หนังสือเสริมความรู้ทักษะทางคณิตศาสตร์
เรื่อง

อสมการ
Inequality

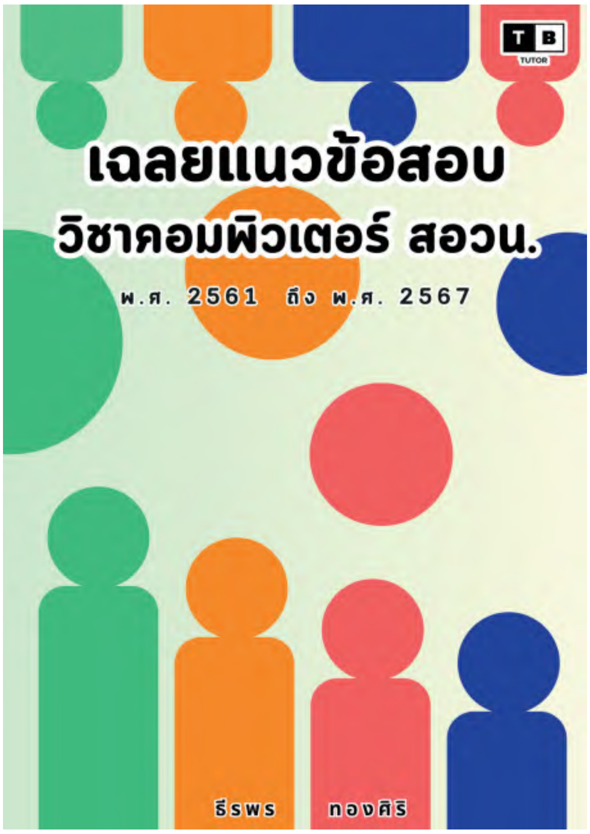
ธีรพร ทองศิริ

TUTOR

สวัสดีครับ ผมหนึ่งในทีมงานของ **TBTUTOR**
ต้องขอขอบคุณในการสนับสนุนหนังสือ
ของ **TBTUTOR** เป็นอย่างมากครับ
ผมหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับคุณมากนะครับ
สามารถดูหนังสือเล่มอื่นหรือข้อมูลต่าง ๆ ของเราได้
ตามนี้เลยนะครับ

ติดตามผลงานได้ที่ **TBTUTOR**

หนังสือในเครือของ TBTUTOR



เนื้อหา

บทเกริ่นนำ

หนังสือเล่มนี้เป็นการรวบรวมเทคนิคและแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาอสมการ ซึ่งมักปรากฏในสนามแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับโอลิมปิก ผู้เขียนมิได้อ้างตนว่าเชี่ยวชาญด้านอสมการ แต่ได้ถ่ายทอดประสบการณ์จากการศึกษา ค้นคว้า และฝึกฝนด้วยตนเอง พร้อมทั้งสรุปเทคนิคสำคัญจากแหล่งต่าง ๆ มารวบรวมไว้ในเล่ม เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาและพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาด้านอสมการให้แก่ผู้อ่าน

ในหนังสือเล่มนี้ จะมีการใช้สัญลักษณ์และรูปแบบเฉพาะบางประการ เพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจและอ้างอิงในเนื้อหา ดังต่อไปนี้

$\mathbb{N}$	แทน	เซตของจำนวนนับทั้งหมด
$\mathbb{Z}$	แทน	เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด
$\mathbb{Z}^+$	แทน	เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด
$\mathbb{Z}^-$	แทน	เซตของจำนวนเต็มลบทั้งหมด
$\mathbb{Q}$	แทน	เซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด
$\mathbb{Q}^+$	แทน	เซตของจำนวนตรรกยะบวกทั้งหมด
$\mathbb{Q}^-$	แทน	เซตของจำนวนตรรกยะลบทั้งหมด
$\mathbb{R}$	แทน	เซตของจำนวนจริงทั้งหมด
$\mathbb{R}^+$	แทน	เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด
$\mathbb{R}^-$	แทน	เซตของจำนวนจริงลบทั้งหมด
$\mathbb{R}_0^+$	แทน	เซตของจำนวนจริงที่ไม่ติดลบทั้งหมด

ส่วนที่ 1

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับอสมการ

ในบทนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติพื้นฐานของจำนวนจริงและการนิยามเครื่องหมายของอสมการ ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการพิสูจน์อสมการขั้นสูง เนื้อหาจะครอบคลุมถึงการพิสูจน์อสมการพื้นฐานที่มักใช้ในสนามแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับโอลิมปิก โดยเริ่มจากการศึกษาสมบัติของจำนวนจริงและการประยุกต์ใช้สมบัติเหล่านั้นในการพิสูจน์อสมการต่าง ๆ

1.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง

ก่อนอื่นเราจะกล่าวว่าสมบัติของการเท่ากันของจำนวนจริง โดยมีคุณสมบัติดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1.1: สมบัติของการเท่ากัน

1. สมบัติสะท้อน :
   $a = b$ สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b
2. สมบัติสมมาตร :
   สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. สมบัติถ่ายทอด :
   สำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

ต่อมาเราจะกล่าวถึงสมบัติพื้นฐานของจำนวนจริงที่สามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์อสมการที่มีความซับซ้อนมากขึ้นได้ โดยสมบัติพื้นฐานของจำนวนจริงมีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1.2: สมบัติของจำนวนจริง

1. สมบัติปิดสำหรับการบวก :
   $a + b \in \mathbb{R}$ สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b
2. สมบัติปิดสำหรับการคูณ :
   $ab \in \mathbb{R}$ สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b
3. สมบัติสลับที่สำหรับการบวก :
   $a + b = b + a$ สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b
4. สมบัติสลับที่สำหรับการคูณ :
   $ab = ba$ สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b
5. สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก :
   $(a + b) + c = a + (b + c)$ สำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c
6. สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ :
   $(ab)c = a(bc)$ สำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c
7. สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการบวก :
   สำหรับทุกจำนวนจริง a จะมี $0 \in \mathbb{R}$ เพียงจำนวนเดียวที่ทำให้ $a + 0 = a = 0 + a$
8. สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการคูณ :
   สำหรับทุกจำนวนจริง a จะมี $1 \in \mathbb{R}$ เพียงจำนวนเดียวที่ทำให้ $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
9. สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก :
   สำหรับทุกจำนวนจริง a มีจำนวนจริง b ที่ทำให้ $a + b = 0$

10. สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการคูณ :
    สำหรับทุกจำนวนจริง a ถ้า $a \neq 0$ แล้วมีจำนวนจริง b ที่ทำให้ $ab = 1$
11. สมบัติการแจกแจง :
    $a(b+c) = ab + ac$ สำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c

จากสมบัติทั้ง 11 ข้อ เราได้ว่า

1. จากสมบัติข้อที่ 9 เรานิยามสัญลักษณ์ของ b คือ $-a$
2. จากสมบัติข้อที่ 10 เรานิยามสัญลักษณ์ของ b คือ a^{-1}
3. เรานิยาม $\frac{1}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$ ว่า $\frac{1}{a} = a^{-1}$
4. เรานิยาม $\frac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ ว่า $\frac{a}{b} = ab^{-1}$
5. เรานิยาม $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนนับ
6. เรานิยาม $a^0 = 1$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์
7. เรานิยาม $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็มลบ

ต่อมาเราจะศึกษาผลลัพธ์จากสมบัติพื้นฐานของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 1.1.3: สมบัติของจำนวนจริง

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. ถ้า $a + b = a$ แล้ว $b = 0$
2. ถ้า $ab = a$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $b = 1$
3. $a \cdot 0 = 0$
4. ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

พิสูจน์

เราจะพิสูจน์ทีละข้อดังนี้

1. สมมติ $a + b = a$
   เนื่องจาก $a \in \mathbb{R}$ โดยสมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก จะได้ว่ามีจำนวนจริง x ที่ทำให้ $a + x = 0 = x + a$ ทำให้เราได้ว่า

$$
\begin{aligned}
b &= 0+b && \text{(สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการบวก)}\\
&= (x+a)+b && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)}\\
&= x+(a+b) && \text{(สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก)}\\
&= x+a && \text{(ข้อความที่สมมติไว้ข้างต้น)}\\
&= 0 && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)}
\end{aligned}
$$

2. ถ้า $ab = a$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $b = 1$ สมมติ $ab = a$ และ $a \neq 0$
   เนื่องจาก $a \in \mathbb{R}$ โดยสมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการคูณ จะได้ว่ามีจำนวนจริง x ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่ทำให้ $ax = 1 = xa$ ทำให้เราได้ว่า

$$
\begin{aligned}
b &= 1\cdot b && \text{(สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการคูณ)}\\
&= (xa)b && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการคูณ)}\\
&= x(ab) && \text{(สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)}\\
&= xa && \text{(ข้อความที่สมมติไว้ข้างต้น)}\\
&= 1 && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)}
\end{aligned}
$$

3. ให้ a เป็นจำนวนจริง เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a(0+0) && \text{(สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการบวก)}\\
&= a\cdot 0 + a\cdot 0 && \text{(สมบัติการแจกแจง)}
\end{aligned}
$$

   เนื่องจาก $a\cdot 0 + a\cdot 0 = a\cdot 0$ เราจะได้ว่า $a\cdot 0$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก โดยสมบัติการมีเอกลักษณ์การบวกเพียงตัวเดียว เราจะได้ว่า $a\cdot 0 = 0$

4. ให้ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $ab = 0$ เราจะแยกกรณีดังนี้
   - กรณีที่ $a = 0$ เราได้ตามต้องการ
   - กรณีที่ $a \neq 0$
     จากข้อ 3. เราได้ว่า $0 = a\cdot 0$ จากสมบัติถ่ายทอด เราจะได้ว่า $ab = a\cdot 0$
     จากข้อ 2. เราจะได้ว่า $b = 0$

   จากทั้งสองกรณี เราได้ข้อสรุปว่า $a = 0$ หรือ $b = 0$

ตัวอย่างที่ 1.1.1

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า $a + b = 0$ แล้ว $b = -a$
2. $-(-a) = a$
3. $(-1)a = -a$
4. $(-1)(-1) = 1$
5. $-(a+b) = (-a) + (-b)$
6. $(-a)(-b) = ab$

7. $\dfrac{1}{-a} = -\left(\dfrac{1}{a}\right)$ เมื่อ $a \neq 0$

8. $-\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{(-a)}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$

9. ถ้า $a \cdot a = a$ แล้ว $a = 0$ หรือ $a = 1$

10. $\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$ เมื่อ $a, b \neq 0$

พิสูจน์

เราจะพิสูจน์ทีละข้อดังต่อไปนี้

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a + b = 0$
   จากสมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก จะได้ว่าจะมีจำนวนจริง $-a$ ที่ทำให้

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

   เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
b &= 0 + b && \text{(สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการบวก)} \\
&= ((-a) + a) + b && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)} \\
&= (-a) + (a + b) && \text{(สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก)} \\
&= (-a) + 0 && \text{(ข้อความที่สมมติไว้ข้างต้น)} \\
&= -a && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก)}
\end{aligned}$$

2. ให้ a เป็นจำนวนจริง
   จากสมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก จะได้ว่าจะมีจำนวนจริง $-a$ ที่ทำให้

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

   และจากจากสมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก จะได้ว่าจะมีจำนวนจริง $-(-a)$ ที่ทำให้

$$(-a) + [-(-a)] = 0 = [-(-a)] + (-a)$$

   เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
-(-a) &= [-(-a)] + 0 && \text{(สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการบวก)} \\
&= [-(-a)] + ((-a) + a) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)} \\
&= [-(-a) + (-a)] + a && \text{(สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก)} \\
&= 0 + a && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)} \\
&= a && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก)}
\end{aligned}$$

3. ให้ a เป็นจำนวนจริง
   จากสมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก จะได้ว่าจะมีจำนวนจริง $-a$ ที่ทำให้

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

   เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(-1)a &= (-1)a+0 && \text{(สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการบวก)}\\
&= (-1)a+(a+(-a)) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)}\\
&= [(-1)a+a]+(-a) && \text{(สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก)}\\
&= [(-1)a+1a]+(-a) && \text{(สมบัติเอกลักษณ์สำหรับการคูณ)}\\
&= [(-1)+1]a+(-a) && \text{(สมบัติการแจกแจง)}\\
&= 0\cdot a+(-a) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก)}\\
&= 0+(-a) && \text{(ทฤษฎีบท 1.1.3 ข้อ 3)}\\
&= -a && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก)}
\end{aligned}$$

4. จากการพิสูจน์ข้อ 3 จะได้ว่า $(-1)(-1) = -(-1)$
   และจากการพิสูจน์ข้อ 2 จะได้ว่า $-(-1) = 1$
   โดยสมบัติการถ่ายทอดจะได้ว่า $(-1)(-1) = 1$

5. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
-(a+b) &= (-1)(a+b) && \text{(จากการพิสูจน์ข้อ 3)}\\
&= (-1)a+(-1)b && \text{(สมบัติการแจกแจง)}\\
&= (-a)+(-b) && \text{(จากการพิสูจน์ข้อ 3)}
\end{aligned}$$

6. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
(-a)(-b) &= [(-1)a][(-1)b] && \text{(จากการพิสูจน์ข้อ 3)}\\
&= (-1)[a(-1)]b && \text{(สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)}\\
&= (-1)[(-1)a]b && \text{(สมบัติสลับที่สำหรับการคูณ)}\\
&= [(-1)(-1)][ab] && \text{(สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)}\\
&= 1(ab) && \text{(จากการพิสูจน์ข้อ 4)}\\
&= ab && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก)}
\end{aligned}$$

7. ให้ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
(-a)\cdot(-\frac{1}{a}) &= a\cdot\frac{1}{a} && \text{(จากการพิสูจน์ข้อ 6)}\\
&= 1 && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการคูณ)}
\end{aligned}$$

   เนื่องจากตัวผกผันการคูณของ $-a$ มีเพียงตัวเดียวเท่านั้นเราจะได้ว่า $\frac{1}{-a} = -\left(\frac{1}{a}\right)$

8. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{b} &= (-1)\frac{a}{b} && \text{(จากการพิสูจน์ข้อ 3)}\\
&= (-1)a\cdot\frac{1}{b} && \text{(จากบทนิยาม)}\\
&= (-a)\cdot\frac{1}{b} && \text{(จากการพิสูจน์ข้อ 3)}\\
&= \frac{(-a)}{b} && \text{(จากบทนิยาม)}
\end{aligned}$$

9. ให้ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a\cdot a = a$ เราจะแบ่งกรณีออกเป็นดังนี้
   - กรณีที่ $a = 0$ จะได้ว่า $a\cdot a = 0\cdot 0 = 0$ จากทฤษฎีบท 1.1.3 ข้อ 3

- กรณีที่ $a \neq 0$ โดยสมบัติการมีตัวผกผันการคูณจะได้ว่า $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ)}\\
&= a(aa^{-1}) && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการคูณ)}\\
&= (aa)a^{-1} && \text{(สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)}\\
&= aa^{-1} && \text{(ตามสมมติฐาน)}\\
&= 1 && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการคูณ)}
\end{aligned}
$$

จากทั้งสองกรณีเราจะได้ว่า $a = 0$ หรือ $a = 1$

10. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์
โดยสมบัติการมีตัวผกผันการคูณจะได้ว่า $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$ และ $bb^{-1} = 1 = b^{-1}b$

จะ ได้ ว่า

$$
\begin{aligned}
(ab)(a^{-1}b^{-1}) &= a(ba^{-1})b^{-1} && \text{(สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)}\\
&= a(a^{-1}b)b^{-1} && \text{(สมบัติสลับที่สำหรับการคูณ)}\\
&= (aa^{-1})(bb^{-1}) && \text{(สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)}\\
&= 1 \cdot 1 && \text{(สมบัติการมีตัวผกผันการคูณ)}\\
&= 1 && \text{(สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ)}
\end{aligned}
$$

เนื่องจากตัวผกผันการคูณของ ab มีเพียงตัวเดียวเท่านั้นเราจะได้ว่า $\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$

1.2 อสมการเบื้องต้น

ในระบบจำนวนจริง เราสามารถนำจำนวนจริงใด ๆ มาพิจารณาเปรียบเทียบกับจำนวนศูนย์ได้เสมอ เพื่อบอกได้ว่าจำนวนที่พิจารณานั้นมีค่ามากกว่า เท่ากับ หรือ น้อยกว่าศูนย์ การเปรียบเทียบลักษณะนี้ถือเป็นหลักการสำคัญของจำนวนจริง ซึ่งเราเรียกว่า กฎไตรวิภาค (Trichotomy Law)

สัจพจน์ 1.2.1: กฎไตรวิภาค

ทุกจำนวนจริง x ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อความเดียว

1. $x \in \mathbb{R}^+$
2. $x = 0$
3. $-x \in \mathbb{R}^+$

จากกฎไตรวิภาค เราได้เรียนรู้ว่า สำหรับจำนวนจริงใด ๆ จะต้องมีเพียงหนึ่งในสามกรณีเท่านั้นที่เป็นจริง คือ จำนวนหนึ่งมีค่าน้อยกว่า เท่ากับ หรือมากกว่าจำนวนเต็มศูนย์ กฎนี้ช่วยให้เราสามารถเปรียบเทียบจำนวนจริงสองจำนวนได้อย่างชัดเจน

เพื่อต้องการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนได้สะดวกมากขึ้น เราจึงใช้ สัญลักษณ์มากกว่า $>$ และน้อยกว่า $<$ มาแทนความสัมพันธ์เหล่านี้ ซึ่งจะถูกนิยามไว้ดังนี้

บทนิยาม 1.2.1

ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง นิยาม

1. $x > y$ เมื่อ $x - y \in \mathbb{R}^+$
2. $x \geq y$ เมื่อ $x - y \in \mathbb{R}_0^+$
3. $x < y$ เมื่อ $y > x$
4. $x \leq y$ เมื่อ $y \geq x$
5. $x > y > z$ เมื่อ $x > y$ และ $y > z$
6. $x \geq y \geq z$ เมื่อ $x \geq y$ และ $y \geq z$

จากบทนิยามเราจะได้สมบัติของการเปรียบเทียบดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2.1

ทุกจำนวนจริง x, y, z ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x \geq x$
2. ถ้า $x \geq y$ และ $y \geq x$ แล้ว $x = y$
3. ถ้า $x > y$ และ $y > z$ แล้ว $x > z$
4. ถ้า $x \geq y$ และ $y \geq z$ แล้ว $x \geq z$

พิสูจน์

เราจะพิสูจน์ทีละข้อดังนี้

1. ให้ x เป็นจำนวนจริง
   เนื่องจาก $x - x = 0$ ตามสมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก และ $0 \in \mathbb{R}_0^+$
   จะได้ว่า $x - x \in \mathbb{R}_0^+$ โดยบทนิยามจะได้ว่า $x \geq x$

2. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงโดยที่ $x \geq y$ และ $y \geq x$
   โดยบทนิยาม $x - y \in \mathbb{R}_0^+$ และ $y - x \in \mathbb{R}_0^+$
   เราจะพิจารณาเป็นกรณีจากข้อความ $x - y \in \mathbb{R}_0^+$ เป็นดังนี้

   - กรณีที่ $x - y = 0$ เราจะได้ว่า $x = y$ ตามต้องการ
   - กรณีที่ $x - y \in \mathbb{R}^+$ เราจะได้ว่า $y - x = -(x - y) \notin \mathbb{R}^+$
     จาก $y - x \in \mathbb{R}_0^+$ นั้นคือ $y - x = 0$ หรือ $y - x \in \mathbb{R}^0$
     แต่ว่า $y - x \notin \mathbb{R}^+$ ทำให้ได้ว่า $y - x = 0$ นั้นคือ $y = x$
     โดยสมบัติการสมมาตรจะได้ว่า $x = y$

   จากทั้งสองกรณีเราได้ข้อสรุปว่า $x = y$

3. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงโดยที่ $x > y$ และ $y > z$
   จากการที่ $x > y$ โดยบทนิยามจะได้ว่า $x - y \in R^+$
   จากการที่ $y > z$ โดยบทนิยามจะได้ว่า $y - z \in R^+$
   เนื่องจาก $\mathbb{R}^+$ มีสมบัติปิดสำหรับการบวก จะได้ว่า $x - z = (x - y) + (y - z) \in R^+$
   ทำให้ได้ว่า $x > z$

4. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงโดยที่ $x \geq y$ และ $y \geq z$
   จากการที่ $x \geq y$ โดยบทนิยามจะได้ว่า $x - y \in R_0^+$
   จากการที่ $y \geq z$ โดยบทนิยามจะได้ว่า $y - z \in R_0^+$
   เนื่องจาก $\mathbb{R}_0^+$ มีสมบัติปิดสำหรับการบวก จะได้ว่า $x - z = (x - y) + (y - z) \in R_0^+$
   ทำให้ได้ว่า $x \geq z$

ทฤษฎีบท 1.2.2

ทุกจำนวนจริง a, b, c, d ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
2. ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$
3. ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
4. ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
5. $a^2 \geq 0$
6. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > 0$
7. ถ้า $a > b > 0$ แล้ว $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$