6x}}{2^{2x} - 2^{-2x}}$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

**บทนิยาม 1.3: รากที่  $n$  ของจำนวนจริง**

กำหนดให้  $a$  และ  $x$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหนึ่ง

เราเรียก  $x$  ว่ารากที่  $n$  ของ  $a$  ก็ต่อเมื่อ  $x^n = a$

เราล่าว่า  $x$  เป็นค่าหลักของรากที่  $n$  ของ  $a$  เมื่อ

1.  $x$  เป็นรากที่  $n$  ของ  $a$  และ

2.  $ax \geq 0$

เราจะใช้สัญลักษณ์  $\sqrt[n]{a}$  แทนด้วย  $x$

**ทฤษฎีบท 1.3: สมบัติของรากที่  $n$**

กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงที่และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหนึ่ง โดยที่  $\sqrt[n]{a}$  และ  $\sqrt[n]{b}$  เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

2.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  เมื่อ  $b \neq 0$

การพิจารณาค่าของ  $\sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$  เมื่อ  $a > b$

เนื่องจาก

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}$$

เราจะได้ว่า  $\sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

**ตัวอย่างที่ 1.5.** จงหาค่าของ

1.  $\sqrt{4+2\sqrt{3}} =$

2.  $\sqrt{9+2\sqrt{14}} =$

3.  $\sqrt{5-2\sqrt{6}} =$

4.  $\sqrt{12-2\sqrt{35}} =$

5.  $\sqrt{10+2\sqrt{21}} =$

6.  $\sqrt{50-2\sqrt{609}} =$

**ตัวอย่างที่ 1.6.** จงหาค่าของ

1.  $\sqrt{6 + \sqrt{20}} =$

2.  $\sqrt{11 + \sqrt{112}} =$

3.  $\sqrt{15 - 4\sqrt{14}} =$

4.  $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} =$

**ตัวอย่างที่ 1.7.** จงหาค่าของ

1.  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} =$

2.  $\sqrt{8 - \sqrt{15}} =$

3.  $\sqrt{7 - \sqrt{45}} =$

4.  $\sqrt{12 + \sqrt{143}} =$

**โจทย์ปัญหา 1.22.**  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1

2.  $\sqrt{2}$

3.  $\sqrt{3}$

4. 2

**โจทย์ปัญหา 1.23.** (สอวน คณิต 2549)

 จงหาค่าของ  $\sqrt{7 - \sqrt{48}} + \sqrt{7 + \sqrt{48}}$

**โจทย์ปัญหา 1.24.** (สอน คณิต 2543)

กำหนดให้  $N = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$  จงหาค่าของ  $[N]$

**โจทย์ปัญหา 1.25.** (สอน คณิต 2543)

กำหนดให้

$$x = \frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

แล้ว  $[-\frac{2}{3}x]$  มีค่าเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 1.26.** (สอวน คณิต 2543)

ให้  $X = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid \sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0.01\}$  แล้วค่าต่ำสุดของสมาชิกทุกตัวใน  $X$  มีค่าเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 1.27.** (สอวน คณิต 2544)

กำหนดให้  $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{3 - \sqrt{8}}} - \frac{2}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$  จงหาค่าของ  $[x]$

## 1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

### บทนิยาม 1.4

กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มที่ยิ่งกว่าหนึ่ง โดยที่  $\sqrt[n]{a}$  เป็นจำนวนจริง

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

### บทนิยาม 1.5: เลขยกกำลังบนจำนวนตรรกยะ

กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $a \neq 0$  และ  $r$  เป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า  $r = \frac{p}{q}$  โดยที่  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง  $q > 0$  และตัวหารร่วมมากของ  $p$  และ  $q$  เท่ากับ 1 ถ้า  $a^{\frac{1}{q}}$  เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

**ตัวอย่างที่ 1.8.** จงหาค่าของ

1.  $4^{\frac{5}{2}} =$
2.  $27^{\frac{2}{3}} =$
3.  $0.0016^{\frac{1}{4}} =$
4.  $3^{\frac{3}{2}} =$
5.  $25^{-\frac{3}{2}} =$
6.  $125^{-\frac{2}{3}} =$
7.  $0.01^{-\frac{3}{2}} =$
8.  $2^{-\frac{5}{3}} =$

**โจทย์ปัญหา 1.28.** กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงบวก จงหาค่าของ  $\left(\frac{a\sqrt{b^{-1}}}{\sqrt[3]{b}} \div \frac{\sqrt{ba^{-3}}}{\sqrt[3]{a^{-6}b^5}}\right)^6$  มีค่าตรงกับข้อใด

1.  $a^2b$

2.  $ab^2$

3.  $a^2b^3$

4.  $a^3b^2$

**โจทย์ปัญหา 1.29.**  $1 + (2^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}} + 1)^{-\frac{1}{2}}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $2^{-\frac{1}{2}}$

2. 1

3.  $2^{\frac{1}{2}}$

4.  $2^{\frac{1}{4}}$

**โจทย์ปัญหา 1.30.** ถ้า  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง  $a^{15} = b^{10} = c^6$  แล้ว  $abc$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $c^2$

2.  $c^3$

3.  $c^4$

4.  $c^5$

**โจทย์ปัญหา 1.31.** กำหนดให้  $x, y, z, a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ  $x^a = y^b = z^c$  และ  $xz = y^2$  ข้อใดเป็นจริง

1.  $ab + bc = 2ac$

3.  $ca + ab = 2bc$

2.  $bc + ca = 2ab$

4.  $ab + bc + ca = 2abc$

**โจทย์ปัญหา 1.32.** กำหนดให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงโดยที่  $63^x = 9$  และ  $63^y = 5$  แล้ว  $7^{\frac{x+2y}{1-x}}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 175

2. 225

3. 235

4. 265

**โจทย์ปัญหา 1.33.** กำหนดให้  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนจริงโดยที่  $540^m = 5$  และ  $540^n = 2$  แล้ว  $135^{\frac{m+2n-1}{3(2n-1)}}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 3

2. 5

3. 7

4. 11

**โจทย์ปัญหา 1.34.**  $\frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}} + \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1.  $2^{-\frac{2}{3}}$                       2.  $2^{-\frac{1}{3}}$                       3. 1                              4.  $2^{\frac{1}{3}}$

**โจทย์ปัญหา 1.35.** กำหนดให้  $x$  เป็นคำตอบของสมการ

$$2^{x+2x+\dots+45x} = 2048 \cdot 2^{11x+12x+\dots+45x}$$

จงหาค่าของ  $3^{\frac{1}{x}}$

1. 9                              2. 27                              3. 81                              4. 243

**โจทย์ปัญหา 1.36.** (สอวน คอม 2564)

ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยที่สุดและค่ามากที่สุดตามลำดับที่เป็นคำตอบของสมการ

$$(2^x - 2)^{10} = 32^x$$

จงหาค่าของ  $9^{b-a}$

1. 18                              2. 27                              3. 81                              4. 729

**โจทย์ปัญหา 1.37.** กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $\frac{4^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 2^{x-2}}{2^x + 2^{x+1}} = 8$   
แล้วค่าของ  $\sqrt{2^{x+1}} + \sqrt{2^{x+2}} + \dots + \sqrt{2^{x+11}}$  เท่ากับเท่าใด

**โจทย์ปัญหา 1.38.** (สอน คอม 2566)

ในการทดลองขยายพันธุ์ของแบคทีเรียครั้งหนึ่ง พบว่าจำนวนแบคทีเรียจะเพิ่มเป็น 2 เท่าทุก ๆ 5 นาที ถ้าการทดลองเริ่มจากมีแบคทีเรีย 1000 เซลล์ แล้วเมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียเท่าใด

- |                  |                          |
|------------------|--------------------------|
| 1. 2048000 เซลล์ | 3. 8192000 เซลล์         |
| 2. 4096000 เซลล์ | 4. มากกว่า 8192000 เซลล์ |

**โจทย์ปัญหา 1.39.** ให้  $x$  เป็นจำนวนจริงที่ทำให้  $2022^x < 2021^x$  ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

1.  $2564^x < 0$                       2.  $(-1)^x > 0$                       3.  $x^{2564} > x^{2566}$                       4.  $x^{2564} > x^{2565}$

**โจทย์ปัญหา 1.40.** ข้อใดถูกต้องสำหรับ  $x$  เป็นจำนวนจริงและ  $x^4 < |x^3|$

1.  $x < -1$  หรือ  $-1 < x < 0$                       3.  $0 < x < 1$  หรือ  $x > 1$   
 2.  $-1 < x < 0$  หรือ  $0 < x < 1$                       4.  $x < -1$  หรือ  $x > 1$

**โจทย์ปัญหา 1.41.** (สอวน คณิต 2548)

จงหาจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{7}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{2n-1}{7}}$$

มีค่ามากกว่า 10000

**โจทย์ปัญหา 1.42.** (สอน คณิต 2553)

ให้

$$A = \{n \in \mathbb{Z}^+ | \exists m \in \mathbb{Z} [2^8 + 2^{10} + 2^n = m^2]\}$$

จงเขียน  $A$  แบบแจกแจงสมาชิก

**โจทย์ปัญหา 1.43.** (สอน คณิต 2562)

ถ้า  $a^{3n} = 5$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม แล้ว  $\frac{a^{4n} + a^{7n} + a^{-5n}}{a^{-2n} + a^n}$  มีค่าเท่าใด

**โจทย์ปัญหา 1.44.** (สอวน คณิต 2562)

สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n \geq 2$  ใดๆ

นิยาม  $f(n)$  เป็นตัวประกอบที่ใหญ่ที่สุดของ  $n$  ที่ไม่ใช่ตัวมันเอง

กำหนดให้  $a_1 = 2019^{2562}$  และสำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  ใดๆ ซึ่ง  $a_n \geq 2$  เป็นจำนวนเต็มบวก

นิยาม  $a_{n+1} = a_n - f(a_n)$

ถ้า  $a_k$  คือพจน์แรกของลำดับนี้ที่มีค่าน้อยกว่า 2 แล้ว  $k$  มีค่าเท่าใด (Hint: 673 เป็นจำนวนเฉพาะ)

**โจทย์ปัญหา 1.45.** (สอวน คณิต 2563)

กำหนดให้  $k$  เป็นจำนวนนับ ถ้า

$$\underbrace{3^{k+1} + 3^{k+1} + \dots + 3^{k+1}}_{3^k \text{ พจน์}} = 3645$$

แล้วจงหาค่าของ

$$\underbrace{\frac{1}{9^k} + \frac{1}{9^k} + \dots + \frac{1}{9^k}}_{243 \text{ พจน์}} = 3645$$

**โจทย์ปัญหา 1.46.** (สอวน คณิต 2565)

กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งสอดคล้องกับสมการ  $2^a = 3^b = 216^c$

จงหาค่าของ  $\frac{ab}{ac + bc}$

**โจทย์ปัญหา 1.47.** (สอวน คณิต 2565)

กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนตรรกยะบวกซึ่งสอดคล้องกับ

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

จงหาค่า  $a$

**โจทย์ปัญหา 1.48.** (สอวน คณิต 2567)

ให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$$15^{\frac{1}{x+1}} = \left(2025 \cdot 5^{\frac{y}{2}}\right)^{\frac{1}{x+13}}$$

ค่าของ  $x + y$  มีค่าเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 1.49.** (สอน คณิต 2551)

ให้  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  เป็นจำนวนตรรกยะที่สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} = 2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} + \dots + 2^{q_n}$$

จงหาค่าของ  $2(n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n)$



## ส่วนที่ 2

### ฟังก์ชัน (1)

เนื้อหาในบทนี้มุ่งเน้นการปูพื้นฐานความเข้าใจเกี่ยวกับการคำนวณหาค่าของฟังก์ชัน (Function Evaluation) และการจำแนกรูปแบบลักษณะต่างๆ ของฟังก์ชันที่สำคัญในทางคณิตศาสตร์ โดยผู้อ่านจะได้ทำความเข้าใจกับนิยาม ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตาม รวมถึงการแทนค่าในรูปแบบพหุนามและฟังก์ชันอดิศัยเบื้องต้น

ทั้งนี้ เพื่อให้กระบวนการเรียนรู้เป็นไปอย่างต่อเนื่องและกระชับ บทนี้จึงให้ความสำคัญกับหลักการใช้งานและการแก้โจทย์ปัญหาในระดับประยุกต์เป็นหลัก หากผู้อ่านท่านใดมีความประสงค์ที่จะศึกษาบทนิยามโดยละเอียดในเชิงทฤษฎีขั้นสูง การพิสูจน์คุณสมบัติเฉพาะทาง หรือโครงสร้างทางพีชคณิตที่ซับซ้อนของฟังก์ชันในเชิงลึก ผู้เขียนขอแนะนำให้ศึกษาเพิ่มเติมในเนื้อหาของบทที่ 8 ซึ่งได้รวบรวมรายละเอียดทางวิชาการไว้อย่างครบถ้วน

## 2.1 ฟังก์ชันและการหาค่าของฟังก์ชัน

ความหมายของฟังก์ชันในบทนี้ ผู้เขียนขอกล่าวว่าการแปลงตัวแปรต้น (ไม่ว่าจะเป็นตัวแปรเดียวหรือหลายตัวแปร) แล้วออกมาเป็นตัวแปรตามเพียงตัวเดียวเท่านั้น ส่วนในความหมายเชิงคณิตศาสตร์จะอยู่ในบทที่ 8 โดยลักษณะของเขียนฟังก์ชันจะเขียนอยู่ในรูปแบบ

$$\text{ชื่อฟังก์ชัน ( ตัวแปรต้นทั้งหมด )} = \text{ตัวแปรตาม}$$

**ตัวอย่างที่ 2.1.** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.  $f(x) = x - 4$

$$f(2) =$$

$$f(3) =$$

$$f(0) =$$

$$f(-1) =$$

$$f(-2) =$$

2.  $f(x) = x^2 + 1$

$$f(2) =$$

$$f(1) =$$

$$f(0) =$$

$$f(-1) =$$

$$f(-2) =$$

3.  $f(x) = 2^x$

$$f(4) =$$

$$f(2) =$$

$$f(0) =$$

$$f(-2) =$$

$$f(-3) =$$

4.  $f(x) = x \cdot 3^x$

$$f(2) =$$

$$f(1) =$$

$$f(0) =$$

$$f(-1) =$$

$$f(-2) =$$

**ตัวอย่างที่ 2.2.** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.  $f(x) = x + 5$

$$f(x - 1) =$$

$$f(x + 2) =$$

$$f(2x) =$$

$$f(3x - 1) =$$

$$f(x^2 - 3) =$$

$$2. f(x) = x^2 - 5$$

$$f(x - 1) =$$

$$f(x + 1) =$$

$$f(x + 2) =$$

$$f(x - 2) =$$

$$f(2x) =$$

$$f(3x - 1) =$$

$$f(4x + 1) =$$

$$3. f(x) = x^2 + 2^x$$

$$f(x - 1) =$$

$$f(x + 3) =$$

$$f(2x + 5) =$$

$$f(3x - 2) =$$

$$f(2x^2) =$$

**ตัวอย่างที่ 2.3.** จากสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหา  $f(x)$

$$1. f(x + 1) = 2x - 2$$

$$f(x) =$$

$$2. f(x - 1) = x + 5$$

$$f(x) =$$

$$3. f(x + 2) = x^2$$

$$f(x) =$$

$$4. f(x - 2) = x^2 - 5x$$

$$f(x) =$$

$$5. f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x + 4}{x}$$

$$f(x) =$$

$$6. f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{5x+6}{x+2}$$

$$f(x) =$$

$$7. f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$$

$$f(x) =$$

$$8. f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f(x) =$$

**โจทย์ปัญหา 2.1.** (สอวน คณิต 2558)

ให้  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ที่กำหนดโดย  $f(x+7) = x^2 - 8x + 12$  จงหาว่า  $f(-7)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.2.** (สอวน คณิต 2552)

ให้  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) - 8$$

สำหรับทุก ๆ  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$  จงหา  $f(0)$

**โจทย์ปัญหา 2.3.** (สอน คณิต 2554)

ให้  $f$  เป็นพหุนามที่สอดคล้องกับ  $f(x+3) = 3x^2 + 7x + 4$

ถ้า  $f(x) = ax^2 + bx + c$  แล้ว  $a - b + c$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.4.** (สอน คณิต 2549)

ถ้า  $f(x) = 4x$  และ  $g(x) = \frac{2}{x-1}$  จงหาค่าของ  $x$  ที่ทำให้  $f(g(x)) = g(f(x))$

**โจทย์ปัญหา 2.5.** (สอน คณิต 2566)

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} x + 10 & \text{เมื่อ } x < 100 \\ f(f(x - 11)) & \text{เมื่อ } x \geq 100 \end{cases}$$

จงหาค่าของ  $f(111)$

**โจทย์ปัญหา 2.6.** (สอวน คณิต 2554)

ให้  $f$  เป็นพหุนามที่สอดคล้องกับ  $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$  โดยที่  $a, b$  เป็นค่าคงตัว ถ้า  $f(-3) = 2$  แล้ว  $f(3)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.7.** (สอวน คณิต 2553)

ให้  $a, b, c$  เป็นค่าคงที่ และ  $P(x) = ax^7 + bx^3 + cx + 5$  ถ้า  $P(-7) = 7$  แล้ว  $P(7)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.8.** (สอวน คณิต 2549)

ให้  $P(x) = Ax^{2549} + Bx^7 + Cx^5 + Dx + E$  เมื่อ  $A, B, C, D, E$  เป็นค่าคงตัว  
 ถ้า  $P(2549) = 2549$  จงหาค่าของ  $E$  ที่ทำให้  $P(-2549) = (P(2549))^2$

**โจทย์ปัญหา 2.9.** (สอวน คณิต 2563)

กำหนดให้  $f\left(\frac{x}{2}\right) = 2x^2 - x + 3$  สำหรับทุก  $x \in \mathbb{R}$

จงหาผลคูณของค่า  $y$  ทั้งหมดที่ทำให้  $f(3y) = 10$

**โจทย์ปัญหา 2.10.** (สอวน คอม 2561)

กำหนด

$$f(3-x) = \begin{cases} -3-x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 3-x & , x > 0 \end{cases}$$

และ  $A * B = f(B - A^2)$  แล้วค่าของ  $(-1) * f(2)$  มีค่าอยู่ในช่วงใด

1.  $(-10, 0)$                       2.  $(-5, 1)$                       3.  $(5, 10)$                       4.  $(-4, 3)$

**โจทย์ปัญหา 2.11.** (สอวน คอม 2564)

ให้พหุนาม  $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$  จงหาค่าของ  $a + b$  เมื่อ  $f(-2) = f(1) = 0$

1. -8

2. -3

3. 3

4. 5

**โจทย์ปัญหา 2.12.** (สอวน คอม 2564)

จงหาค่าของ  $32^*$  เมื่อกำหนดให้ ตัวดำเนินการ  $*$  มีการดำเนินการดังนี้

$$a^* = a - 2$$

$$\text{เมื่อ } a \geq 50$$

$$\text{และ } a^* = ((a + 4)^*)^*$$

$$\text{เมื่อ } a < 50$$

1. 47

2. 48

3. 49

4. 50

**โจทย์ปัญหา 2.13.** (สอวน คอม 2566)

กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 3x, & x < -2 \\ \frac{x^2}{4}, & -2 \leq x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$$

จงหาค่าของ  $f(-3) + f(f(-2))$

1. -3

2. 13

3. 15

4. 17

**โจทย์ปัญหา 2.14.** (สอวน คอม 2565)

วัตถุสามชนิด  $A, B$  และ  $C$  เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการอธิบายระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุแต่ละชนิดตามเวลา  $T$  ซึ่งมีหน่วยวินาทีเป็นดังนี้

- ให้  $S_A$  แทนระยะที่วัตถุ  $A$  เคลื่อนที่ สมการคือ  $S_A = 10T^2 + 10T + 600$
- ให้  $S_B$  แทนระยะที่วัตถุ  $B$  เคลื่อนที่ สมการคือ  $S_B = 2T^2 + 800T + 500$
- ให้  $S_C$  แทนระยะที่วัตถุ  $C$  เคลื่อนที่ สมการคือ  $S_C = T^3 + 100$

**ข้อใด กล่าวได้ถูกต้อง**

1. ที่เวลาใด ๆ วัตถุชนิด  $A$  เคลื่อนที่ได้ระยะทางสูงสุด รองลงมาคือ  $B$  และ  $C$  เคลื่อนที่ได้ระยะทางน้อยที่สุด
2. ที่เวลาใด ๆ วัตถุชนิด  $B$  เคลื่อนที่ได้ระยะทางสูงสุด รองลงมาคือ  $A$  และ  $C$  เคลื่อนที่ได้ระยะทางน้อยที่สุด
3. หลังจากผ่านไป 1200 วินาที วัตถุชนิด  $A$  จะเคลื่อนที่ได้ระยะทางสูงสุด
4. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

**โจทย์ปัญหา 2.15.** (สอวน คณิต 2555)

ให้  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  ที่กำหนดโดย  $f(1) = 0$  และถ้า  $a, b \in \mathbb{Z}$  ( $a, b$  อาจจะเท่ากันก็ได้) และ  $f(a) = f(b)$  แล้ว  $f(a - b) \neq f(a + b)$  ถ้า

$$X = \{a \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2012\} | f(a) = 0\}$$

แล้ว  $|X|$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.16.** (สอวน คณิต 2558)

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2$$

ทุก ๆ  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  จงหาว่า  $f(1) - f(2)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.17.** (สอวน คณิต 2558)

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่  $y = f(x)$  มีกราฟเป็นพาราโบลาที่สอดคล้องกับ

$$f(x+1) - f(x) = 8x + 3$$

และ  $f(0) = 5$  จงหาว่า  $f(-1)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.18.** (สอวน คณิต 2543)

กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนนับ นิยาม  $d(n)$  แทนผลบวกของเลขโดดที่เขียนแทน  $n$

เช่น  $d(205) = 2 + 0 + 5 = 7$ ,  $d(1772) = 1 + 7 + 7 + 2 = 17$

ถ้า  $N = (10^{n+2} + 2 \cdot 10^n)^2$  แล้ว  $d(N)$  มีค่าเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.19.** (สอวน คณิต 2544)

กำหนดให้  $F_0(x) = \frac{1}{1-x}$  และ  $F_k(x) = F_0(F_{k-1}(x))$  สำหรับทุกจำนวนนับ  $k$

$$\text{และกำหนดให้ } G(n) = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } 1 \leq n \leq 9 \\ a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k & \text{เมื่อ } n > 9 \end{cases}$$

โดยที่  $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$  แล้ว  $F_{2543}(2544) + G(2545)$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

**โจทย์ปัญหา 2.20.** (สอวน คณิต 2546)

ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้  $d(n)$  แทนผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน  $n$  เช่น

$$d(2546) = 2 + 5 + 4 + 6 = 17, d(2003) = 2 + 0 + 0 + 3 = 5$$

1. จำนวนเต็มบวก  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $d(n) = 50$  คือจำนวนอะไร
2. จำนวนเต็มบวก  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $d(n) = 50$  คือจำนวนอะไร

**โจทย์ปัญหา 2.21.** (สอวน คณิต 2547)

ให้  $N$  แทนจำนวนเต็มบวก

กำหนดให้  $d(N)$  แทน ผลบวกของเลขโดดที่เขียนแทน  $N$

เช่น  $d(1071) = 1 + 0 + 7 + 1 = 9$  ให้  $U = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  และ  $X = \{x \in U \mid d(x) = 6\}$   
แล้วจำนวนสมาชิกในเซต  $X$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.22.** (สอวน คณิต 2550) ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า  $s(n)$  แทนผลบวกของเลขโดดทุกจำนวน ที่เขียนแทน  $n$  จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวก  $n$  ทุกจำนวนที่สอดคล้องกับ

$$n - s(n) = 666$$

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ในการตอบโจทย์ปัญหา 2.23 ถึงโจทย์ปัญหา 2.24

กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้  $\text{Sum}(n)$  แทน ผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน  $n$  ในระบบเลขฐาน 10

เช่น  $\text{Sum}(1135) = 1 + 1 + 3 + 5 = 10$

**โจทย์ปัญหา 2.23.** (สอวน คณิต 2551)

ให้  $N = (10^2 + 1)(10^{2^2} + 1)(10^{2^3} + 1) \dots (10^{2^7} + 1)$  จงหา  $\text{Sum}(N)$

**โจทย์ปัญหา 2.24.** (สอวน คณิต 2551)

ให้  $X = \{ \text{Sum}(7n) | n \in \{1, 2, 3, \dots, 10000\} \}$

ถ้า  $a$  เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดใน  $X$  และ  $b$  เป็นจำนวนที่มากที่สุดที่สุดใน  $X$

แล้ว  $a + b$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.25.** (สอวน คณิต 2551)

กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้  $D(n)$  แทน เซตของเลขโดดที่เขียนแทน  $n$

เช่น  $D(1231) = \{1, 2, 3\}$  และ  $M(742) = \{2, 4, 7\}$

จงหาจำนวนเต็มบวก  $N$  ที่สอดคล้องกับสมบัติ

1.  $10000 \leq N \leq 100000$
2.  $D(n)$  มีสมาชิก 3 ตัว และ  $D(n) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

**โจทย์ปัญหา 2.26.** (สอวน คณิต 2563)

ให้  $B(n)$  แทนจำนวนของคู่เลขโดดที่อยู่ติดกันแต่ไม่เหมือนกัน  
เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนที่เขียนในระบบตัวเลขฐานสอง เช่น

$$B(14) = B(1110_2) = 1$$

$$B(17) = B(10001_2) = 2$$

$$B(20) = B(10100_2) = 3$$

$$B(45) = B(101101_2) = 4$$

สำหรับ  $1 \leq n \leq 64$  มีจำนวนเต็ม  $n$  ทั้งหมดกี่ตัว ที่  $B(n) = 2$

**โจทย์ปัญหา 2.27.** (สอน คณิต 2568)

จำนวนเต็มบวกสามหลัก  $n$  สามารถเขียนในระบบเลขฐานสิบได้เป็น  $abc$

โดยที่  $a, b, c$  แทนเลขโดดในหลักร้อย หลักสิบ และหลักหน่วย ตามลำดับและ  $a \neq 0$

กำหนดให้  $d(n) = a^2 + b^2 + c^2$  และ  $s(n) = a + 2b + c$

จำนวนเต็มบวกสามหลัก  $n$  เรียกว่า **จำนวนวิเศษ** ถ้า  $d(n) \leq 2s(n)$

มีจำนวนวิเศษทั้งหมดกี่จำนวน

**โจทย์ปัญหา 2.28.** (สอน คณิต 2568)

สำหรับจำนวนเต็มบวก  $m$  ใด ๆ ให้  $S(m)$  แทนผลบวกของเลขโดดทั้งหมดที่ได้จากการเขียน  $m$  ในระบบเลขฐานสิบ ถ้า  $N = 999 \dots 9$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มี  $n$  หลัก โดยแต่ละหลักเป็นเลข 9 เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $S(N^3) = 486$  แล้ว ค่าของ  $n$  เท่ากับเท่าใด

## 2.2 ลำดับ

ลำดับ ถือว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งโดยที่มีตัวแปรต้นเป็นจำนวนนับ ในบทนี้เราพิจารณาภายใต้ตัวแปรตามเป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยเราจะเขียนสัญลักษณ์

$$a_n = f(n)$$

สำหรับทุกจำนวนนับ  $n$  และจะเรียก  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ว่าเป็นลำดับบนจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ  $a_k$  เป็นจำนวนจริง สำหรับทุกจำนวนนับ  $k$

**ตัวอย่างที่ 2.4.** กำหนดให้  $a_n$  เขียนอยู่ในรูปปิด จงหาค่าของ  $a_1, a_2, a_3$

1.  $a_n = 2n + 1$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

2.  $a_n = n^2 - 2n$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

3.  $a_n = n^2 + 4n + 5$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

4.  $a_n = 2^n$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

5.  $a_n = n!$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

**โจทย์ปัญหา 2.29.** (สอน คอม 2562)

กำหนดให้ลำดับชนิดหนึ่งมีรูปทั่วไป คือ  $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$  และกำหนด  $S_1 = 5$  และ  $S_2 = 2$  จงหาผลรวมของสมาชิกลำดับที่ 4, 5 และ 6

1. 39

2. 50

3. 57

4. 64

**โจทย์ปัญหา 2.30.** (สอน คอม 2565)

ให้ลำดับตัวเลขเป็น  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 5, a_4 = 5, a_5 = 21$

จงพิจารณาว่า  $a_n$  ควรเป็นข้อใด

1.  $a_n = 2a_{n-1} + 1$

2.  $a_n = 4a_{n-2} + 1$

3.  $a_n = a_{n-4} + 2$

4.  $a_n = 2a_n + 1$

**โจทย์ปัญหา 2.31.** (สอวน คณิต 2555)

ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2012}$  เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า ผลบวกของสามพจน์ที่เรียงกันในลำดับนี้เท่ากับ 30 และ  $a_3 = 5$  จงหาว่า  $a_{2011} + a_{2012}$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.32.** (สอวน คณิต 2555)

ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots$  แทนลำดับของจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับ

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 7, a_6 = 8, \dots$  (ตัดพจน์ที่เป็นพหุคูณของ 3 ออกจากลำดับของจำนวนเต็มบวก) ให้  $N \in \mathbb{Z}^+$  กำหนด

$$S(N) = \{k \in \mathbb{Z}^+ | \exists i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} [a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \dots + a_{i+k} = N]\}$$

จงหาว่า  $|S(300)|$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.33.** (สอน คณิต 2552)

กำหนดลำดับฟีโบนัชชี  $F_1, F_2, F_3, \dots$  โดย  $F_1 = F_2 = 1$  และ  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  เมื่อ  $n \geq 2$  ให้

$$X = \{n | 1 \leq n \leq 1000 \text{ และ } 13 \text{ เป็นตัวประกอบของ } F_n\}$$

จงหา  $|X|$

## 2.3 อนุกรม

กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับ นิยามสัญลักษณ์

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

**ตัวอย่างที่ 2.5.** จงหาค่าของ

1.  $\sum_{k=1}^4 k =$

2.  $\sum_{k=2}^5 k^2 =$

3.  $\sum_{k=7}^{10} k(8 - k) =$

4.  $\sum_{k=1}^6 2^k =$

5.  $\sum_{k=0}^3 (3k + 2) =$

6.  $\sum_{k=5}^6 (k^2 - 4k) =$

### ทฤษฎีบท 2.1: อนุกรมที่ควรรอบ

กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ  $n$  เป็นจำนวนนับใด ๆ เราจะได้ว่า

1.  $\sum_{k=1}^n a = na$

2.  $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3.  $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4.  $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

**ตัวอย่างที่ 2.6.** จงหาค่าของ

$$1. \sum_{k=1}^{20} 4 =$$

$$2. \sum_{k=1}^{30} k =$$

$$3. \sum_{k=1}^{20} k^2 =$$

$$4. \sum_{k=1}^{10} k^3 =$$

$$5. 1 + 2 + 3 + \dots + 199 =$$

$$6. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 =$$

$$7. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 49^3 =$$

**ทฤษฎีบท 2.2: สมบัติของอนุกรม**

กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots$  และ  $b_1, b_2, b_3, \dots$  เป็นลำดับบนจำนวนจริง  $c$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนนับใด ๆ เราจะได้ว่า

$$1. \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$2. \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

**ตัวอย่างที่ 2.7.** จงหาค่าของ

$$1. \sum_{k=1}^{15} (k^2 + k) =$$

$$2. \sum_{k=1}^{19} 4k^3 =$$

$$3. \sum_{k=1}^{13} (k^2 + k - 3) =$$

$$4. \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 5) =$$

**โจทย์ปัญหา 2.34.** (สอวน คอม 2562)

จงหาค่าของ  $\sum_{i=1}^n (n - i)$  เมื่อ  $n = 100$

1. 4750                      2. 4850                      3. 4950                      4. 5050

**โจทย์ปัญหา 2.35.** (สอวน คอม 2566)

ผลรวมของจำนวนคู่ที่เป็นบวก 100 จำนวนแรกคือ

1. 2550                      2. 5050                      3. 10000                      4. 10100

**โจทย์ปัญหา 2.36.** (สอวน คอม 2561)

กำหนด  $f(x) = 2x + 4$  และ  $g(x) = x^2$

นิยาม  $\sum_{i=1}^n h(i) = h(1) + h(1) + \dots + h(n)$  จงหาค่าของ  $\sum_{i=1}^4 (f(i) + g(i))$

1. 20                      2. 16                      3. 30                      4. 66

**โจทย์ปัญหา 2.37.** (สอน คอม 2545)

$$\text{กำหนดให้ } x = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$\text{และ } y = -2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 199$$

จงหาผลคูณของ  $x$  และ  $y$

**โจทย์ปัญหา 2.38.** (สอน คณิต 2565)

$$\text{กำหนดให้ } x \text{ เป็นจำนวนจริง และ } a = x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 10),$$

$$b = 8 + 16 + 24 + \dots + 80 \text{ และ } c = 88x$$

ถ้า  $4a^2 + b + c + 4 = 0$  จงหาค่าของ  $c$  (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

**โจทย์ปัญหา 2.39.** (สอน คอม 2566)

กำหนด  $f$  เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่ไม่ขนานกับแกน  $X$  และแกน  $Y$  ที่ทำให้

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10) = 140$$

$$\text{และ } f(f(1)) + f(f(2)) + f(f(3)) + \dots + f(f(10)) = 310$$

จงหาค่าของ  $f(1)$

1. 1

2. 3

3. 5

4. 7

**โจทย์ปัญหา 2.40.** (สอวน คณิต 2551)

ให้  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$  ที่กำหนดโดย

$$f(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i$$

จงหาจำนวนเต็มบวก  $a, b$  ที่  $a + b$  น้อยที่สุด และ  $f(a) + f(b) + f(a + b) = 2008$

**โจทย์ปัญหา 2.41.** (สอวน คณิต 2561)

สำหรับจำนวนนับ  $n$  ใดๆ นิยามฟังก์ชัน  $P(n)$  เป็นผลคูณของเลขโดด ที่ไม่เป็นศูนย์ของ  $n$  ในระบบฐานสิบ (ตัวอย่างเช่น  $P(1023) = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ) จงหาค่าของ  $\sum_{n=1}^{99} P(n)$

**โจทย์ปัญหา 2.42.** (สอวน คณิต 2567)

กำหนดให้  $A = \{1, 2, \dots, 67\}$  จงหาจำนวนของสับเซต  $H$  ทั้งหมดของเซต  $A$  โดยที่ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $H$  มีค่าเท่ากับ 2272

**โจทย์ปัญหา 2.43.** (สอวน คณิต 2554)

ให้  $n \in \mathbb{Z}^+$  กำหนด  $E(n)$  แทน ผลบวกของเลขโดดที่เป็นจำนวนคู่ ทุกจำนวนที่เขียนแทน  $n$

เช่น  $E(21483) = 2 + 4 + 8 = 14$  จงหา  $\sum_{i=1}^{100} E(i)$

**โจทย์ปัญหา 2.44.** (สอวน คณิต 2558)

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$

จงหาว่า  $\sum_{i=1}^{100} f\left(\frac{1}{i}\right)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.45.** (สอวน คณิต 2557)

ให้  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$  ที่กำหนดโดย  $f(n)$  เท่ากับ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม ที่มากที่สุดที่  $10^k$  เป็นตัวประกอบของ  $n!$  จงหาว่า  $\sum_{i=1}^{100} f(i)$  เท่ากับเท่าไร

### อนุกรมเทเลสโคปิก

กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับบนจำนวนจริง

เราเรียก  $\sum_{k=1}^n a_k$  ว่าอนุกรมเทเลสโคปิก ก็ต่อเมื่อมีลำดับ  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  ที่ทำให้  $a_1 = b_1$  และ

$$a_k = b_k - b_{k-1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ  $k$  ที่มากกว่าสอง และเราจะได้ว่า  $\sum_{k=1}^n a_k = b_n$

**ตัวอย่างที่ 2.8.** จงหาค่าของอนุกรมต่อไปนี้

$$1. \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2. \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$3. \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$4. \sum_{k=1}^{63} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

**โจทย์ปัญหา 2.46.** (สอวน คณิต 2550)

ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(n) = n^3$  และ  $g(n) = f(n+1) - f(n)$

จงหาค่าของ  $\frac{1}{10}(g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(9))$

**โจทย์ปัญหา 2.47.** (สอวน คณิต 2553)

ให้

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$$

เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots, 2009$  และ  $a_1 = 1$  จงหา  $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{2009}a_{2010}$

**โจทย์ปัญหา 2.48.** (สอวน คณิต 2553)

ให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้  $f(1) = a$  และ

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$$

เมื่อ  $n > 1$  จงหาค่า  $a$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $f(100)$  เป็นจำนวนเต็ม

**โจทย์ปัญหา 2.49.** (สอวน คณิต 2560)

ให้  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย  $f(1) = 2017$  และ

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n \geq 2$  จงหาค่าของ  $\frac{1}{f(2017)}$

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ในการตอบโจทย์ปัญหา 2.50 ถึงโจทย์ปัญหา 2.53

ให้  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$  ที่กำหนดโดย

$$f(n) = \sum_{i=1}^n (i+1)! \cdot i^2$$

และให้  $X_n = \{p \in \mathbb{Z}^+ | p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ และ } p \text{ หาร } f(n) - 2 \text{ ลงตัว}\}$

และ  $Y_m = \{n \in \mathbb{Z}^+ | |X_n| = m\}$

**โจทย์ปัญหา 2.50.** (สอวน คณิต 2558)

ให้  $N = f(4)$  จงหาผลบวกของเลขโดดที่เขียนแทน  $N$

**โจทย์ปัญหา 2.51.** (สอวน คณิต 2558)

จงหา  $|X_{600}|$

**โจทย์ปัญหา 2.52.** (สอน คณิต 2558)

จงเขียน  $Y_{80}$  แบบแจกแจงสมาชิก

**โจทย์ปัญหา 2.53.** (สอน คณิต 2558)

จงหา  $\sum_{i=11}^{20} |Y_i|$

**โจทย์ปัญหา 2.54.** (สอวน คณิต 2558)

 ให้  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  ที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

 สำหรับทุก ๆ  $x, y \in \mathbb{Q}$  และ  $f(1) = 2$  จงหาว่า  $f(10)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.55.** (สอวน คณิต 2558)

 ให้  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 5$$

 สำหรับทุก ๆ  $x, y \in \mathbb{Z}$  และ  $f(1) = 10$  จงหาว่า  $f(10)$  เท่ากับเท่าไร

**โจทย์ปัญหา 2.56.** (สอวน คณิต 2543)

 กำหนดให้  $f, g, h$  เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริงซึ่ง

$$f(x) = x^3 - 1, g(x) = x^3 + 1 \text{ และ } h(x) = \frac{f(x)}{g(x+1)}$$

 กำหนดให้  $a = h(100), b = \frac{1+3+5+\dots+99}{2+4+6+\dots+100}$   
 และ  $c = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$ 

 ค่าของ  $[a] + [b] + [c]$  มีค่าเท่าไร