

ฝึกโจทย์ สอบ คอมและคณิต จนกว่าจะพิชิตภูเขาสูงนั้น

หนังสือแบบฝึกหัด

ชุดที่ 1 ทฤษฎีจำนวนและคอมบินาทอริก



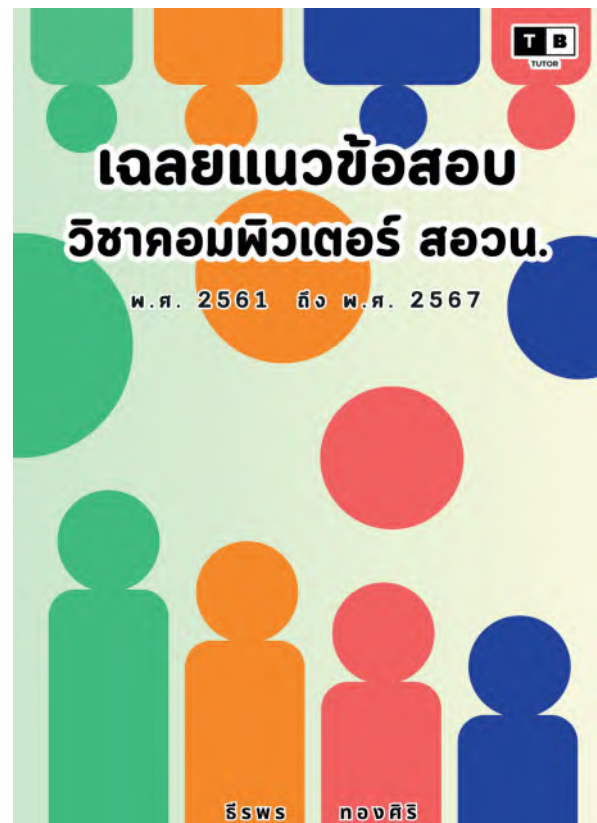


TUTOR

สวัสดีครับ ผมหนึ่งในทีมงานของ TBTUTOR
ต้องขอขอบคุณในการสนับสนุนหนังสือ
ของ TBTUTOR เป็นอย่างมากครับ
ผมหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับคุณมากนะครับ
สามารถดูหนังสือเล่มอื่นหรือข้อมูลต่าง ๆ ของเราได้
ตามนี้เลยนะครับ

ติดตามผลงานได้ที่    **TBTUTOR**

หนังสือในเครือของ TBTUTOR



สารบัญ

1	จำนวนเต็มกับการหารลงตัว	5
1.1	ระบบจำนวนเต็ม	5
1.2	การหารลงตัว	11
1.3	การหาเศษเหลือ	15
2	ตัวประกอบของจำนวนนับ	30
2.1	ตัวประกอบของจำนวนนับ	30
2.2	จำนวนเฉพาะ	33
2.3	ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต	39
2.4	จำนวนตัวประกอบของจำนวนนับ	43
3	เทคนิคการนับกรณี	46
3.1	หลักการนับกรณีให้เป็นระเบียบ	46
3.2	การหาขอบเขตในการนับกรณี	50
3.3	ความสมมาตรของปัญหา	53
4	สมการบนจำนวนเต็ม	63
4.1	ปัญหาการแก้สมการโดยใช้ตัวประกอบ	63
4.2	ปัญหาค่าสูงสุด - ต่ำสุด	69
4.3	ปัญหาที่เกี่ยวกับฟังก์ชันเลขคณิต	72
5	ตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อย	78
5.1	ตัวหารร่วมมาก	78
5.2	ตัวคูณร่วมน้อย	83
6	หลักการนับเบื้องต้น	92
6.1	หลักการคูณ	92
6.2	หลักการบวก	100
6.3	หลักส่วนเติมเต็ม	105
6.4	การใช้การนับจำนวนสมาชิกของเซต	107
7	การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	118
7.1	การเรียงสับเปลี่ยน	118
7.2	การจัดของซ้ำ	122

7.3	การจัดหมู่	124
7.4	การแจกของ	133
8	ความน่าจะเป็น	136
8.1	ความน่าจะเป็นเบื้องต้น	136
8.2	กฎความน่าจะเป็นรวมและความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข	143
9	ความสัมพันธ์เวียนเกิด	147
9.1	ลำดับ	147
9.2	ความสัมพันธ์เวียนเกิด	149
9.3	การประยุกต์	153

ส่วนที่ 1

จำนวนเต็มกับการหารลงตัว

1.1 ระบบจำนวนเต็ม

ข้อที่ 1.1. (สอวน คอม 2566)

คุณครูตั้งโจทย์คณิตศาสตร์โดยบอกกับนักเรียนว่าทุกสมการที่ปรากฏในโจทย์จะอยู่ในรูป $a + b = c$ หรือ $a \times b = c$ เท่านั้น สมชายได้รับข้อสอบมา พบว่าเครื่องหมายบวกและคูณในโจทย์หายไปเป็นสัญลักษณ์ โดยเหลือเพียงข้อมูลดังต่อไปนี้

$$x \square y = 12$$

$$x \square x = 16$$

ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มที่สุดคัล้องกับระบบสมการดังกล่าว จงหาผลรวมของค่า y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ก. 15

ข. 24

ค. 28

ง. 36

ข้อที่ 1.2. (สอวน คอม 2562)

กำหนดให้ $S = \{x|x \text{ เป็นค่าของจำนวนเต็มยกกำลังสอง และ } x < 100\}$

จงหาผลรวมของสมาชิกของ S

ก. 45

ข. 285

ค. 385

ง. 4950

ข้อที่ 1.3. (สอวน คอม 2562)

กำหนดให้ $a = \underbrace{9999\dots9}_{9 \text{ ตัว}}$ และ $b = \underbrace{4444\dots4}_{9 \text{ ตัว}}$ จงหาผลรวมของเลขโดดในแต่ละหลักของ $a \times b$

ก. 72

ข. 81

ค. 90

ง. 99

ข้อที่ 1.4. (สอวน คณิต 2547)

ให้ \square แทนเลขโดด $0, 1, 2, \dots, 9$ ถ้า $\square 3 \times 6528 = 3\square \times 8256$ แล้ว \square แทนจำนวนใด

ข้อที่ 1.5. (สอวน คณิต 2548)

ให้ $a_9a_8a_7 \dots a_3a_2a_1a_0$ เป็นการเขียนแทนจำนวนเต็มบวก N ในระบบฐาน 10 ที่ประกอบด้วยเลขสิบหลัก ถ้า $a_9 = 6$ และ $a_8a_7 \dots a_3a_2a_1a_0 = \frac{1}{25}N$ แล้ว $a_9 + a_8 + a_7 + \dots + a_0$ เท่ากับเท่าไร

ข้อที่ 1.6. (สอวน คณิต 2548)

ให้ N แทนจำนวนเต็มบวกประกอบด้วยเลข 2548 หลัก

โดยที่ $N = 123456789101112131415 \dots x$

จงหาค่า x ซึ่งเป็นเลขหลักหน่วยของ N

ข้อที่ 1.7. (สอวน คณิต 2551)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $M(n)$ แทน จำนวนที่เกิดจากการนำหลักหน่วยของ n มาเป็นหลักแรก

เช่น $M(123) = 312$ และ $M(6471) = 1647$

จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ซึ่ง $M(n) = 4n$ และหลักหน่วยของ n คือ 4

ข้อที่ 1.8. (สอวน คณิต 2551)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $\text{Sum}(n)$ แทน ผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน n ในระบบเลขฐาน 10

เช่น $\text{Sum}(1135) = 1 + 1 + 3 + 5 = 10$

ให้ $N = (10^2 + 1)(10^{2^2} + 1)(10^{2^3} + 1) \dots (10^{2^7} + 1)$ จงหา $\text{Sum}(N)$

ข้อที่ 1.9. (สอวน คณิต 2551)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $\text{Sum}(n)$ แทน ผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน n ในระบบเลขฐาน 10

เช่น $\text{Sum}(1135) = 1 + 1 + 3 + 5 = 10$

ให้ $X = \{ \text{Sum}(7n) | n \in \{1, 2, 3, \dots, 10000\} \}$

ถ้า a เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดใน X และ b เป็นจำนวนที่มากที่สุด ใน X แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าไร

ข้อที่ 1.10. (สอน คณิต 2557) จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ

1. หลักแรกของ n เป็น 1 และ
2. จำนวนที่เกิดจากการย้ายหลักแรกของ n ไปไว้หลักสุดท้าย มีค่าเป็น 3 เท่าของ n

ข้อที่ 1.11. (สอน คณิต 2554)

ให้ $n \in \mathbb{N}$ กำหนด $E(n)$ แทน ผลบวกของเลขโดดที่เป็นจำนวนคู่ทุกจำนวนที่เขียนแทน n เช่น $E(21483) = 2 + 4 + 8 = 14$ จงหา $E(1) + E(2) + E(3) + E(4) + \dots + E(100)$

ข้อที่ 1.12. (สอวน คณิต 2561)

สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ นิยามฟังก์ชัน $P(n)$ เป็นผลคูณของเลขโดดที่ไม่เป็นศูนย์ของ n ในระบบฐานสิบ (ตัวอย่างเช่น $P(1023) = 1 \times 2 \times 3 = 6$) จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{99} P(n)$

ข้อที่ 1.13. (สอวน คณิต 2564)

จงหาค่าของ $B(1) + B(2) + \dots + B(99)$ เมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$B(n) = \begin{cases} \text{จำนวนของเลขโดดที่แตกต่างกันของ } n & \text{ถ้า } 9 \text{ เป็นเลขโดดของ } n \\ 0 & \text{ถ้า } 9 \text{ ไม่เป็นเลขโดดของ } n \end{cases}$$

เช่น $B(191) = 2$ และ $B(524) = 0$ เป็นต้น

1.2 การหารลงตัว

บทนิยาม 1.1: การหารลงตัว

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$
เรากล่าวว่า b หารด้วย a ลงตัว (a หาร b ลงตัว) ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $b = an$

เทคนิคเบื้องต้นในการหารลงตัว

- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 2 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $a_0 = 0, 2, 4, 6, 8$
- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 3 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ
 $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ หารด้วย 3 ลงตัว
- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 4 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $\overline{a_1 a_0}$ หารด้วย 4 ลงตัว
- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 5 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $a_0 = 0, 5$
- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 7 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ
 $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 7 ลงตัว
- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 8 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $\overline{a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 8 ลงตัว
- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 9 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ
 $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ หารด้วย 9 ลงตัว
- $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ หารด้วย 11 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ
 $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} a_2 + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0$ หารด้วย 11 ลงตัว

แบบฝึกหัดที่ 1.2.1. กำหนดให้ $11! = 399ab800$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าไร

ข้อที่ 1.14. (สอน คอม 2561)

จงหาผลรวมของจำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 50 จนถึง 451 ที่หารด้วย 5 ลงตัว

ก. 20245

ข. 20249

ค. 20250

ง. 20251

ข้อที่ 1.15. (สอน คอม 2564)

ให้จำนวนเต็ม $273y49x5$ ซึ่งจำนวนนี้หารลงตัวด้วย 9 และ 11 โดยหลักการแล้ว ถ้านำเลขโดดมารวมกัน แล้วจะหารด้วย 9 ลงตัว และถ้านำผลรวมเลขโดดในตำแหน่งที่สิบด้วยผลรวมเลขโดดตำแหน่งคู่ (ตำแหน่ง ที่ 1 เริ่มจากทางขวา) แล้วจำนวนนั้นจะหารด้วย 11 ลงตัว จงพิจารณาว่าตัวเลข x และ y ในจำนวนนี้เป็นเลขอะไร

ก. ผลบวกของ x และ y มีค่าอยู่ในช่วง 0 ถึง 9

ข. ผลบวกของ x และ y มีค่าอยู่ในช่วง 10 ถึง 18

ค. ค่าของ y มากกว่า x อยู่ 4

ง. ค่าของ x มากกว่า y อยู่ 4

แบบฝึกหัดที่ 1.2.2. ให้ N เป็นจำนวนห้าหลักที่หารด้วย 792 ลงตัว แล้วผลรวมของเลขโดดของ N ที่มีค่ามากที่สุดจะมีค่าเท่าไร

ข้อที่ 1.16. (สอน คณิต 2566)

จงหาจำนวนเต็มบวก m ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ $2^{1024} + 1$ หาร $2^{(2^m)} - 1$ ลงตัว

ข้อที่ 1.17. (สอน คณิต 2562)

กำหนดให้ a, b, c เป็นเลขโดดและจำนวน $20ab13c$ เป็นจำนวนเต็ม 7 หลักที่หารด้วย 792 ลงตัว
จงหาค่าของ $a + b + c$

ข้อที่ 1.18. (สอน คณิต 2567)

จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า ในระบบฐานสิบ n^2 อยู่ในรูป $xx44yy$
เมื่อ x และ y เป็นเลขโดด โดยที่ $x > 0$

1.3 การหาเศษเหลือ

ทฤษฎีบท 1.1: ขั้นตอนวิธีการหาร

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $b = aq + r$ และ $0 \leq r < |a|$

เราเรียก b ว่าตัวตั้ง a เรียกว่าตัวหาร q เรียกว่าตัวหาร r เรียกว่าเศษเหลือ การประยุกต์ที่ใช้อยู่ ๆ

ทฤษฎีบท 1.2

ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- กำหนดให้ a, b, c, m, n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ ถ้า a และ b หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน แล้ว
 - ถ้า $a + c$ และ $b + c$ หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน
 - ถ้า ac และ bc หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน
 - ถ้า a^n และ b^n หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน
- กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ และ m เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ ถ้า a_i และ b_i หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \dots, n$ แล้ว
 - $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ และ $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน
 - $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ และ $b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน

แบบฝึกหัดที่ 1.3.1. ถ้า a, b และ c หารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 2, 3 และ 4 ตามลำดับ แล้ว

- จงหาเหลือเศษจากการหาร $a + b + c$ ด้วย 7

2. จงหาเหลือเศษจากการหาร $a + 2b + 3c$ ด้วย 7

3. จงหาเหลือเศษจากการหาร $4a - 2b + 3c$ ด้วย 7

4. จงหาเหลือเศษจากการหาร abc ด้วย 7

5. จงหาเหลือเศษจากการหาร $ab + 2c$ ด้วย 7

ข้อที่ 1.19. (สอวน คอม 2566)

จงหาเศษที่เหลือจากการหาร $1^{2566} + 2^{2566} + 3^{2566} + 4^{2566}$ ด้วย 10

ก. 0

ข. 4

ค. 7

ง. 9

ข้อที่ 1.20. (สอวน คอม 2565)

หลักหน่วยของ 7^{2562} เป็นเลขใด

ก. 1

ข. 3

ค. 7

ง. 9

ข้อที่ 1.21. (สอวน คอม 2563)

เศษที่ได้จากการหาร 2563^{2564} ด้วย 10 มีค่าเท่าใด

ก. 1

ข. 3

ค. 5

ง. 7

ข้อที่ 1.22. (สอวน คอม 2563)
จงหาเลขหลักหน่วยของ 999^{2020}

ก. 0

ข. 1

ค. 3

ง. 9

ข้อที่ 1.23. (สอวน คอม 2566)
ถ้า x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่หาร 572 และ 674 แล้วมีเศษเหลือ 11 เท่ากัน จงหาเศษ
เหลือที่ได้จากการหาร 268 ด้วย x

ก. 3

ข. 7

ค. 11

ง. 13

ข้อที่ 1.24. (สอน คอม 2561)

จงพิจารณาว่า $1017^8 + 1020^4 + 1023^2 + 1026$ หารด้วย 8 เหลือเศษเท่าใด

ก. 4

ข. 3

ค. 2

ง. 1

ข้อที่ 1.25. (สอน คอม 2562)

จงหาเศษเหลือการหาร $2018^{2019} + 2019^{2020} + 2020^{2021}$ ด้วย 13

ก. 2

ข. 4

ค. 7

ง. 11

ข้อที่ 1.26. (สอวน คอม 2562)

กำหนด $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น

$$1! = 1, \quad 2! = 2 \times 1, \quad 3! = 3 \times 2 \times 1$$

จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหารจำนวน $1! + 2! + 3! + \dots + 2562!$ ด้วย 180

- ก. 0 ข. 127 ค. 153 ง. 179

ข้อที่ 1.27. (สอวน คอม 2563)

ให้ \mathbb{N} คือเซตของจำนวนนับ และนิยาม $x * y$ คือ เศษเหลือจากการหาร $x + y + 20$ ด้วย 10 สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{N}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. $x * 0 = x$ ทุก $x \in \mathbb{N}$ 2. $\{5 * y | y \in \mathbb{N}\} = \{0, 5\}$

ข้อใดถูกต้องที่สุด

- ก. 1 ถูก แต่ 2 ผิด ข. 2 ถูก แต่ 1 ผิด ค. 1 และ 2 ถูก ง. 1 และ 2 ผิด

ข้อที่ 1.28. (สอน คณิต 2551)

$$\text{ให้ } N = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \dots + \underbrace{111\dots 11}_{2008\text{หลัก}}$$

จงหาเศษที่เกิดจากการหาร N ด้วย 100000

ข้อที่ 1.29. (สอน คณิต 2553)

$$\text{ให้ } M = 81^6 - 9 \cdot 27^7 - 9^{11} \text{ จงหาเศษที่ได้จากการหาร } M \text{ ด้วย } 100$$

ข้อที่ 1.30. (สอวน คณิต 2554)

ให้ $k = 2011^2 + 2^{2011}$ จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $k^2 + 2^k$ ด้วย 10

ข้อที่ 1.31. (สอวน คณิต 2561)

7^m มีเลขหน้าหน่วยเป็นเลขใด เมื่อ m คือจำนวนหลักของ $25^{25} \times 8^{20}$

ข้อที่ 1.32. (สอน คณิต 2562)

จงหาเศษจากการหาร $\left((2^{2562} \cdot 3^{2019})^{2020}\right)^{2563}$ ด้วย 10

ข้อที่ 1.33. (สอน คณิต 2554)

ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มและ $y \geq 2$

ถ้า x เป็นเศษที่เกิดจากการหาร 2312, 1417, และ 1059 ด้วย y แล้ว $y - x$ เท่ากับเท่าไร

ข้อที่ 1.34. (สอวน คณิต 2556)

ให้ $f(n) = n!(n^2 + 3n + 1)$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $A = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(100)$

ให้ Q และ R เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับ $A = 10Q + R$ และ $R < 10$

จงหาว่า R เท่ากับเท่าไร

ข้อที่ 1.35. (สอวน คณิต 2560)

ให้ $N = \underbrace{444 \dots 4}_{100 \text{ ตัว}} \underbrace{888 \dots 8}_{99 \text{ ตัว}} 9$ ซึ่งเขียนในรูปของเลขฐาน 10

จงหาค่าผลบวกของเลขโดดหน้าจุดทศนิยมทั้งหมดของ \sqrt{N}

ข้อที่ 1.36. (สอน คณิต 2561)

มีจำนวนเต็มบวก n ตั้งแต่ 1 ถึง 200 ทั้งหมดที่จำนวน ที่ $n^2 + 9$ หารด้วย 5 ลงตัว

ข้อที่ 1.37. (สอน คณิต 2561)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 350 จงหา n ที่น้อยที่สุดที่มี สมบัติว่า

- n เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 3 จำนวน
- n เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 4 จำนวน
- n เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 5 จำนวน

ข้อที่ 1.38. (สอวน คณิต 2561)

กำหนดให้ $N = 737373 \dots 73$ เป็นจำนวนเต็มที่มี 2560 หลัก ประกอบไปด้วยเลขโดด 7 และ 3 สลับกันอย่างละ 1280 ตัว จงหาเศษจากการหาร N ด้วย 37

ข้อที่ 1.39. (สอวน คณิต 2563)

ให้ S เป็นสับเซตของ $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ จงหา $n(S)$ ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ที่ทำให้ 9 หาร $x + y$ ไม่ลงตัว สำหรับทุกคู่ x, y ใน S ที่แตกต่างกัน

ข้อที่ 1.40. (สอน คณิต 2564)

จงหาผลรวมของจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด โดยที่ $10 \leq n \leq 99$ และ n^k มีเลขสองหลักสุดท้ายเหมือนกับ n สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k

ข้อที่ 1.41. (สอน คณิต 2565)

สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ให้ $[a]$ คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ a ถ้า

$$a = \frac{1000^{10}}{10^{10} + 11}$$

แล้วเศษจากการหาร $[a]$ ด้วย 1000 เท่ากับเท่าไร

ข้อที่ 1.42. (สอน คณิต 2567) ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด โดยที่ n หาร 2024 เหลือเศษ 24 จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

ข้อที่ 1.43. (สอน คอม 2563)

จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{10^{2566}}{2020 + 10^{2563}}$ คือจำนวนใด

ก. 666

ข. 888

ค. 999

ง. 1000

ข้อที่ 1.44. (สอน คอม 2567)กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก a เป็นจำนวนเต็มและ $a \bmod n$ แทนการดำเนินการที่ให้ผลลัพธ์เป็นเศษเหลือของการหาร a ด้วย n จงหาค่า $(x^2 + x + 1) \bmod 7$ เมื่อ x สอดคล้องกับ $4x \bmod 7 = 2$

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

ข้อที่ 1.45. (สอน คอม 2566)จำนวนตรรกยะ $\frac{5}{8}$ สามารถเขียนรูปเศษส่วนเป็น $\frac{1}{\frac{8}{5}}$ และจำนวนตรรกยะใดๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่อง $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$ โดยที่ a_0 เป็นจำนวนเต็ม และ a_1, a_2, a_3, \dots

เป็นจำนวนนับ

และเขียนแทนด้วย $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ จงพิจารณาว่า $\frac{87}{32}$ เขียนแทนด้วยเศษส่วนต่อเนื่องใน

ข้อใด

ก. $[2; 1, 2, 1, 1, 3]$ ข. $[2; 1, 2, 1, 1, 4]$ ค. $[2; 1, 2, 1, 2, 3]$ ง. $[2; 1, 2, 1, 2, 4]$

ส่วนที่ 2

ตัวประกอบของจำนวนนับ

2.1 ตัวประกอบของจำนวนนับ

บทนิยาม 2.1: ตัวประกอบ

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ เราจะกล่าวว่า a เป็นตัวประกอบของ b ก็ต่อเมื่อ b หารด้วย a ลงตัว

แบบฝึกหัดที่ 2.1.1. จำนวนสี่หลักที่มีค่ามากที่สุดและจำนวนสี่หลักที่มีค่าน้อยที่สุดที่มี 126 เป็นตัวประกอบ ต่างกันอยู่เท่าไร

ข้อที่ 2.1. (สอน คณิต 2562)

ครอบครัวหนึ่งมีสมาชิกทั้งหมด 5 คน ประกอบด้วย พ่อ แม่ และ ลูกสาว 3 คน โดยที่ลูกสาวคนโตเป็นฝาแฝดกัน ถ้าผลคูณของอายุของลูกสาวทั้งสามคนเท่ากับ 48 แล้วผลบวกของอายุของลูกสาวทั้งสามคนมีค่าเท่าใด (อายุคิดเป็นจำนวนเต็มปี)

ข้อที่ 2.2. (สอวน คณิต 2552)

กำหนดลำดับฟีโบนัชชี F_1, F_2, F_3, \dots โดย $F_1 = F_2 = 1$ และ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$
ให้ $X = \{n \mid 1 \leq n \leq 1000 \text{ และ } 13 \text{ เป็นตัวประกอบของ } F_n\}$ จงหา $|X|$

ข้อที่ 2.3. (สอวน คณิต 2553)

ให้ a เป็นจำนวนนับโดยที่ $a \geq 3$ และ $a - 2$ เป็นตัวประกอบของ $3a^2 - 2a + 10$
จงหาผลบวกค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ a

ข้อที่ 2.4. (สอวน คณิต 2556)

ให้ $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid n + 7 \text{ หาร } n^2 - 7n + 10 \text{ ลงตัว}\}$ จงหาว่า $|X|$ เท่ากับเท่าไร

ข้อที่ 2.5. (สอวน คณิต 2555)ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ กำหนด

$$D(n) = \{d \in \mathbb{Z}^+ | d \text{ เป็นตัวประกอบของ } n\} \text{ และ}$$

$$U(n) = \{ \text{หลักหน่วยของ } d | d \in D(n) \}$$

เช่น $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ และ $U(30) = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ $U(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **ข้อที่ 2.6.** (สอวน คณิต 2552)จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ 100 เป็นตัวประกอบของ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

2.2 จำนวนเฉพาะ

บทนิยาม 2.2: จำนวนเฉพาะ

กำหนดให้ p เป็นจำนวนนับใด ๆ เราเรียก p ว่าเป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $p \neq 1$ และ p มีตัวประกอบที่เป็นจำนวนนับมีเพียง 2 ตัวเท่านั้นนั่นคือ 1 และ p

ข้อที่ 2.7. (สอวน คอม 2562)

จำนวนเต็ม 1 เป็น

- ก. จำนวนเฉพาะ
- ข. จำนวนประกอบ
- ค. ไม่ใช่ทั้ง ก และ ข
- ง. ไม่มีคำตอบ

ข้อที่ 2.8. (สอวน คอม 2562)

ผลรวมของจำนวนเฉพาะที่ต่างกันสองจำนวนจะได้

- ก. จำนวนเฉพาะ
- ข. จำนวนประกอบ
- ค. ข้อ ก และ ข
- ง. ไม่มีข้อถูก

ข้อที่ 2.9. (สอวน คอม 2565)

จำนวนเต็มในข้อใด **ไม่ใช่** จำนวนเฉพาะ

- ก. 103
- ข. 401
- ค. 997
- ง. 1111

ข้อที่ 2.10. (สอวน คอม 2567)

แต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริงกี่ข้อ

(1): มีจำนวนเฉพาะ 11 ตัว ในช่วงตัวเลข 50 ถึง 100

(2): 1010011 เป็นจำนวนเฉพาะ

(3): ผลบวกของจำนวนเฉพาะทั้งหมดในช่วงตัวเลข 60 ถึง 70 เป็นเลขคู่

ก. จริง 1 ข้อ

ข. จริง 2 ข้อ

ค. จริง 3 ข้อ

ง. ผิดทุกข้อ

ข้อที่ 2.11. (สอวน คอม 2562)

ถ้า a, b, c, d เป็นจำนวนเฉพาะ โดย a เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด แล้ว $abcd$ คือ

ก. ผลคูณหารด้วย 2 แล้วมีเศษเหลือการหารเป็น 0

ข. ผลคูณหารด้วย 2 แล้วมีเศษเหลือการหารเป็น 1

ค. ผลคูณหารด้วย 4 แล้วมีเศษเหลือการหารเป็น 1

ง. ผลคูณหารด้วย 4 แล้วมีเศษเหลือการหารเป็น 3

ข้อที่ 2.12. (สอน คอม 2561)

ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และให้

$$A = \{a | 2^a + 3^a \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$$

$$B = \{b | b \leq 3^b\}$$

$$C = \{c | \sqrt{c+3} > \sqrt{2c}\}$$

$$D = \{d | d \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$$

เมื่อ $n(S)$ หมายถึงจำนวนสมาชิกในเซต S และ S' หมายถึง คอมพลีเมนต์ของเซต S ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. $A \subset B$

ข. $C = B$

ค. $D \subset A \cup C$

ง. $n(C) > n(B \cup D)$

แบบฝึกหัดที่ 2.2.1. จงหาจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนเฉพาะ

1. $n^2 - 1$

2. $n^3 - 1$

3. $n^4 - 1$

4. $n^4 + n^2 + 1$

ข้อที่ 2.13. (สอวน คณิต 2556)

ให้ $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x^3 + 6x^2 + 2x - 6| \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$ จงหาว่า $|X|$ เท่ากับเท่าไร

ข้อที่ 2.14. (สอวน คณิต 2562)

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่เศษเหลือจากการหาร 555 และ 670 ด้วย m มีค่าเท่ากันคือ p ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะบวก จงหาค่าของ $m + p$

ข้อที่ 2.15. (สอวน คณิต 2559)

ให้ $N = 3^{16} - 2^{16}$ และ

p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยที่สุดและมากที่สุดที่เป็นตัวหารของ N จงหาค่าของ $p + q$

ข้อที่ 2.16. (สอวน คณิต 2550)

ให้ $N = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 20 \cdot 20!$

จงหาผลบวกของจำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่เป็นตัวประกอบของ $N + 1$

2.3 ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต

ทฤษฎีบท 2.1: ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากกว่าหนึ่ง เราจะเขียน n ในรูปแบบบัญญัติได้เพียงอย่างเดียวก่อนหน้านี้ นั่นคือ

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$$

โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะ และ a_i เป็นจำนวนนับ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \dots, k$

ทฤษฎีบท 2.2: รูปแบบบัญญัติของตัวประกอบ

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$$

โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะ และ a_i เป็นจำนวนนับ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \dots, k$ และ m เป็นตัวประกอบของ n แล้ว m สามารถเขียนในรูปของ

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \cdots p_k^{b_k}$$

โดยที่ b_i เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ติดลบที่ไม่เกิน a_i สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \dots, k$

แบบฝึกหัดที่ 2.3.1. จำนวนนับสามหลักที่น้อยที่สุดและมีตัวประกอบเฉพาะเพียงสามตัวเท่านั้นมีค่าเท่ากับเท่าไร

แบบฝึกหัดที่ 2.3.2. (จำนวนสแควร์ฟรี)

จำนวนสแควร์ฟรี คือจำนวนนับที่มากกว่าหนึ่งที่มีคุณสมบัติว่า ไม่มีจำนวนเฉพาะ p ใดที่ p^2 หารจำนวนนี้ได้ลงตัว แล้วในบรรดา $1 - 20$ มีกี่จำนวนที่เป็นจำนวนสแควร์ฟรี

ข้อที่ 2.17. (สอวน คณิต 2561)

จงหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดที่มีตัวประกอบทั้งหมด 60 จำนวน
และเป็นตัวประกอบเฉพาะที่แตกต่างกันเพียงสามจำนวน

ข้อที่ 2.18. (สอวน คณิต 2550)

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด $P(n)$ แทนผลคูณของตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ n
เช่น $P(2) = 1 \times 2 = 2$, $P(6) = 1 \times 2 \times 3 \times 6 = 36$ เป็นต้น
จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ $P(n) = n^{10}$

ข้อที่ 2.19. (สอวน คณิต 2562)

ในห้องประชุมแห่งหนึ่งมีหลอดไฟ 2562 ดวงซึ่งแต่ละดวงติดหมายเลข 1 ถึง 2562

และมีนักเรียน 2562 คนเข้าไปเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟ (ปิดหรือเปิด) ทีละคนตามลำดับ

โดยนักเรียนแต่ละคนจะเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟทุกดวงที่ลำดับการเข้าของตนเองหาร

หมายเลขของหลอดไฟดวงนั้นลงตัว (เช่นนักเรียนลำดับที่ 2 จะเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟทุก

ดวงที่เป็นหมายเลขคู่)

ถ้าในตอนเริ่มต้นหลอดไฟทุกดวงมีสถานะเป็นปิด จงหาจำนวนหลอดไฟที่เปิดอยู่หลังจาก

นักเรียนคนที่ 2562 เข้าไปเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟเสร็จแล้ว

ข้อที่ 2.20. (สอวน คณิต 2562)

สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ ใดๆ

นิยาม $f(n)$ เป็นตัวประกอบที่ใหญ่ที่สุดของ n ที่ไม่ใช่ตัวมันเอง

กำหนดให้ $a_1 = 2019^{2562}$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ซึ่ง $a_n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวก
นิยาม $a_{n+1} = a_n - f(a_n)$ ถ้า a_k คือพจน์แรกของลำดับนี้ที่มีค่าน้อยกว่า 2 แล้ว k มีค่าเท่าใด
(Hint: 673 เป็นจำนวนเฉพาะ)