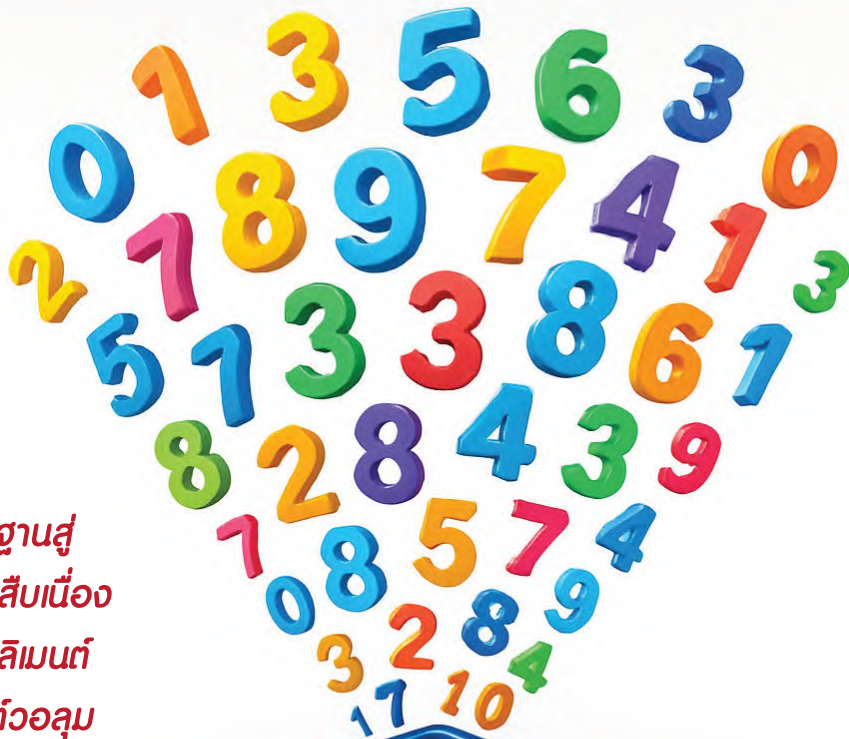


วิธีเชิงตัวเลข ด้วย AI



จากพื้นฐานสู่
วิธีผลต่างสืบเนื่อง
ไฟไนต์เอลิเมนต์
และไฟไนต์วอลุ่ม

วิธีเชิงตัวเลขด้วย AI

วิธีเชิงตัวเลขด้วย AI

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

 **สำนักพิมพ์**
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2569

220.-

ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

วิธีเชิงตัวเลขด้วย AI / ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

1. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข. 2. ปัญญาประดิษฐ์ -- การประมวลผลข้อมูล.

518

ISBN (e-book) 978-974-03-4456-8

สพจ. 2746



assคณค้ำววิชาการ สู้สังคค
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว
การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดทำโดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2569

www.cupress.chula.ac.th [CUB6901-009]

โทร. 0-2218-3562-3

บรรณาธิการอำนวยการ : รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลวรรณ พิมพ์พันธุ์

กองบรรณาธิการฝ่ายวิชาการ : ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ปิยนถ บุนนาค

ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

ศาสตราจารย์ นายแพทย์ชัยณู พันธุ์เจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธ์ เฑาะคุปต์

ผู้ประสานงาน : วาสนา ชาชื่น

พิสูจน์อักษร : พัชรมณฑท์ คมมาน

ออกแบบปกและรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์ขจร

สั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

<http://www.chulabook.com>

โทร. 08-6323-3703-4

customer@cubook.chula.ac.th, info@cubook.chula.ac.th

Apps: CU-eBook Store

คำนำ

ในปัจจุบัน ปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence หรือ AI) ช่วยแก้ปัญหาในวิชาวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) ที่เรียนกันในระดับอุดมศึกษาได้โดยสะดวก วิธีวิธีเชิงตัวเลขมีความสำคัญเพราะเป็นวิชาพื้นฐานเพื่อต่อยอดในการศึกษาวิธีการคำนวณขั้นสูงซึ่งฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ที่ใช้กันในภาคอุตสาหกรรม หนังสือ *วิธีเชิงตัวเลขด้วย AI* เล่มนี้อธิบายแนวคิดในแต่ละวิธีโดยสังเขปเพื่อก่อให้เกิดความเข้าใจในภาพรวมได้โดยง่าย แล้วจึงใช้ AI แสดงขั้นตอนการคำนวณพร้อมหาผลลัพธ์ให้ ผู้ศึกษาจึงสามารถเข้าใจในวิธีการนั้นได้ในเวลาอันสั้น อีกทั้งยังสามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจาก AI ได้ด้วย

เนื้อหาในหนังสือ *วิธีเชิงตัวเลขด้วย AI* เล่มนี้ได้แต่งขึ้นให้มีความกระชับและมีจำนวนหน้าน้อยเพื่อจำหน่ายในราคาต่ำ ผู้ใช้ซอฟต์แวร์การคำนวณระดับสูงสามารถซื้อศึกษาได้สะดวก ทำให้เกิดความเข้าใจในวิธีการที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ระดับสูง ซึ่งซอฟต์แวร์ระดับสูงมักไม่ได้อธิบายรายละเอียดของที่มาที่ไป

ผู้เขียนขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ให้การสนับสนุนในการจัดพิมพ์และเผยแพร่หนังสือเล่มนี้ เพื่อส่งเสริมความรู้ความเข้าใจในการใช้ AI ในวิธีเชิงตัวเลข และหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นแรงบันดาลใจให้ผู้อ่านนำ AI ไปประยุกต์ใช้กับวิธีเชิงตัวเลขในระดับสูงด้วยความมั่นใจได้

ปราโมทย์ เคะชะอำไพ
สาขาวิชาวิศวกรรมอากาศยาน
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2569

*** ข้อพึงระวังในการใช้ AI ***

วิธีเชิงตัวเลขเป็นวิชาที่ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์และการคำนวณ หนังสือเล่มนี้ได้ออกแบบมาให้เกิดการพัฒนาทักษะเหล่านี้ ผ่านการอธิบายอย่างเป็นขั้นเป็นตอนเพื่อให้เกิดความเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว ทุกบทประกอบไปด้วยตัวอย่างซึ่งแสดงขั้นตอนของการแก้ปัญหาที่สามารถตรวจสอบคำตอบที่เกิดขึ้นจาก AI ได้ ดังนั้น เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ได้อย่างสัมฤทธิ์ผล ผู้ศึกษาจึงควรระลึกเสมอว่า

- ต้องพยายามแก้ปัญหาด้วยตนเองก่อนใช้ AI เพื่อตรวจสอบคำตอบ
- ตั้งคำถามกับ AI เพื่อเพิ่มความเข้าใจในที่มาของผลลัพธ์ให้เกิดความชัดเจนมากยิ่งขึ้น
- อย่าส่งโจทย์ให้ AI เพื่อเพียงหาคำตอบ ความเข้าใจในวิธีต่าง ๆ คือหัวใจของการเรียนรู้วิธีเชิงตัวเลข
- อย่าเชื่อถือคำตอบจาก AI ทุกครั้ง เพราะ AI อาจให้คำตอบที่ผิดได้ ต้องตรวจสอบคำตอบเสมอ
- เรียนรู้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจาก AI เพื่อเพิ่มทักษะในการประดิษฐ์โปรแกรมระดับสูง เพราะโปรแกรมสำหรับงานจำเพาะนั้นมักไม่มีจำหน่ายหรือจำหน่ายในราคาสูงมาก เราจึงต้องประดิษฐ์โปรแกรมขึ้นด้วยตนเอง จะเป็นความภาคภูมิใจและช่วยต่อยอดในการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี

สารบัญ

คำนำ

บทที่ 1	ระบบสมการเชิงเส้น	1
1.1	บทนำ	1
1.2	กฎของคราเมอร์	2
1.3	วิธีการกำจัดแบบเกาส์	5
1.4	วิธีของเกาส์-ชอร์ดอง	7
1.5	วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน	10
1.6	วิธีการแยกแบบแอลยู	13
1.7	วิธีการแยกโคเลซกี	16
1.8	วิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี	19
1.9	วิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล	22
1.10	วิธีการผ่อนปรนสี่บเนื่อง	24
1.11	วิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์	27
1.12	บทสรุป	30
บทที่ 2	รากของสมการ	33
2.1	บทนำ	33
2.2	วิธีการแบ่งครึ่งช่วง	34
2.3	วิธีการวางตัวผิตรี	38
2.4	วิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด	42
2.5	วิธีของนิวตัน-ราฟสัน	45
2.6	วิธีเซแคนต์	48

2.7	ระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น	51
2.7.1	วิธีการทำซ้ำโดยตรง	52
2.7.2	วิธีของนิวตัน-ราฟสัน	54
2.8	บทสรุป	58
บทที่ 3	การประมาณค่าในช่วง	61
3.1	บทนำ	61
3.2	ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน	62
3.2.1	การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง	62
3.2.2	การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง	64
3.2.3	การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามทั่วไป	67
3.3	ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์	72
3.3.1	การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น	73
3.3.2	การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง	76
3.3.3	การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามทั่วไป	79
3.4	การประมาณค่าในช่วงด้วยเส้นโค้ง	84
3.4.1	ปัญหาข้อมูลบนพื้นราบต่างระดับ	84
3.4.2	ปัญหาฟังก์ชันของรุ่งเงอ	88
3.5	บทสรุป	91
บทที่ 4	การถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด	93
4.1	บทนำ	93
4.2	สมการแบบแยกได้	94
4.3	การถดถอยแบบเชิงเส้นกับข้อมูลไม่เชิงเส้น	97
4.4	การถดถอยแบบพหุนาม	100
4.5	การถดถอยแบบหลายเชิง	104

4.5.1	แบบเชิงเส้น	104
4.5.2	แบบพหุนาม	107
4.6	บทสรุป	112
บทที่ 5	การหาค่าอินทิกรัลและค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข	113
5.1	บทนำ	113
5.2	กฎสี่เหลี่ยมคางหมู	115
5.3	กฎสี่เหลี่ยมคางหมูแบบหลายช่วง	118
5.4	กฎของซิมป์สัน	121
5.5	กฎของซิมป์สันแบบหลายช่วง	125
5.6	สูตรอินทิเกรตของนิวตัน-โคตส์	128
5.7	การอินทิเกรตแบบเกาส์	132
5.8	การอินทิเกรตหลายชั้น	141
5.8.1	กฎสี่เหลี่ยมคางหมู	142
5.8.2	การอินทิเกรตแบบเกาส์	144
5.9	การหาค่าอนุพันธ์	146
5.10	บทสรุป	152
บทที่ 6	สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	153
6.1	บทนำ	153
6.2	วิธีของออยเลอร์	154
6.3	วิธีของฮวน	157
6.4	วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว	161
6.5	วิธีของรุงเงอ-คุททา	164
6.5.1	รุงเงอ-คุททาอันดับสอง	165
6.5.2	รุงเงอ-คุททาอันดับสาม	166

6.5.3	รุงเงอ-คุททาอันดับสี่	168
6.6	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	171
6.7	วิธีแบบหลายชั้น	175
6.7.1	วิธีของฮวนแบบเริ่มต้นเองไม่ได้	175
6.7.2	วิธีของอาดามส์-แบชฟอร์ด	177
6.7.3	วิธีของอาดามส์-มุลตัน	179
6.8	บทสรุป	184
บทที่ 7	วิธีผลต่างสี่บเนื่อง	185
7.1	บทนำ	185
7.2	สมการเชิงอนุพันธ์	186
7.2.1	รูปแบบทั่วไป	186
7.2.2	ขั้นตอนวิธีผลต่างสี่บเนื่อง	188
7.3	ปัญหาในหนึ่งมิติ	190
7.3.1	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	191
7.3.2	ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น	194
7.4	ปัญหาในสองมิติ	199
7.4.1	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	199
7.4.2	ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น	205
7.5	บทสรุป	210
บทที่ 8	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	213
8.1	บทนำ	213
8.2	สมการเชิงอนุพันธ์	214
8.2.1	รูปแบบทั่วไป	186
8.2.2	ขั้นตอนวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	215

8.3	ปัญหาในหนึ่งมิติ	217
8.3.1	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	217
8.3.2	ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น	224
8.4	ปัญหาในสองมิติ	229
8.4.1	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	230
8.4.2	ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น	238
8.5	บทสรุป	243
บทที่ 9	วิธีไฟไนต์วอลุ่ม	245
9.1	บทนำ	245
9.2	สมการเชิงอนุพันธ์	246
9.2.1	รูปแบบทั่วไป	246
9.2.2	ขั้นตอนวิธีไฟไนต์วอลุ่ม	247
9.3	ปัญหาในหนึ่งมิติ	249
9.3.1	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	249
9.3.2	ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น	255
9.4	ปัญหาในสองมิติ	260
9.4.1	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	264
9.4.2	ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น	269
9.5	บทสรุป	275
	บรรณานุกรม	277

บทที่

1

ระบบสมการเชิงเส้น

1.1 บทนำ

วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายเพื่อแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม ได้แก่ วิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง (finite difference method) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) วิธีเหล่านี้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ไปเป็นระบบสมการทางพีชคณิต (system of algebraic equations) ซึ่งประกอบไปด้วยการทำบวก ลบ คูณ และหารของตัวเลข จึงสามารถแก้ด้วยการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ ระบบสมการทางพีชคณิตอาจประกอบไปด้วยสมการย่อยตั้งแต่หลายร้อยไปจนถึงหลายล้านสมการ ระบบสมการทางพีชคณิตเช่นนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้คือ

$$\begin{matrix} [A] & \{X\} & = & \{B\} \\ (n \times n) & (n \times 1) & & (n \times 1) \end{matrix}$$

โดย n แทนจำนวนสมการ เมทริกซ์ $[A]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $(n \times n)$ ที่ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ซึ่งเป็นตัวเลขที่รู้ค่า เวกเตอร์ $\{X\}$ เป็นเมทริกซ์แถวตั้งที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าจำนวน n ค่า และเวกเตอร์ $\{B\}$ เป็นเมทริกซ์แถวตั้งเช่นกันแต่ประกอบด้วยตัวเลขที่รู้ค่าทั้งหมด n ค่า

ในบทนี้เราจะมาศึกษาวิธีการแก้ระบบสมการทางพีชคณิตที่อยู่ในรูปแบบข้างต้น เราจะทำความเข้าใจในหลักการของแต่ละวิธีการก่อนใช้ AI เข้าแก้ปัญหาเดียวกัน การทำเช่นนี้จะทำให้เราเข้าใจในภาพรวมของกระบวนการคำนวณและสามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจาก AI ได้ วิธีการแก้ระบบสมการ $A X = B$ เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ท้ายสุดนี้ ประกอบไปด้วย 2 แนวทางหลัก คือ (1) วิธีการแก้โดยตรง (direct method) และ (2) วิธีการแก้ด้วยกระบวนการทำซ้ำ (iterative method) เนื่องจากวิธีการเหล่านี้สามารถใช้แก้ระบบสมการที่มีจำนวนน้อยไปจนถึงมากได้ เราจะใช้ตัวอย่างของระบบสมการซึ่งประกอบไปด้วยเพียง 3 สมการย่อย เพราะสามารถทำให้เราเข้าใจในวิธีการต่าง ๆ ได้อย่างชัดเจน ซึ่งคือ

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ผลลัพธ์ของระบบสมการทั้งสามนี้คือ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ และ $x_3 = 1$

1.2 กฎของคราเมอร์

การใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule) เป็นวิธีที่ใช้เมื่อระบบสมการประกอบไปด้วยสมการย่อยจำนวนน้อยมาก หลักการของวิธีนี้คือตัวไม่รู้ค่า x_i สามารถหาได้โดยตรงจาก

$$x_i = \frac{\det [A]_i}{\det [A]}$$

โดย $\det [A]$ เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $[A]$ และ $\det [A]_i$ เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $[A]$ หลังจากที่เราเมทริกซ์ $[A]$ นี้ได้เปลี่ยนค่าในแถวตั้ง i ด้วยค่าในเวกเตอร์ $\{B\}$ แล้ว การหาผลลัพธ์ด้วยวิธีคราเมอร์โดยใช้สมการข้างต้นนี้ เราสามารถใช้ ChatGPT แสดงขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงใช้กฎของคราเมอร์ในการแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

เมื่อเราใช้ ChatGPT เราเพียงพิมพ์ลงไปว่า

**Given $[A] = [4 \ -2 \ -1; -3 \ 6 \ -2; -2 \ -1 \ 8]$, $\{B\} = [7; 1; 0]$ and $\{X\} = [x_1; x_2; x_3]$
Use Cramer's Rule to solve for $\{X\}$. Show the step-by-step derivation in detail.**

ChatGPT จะแสดงขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้

We will use *Cramer's Rule* to solve $AX = B$,

Given:
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

1) Compute $\det A$

Expand along row 1 (cofactors $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$):

- $M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 2 = 46 \Rightarrow C_{11} = +46$
- $M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 4 = -28 \Rightarrow C_{12} = -(-28) = +28$
- $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - (-12) = 15 \Rightarrow C_{13} = +15$

$$\det A = 4(46) + (-2)(28) + (-1)(15) = 184 - 56 - 15 = 113.$$

2) Matrix A_1 (replace col 1 by B) and $\det A_1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Expand down column 1 (has a zero):

- $C_{11} = + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 46 \Rightarrow 7 \cdot 46 = 322$
- $C_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -(-16 - 1) = +17 \Rightarrow 1 \cdot 17 = 17$

$$\det A_1 = 322 + 17 = 339.$$

3) Matrix A_2 (replace col 2 by B) and $\det A_2$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

4 | วิธีเชิงตัวเลขด้วย AI

Expand down column 2 (has a zero):

$$\bullet C_{12} = - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = -(-24-4) = +28 \Rightarrow 7 \cdot 28 = 196$$

$$\bullet C_{22} = + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 32-2 = 30 \Rightarrow 1 \cdot 30 = 30$$

$$\det A_2 = 196+30 = 226.$$

4) Matrix A_3 (replace col 3 by B) and $\det A_3$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -3 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Expand down column 3 (has a zero):

$$\bullet C_{13} = + \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3-(-12) = 15 \Rightarrow 7 \cdot 15 = 105$$

$$\bullet C_{23} = - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-4-4) = +8 \Rightarrow 1 \cdot 8 = 8$$

$$\det A_3 = 105+8 = 113.$$

5) Solve for x_1, x_2, x_3

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{339}{113} = 3, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{226}{113} = 2, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{113}{113} = 1.$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ถึงแม้ตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นว่า การใช้กฎของคราเมอร์เป็นวิธีการหาค่าผลลัพธ์ที่ง่ายก็จริง แต่วิธีการนี้ก็กลับไม่ใช่กันทางปฏิบัติ ทั้งนี้เนื่องจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นมากกว่าวิธีอื่น ๆ ที่จะนำเสนอต่อไปมาก จำนวนครั้งของการทำบวก ลบ คูณ หาค่าตัวเลขด้วยการใช้กฎของคราเมอร์มีประมาณ $(n-1) \cdot (n+1)!$ ครั้ง โดย n แทนจำนวนสมการ หากระบบสมการประกอบด้วยสมการย่อยเพียง 100 สมการ จะเกิดการทำบวก ลบ คูณ กันถึงประมาณ 10^{157} ครั้ง ซึ่งเป็นจำนวนมหาศาลจึงไม่ใช่แก้ปัญหามันทางปฏิบัติกัน ในหัวข้อย่อยต่อไป เราจะศึกษาการแก้ระบบสมการด้วยวิธีการกำจัดแบบเกาส์ ซึ่งใช้จำนวนครั้งของการทำบวก ลบ คูณ

หาร ตกประมาณ $(2n^3/3) + (3n^2/2) - (7n/6)$ ครั้ง กล่าวคือ หากระบบสมการประกอบด้วย สมการย่อย 100 สมการ ก็จะมีการทำบวก ลบ คูณ หารเพียงประมาณ 700,000 ครั้ง เท่านั้น

1.3 วิธีการกำจัดแบบเกาส์

วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) จัดได้ว่าเป็นวิธีแก้ระบบ สมการที่ได้รับความนิยมมากวิธีหนึ่ง เป็นวิธีที่มักใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่ซึ่ง ใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์โดยทั่วไป วิธีการกำจัดแบบเกาส์ใน ภาพรวม สามารถแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ได้ดังนี้

(ก) การกำจัดไปข้างหน้า (forward elimination) หากเรามีระบบสมการที่ ประกอบด้วย 3 สมการย่อย ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

การกำจัดไปข้างหน้าเป็นการเปลี่ยนระบบสมการตั้งต้นให้ไปอยู่ในรูปแบบซึ่งเมทริกซ์จัตุรัส ทางด้านซ้ายของสมการกลายเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าที่เป็นศูนย์ตลอดแถวล่างซ้ายของ เมทริกซ์นั้น ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{Bmatrix}$$

โดยเครื่องหมายไพรม์ (prime) ของสัมประสิทธิ์แสดงถึงสัมประสิทธิ์นั้นเป็นค่าใหม่ซึ่ง เปลี่ยนแปลงไปจากค่าเดิม

(ข) การแทนค่าย้อนกลับ (back substitution) เมื่อจัดระบบสมการให้อยู่ใน รูปแบบของระบบสมการใหม่ได้แล้ว จึงเป็นการง่ายในการคำนวณหาค่า x_i โดยเริ่มจาก สมการท้ายสุดก่อน แล้วทำไปย้อนกลับขึ้นไปเพื่อหาค่า x_i ที่ละสมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3/a''_{33} \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23} x_3)/a'_{22} \end{aligned}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ในการแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

เมื่อเราใช้ ChatGPT เราเพียงพิมพ์ลงไปว่า

Given [A] = [4 -2 -1; -3 6 -2; -2 -1 8], {B} = [7; 1; 0] and {X} = [x1; x2; x3] Use Gauss Elimination Method to solve for {X}. Show the step-by-step derivation in detail.

ChatGPT จะแสดงขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้

Let's solve $Ax = B$ by *Gaussian Elimination Method*.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

1) Set up the augmented matrix and do forward elimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

Use the pivot $a_{11} = 4$ to eliminate below it.

$$R_2 \leftarrow R_2 + \frac{3}{4}R_1:$$

$$R_2 = \left[-3+3, 6-\frac{3}{2}, -2-\frac{3}{4} \mid 1+\frac{21}{4} \right] = \left[0, \frac{9}{2}, -\frac{11}{4} \mid \frac{25}{4} \right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{1}{2}R_1:$$

$$R_3 = \left[-2+2, -1-1, 8-\frac{1}{2} \mid 0+\frac{7}{2} \right] = \left[0, -2, \frac{15}{2} \mid \frac{7}{2} \right]$$

Now:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{11}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & -2 & \frac{15}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right]$$

Use the pivot $a_{22} = \frac{9}{2}$ to eliminate a_{32} .

$$\text{Factor} = \frac{-2}{9/2} = -\frac{4}{9} \text{ and } R_3 \leftarrow R_3 - \left(-\frac{4}{9}\right)R_2 = R_3 + \frac{4}{9}R_2:$$

- New $a_{32} = -2 + \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2} = 0$ (as intended)
- New $a_{33} = \frac{15}{2} + \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{15}{2} - \frac{11}{9} = \frac{113}{18}$
- New RHS $= \frac{7}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{25}{4} = \frac{7}{2} + \frac{25}{9} = \frac{113}{18}$

So:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{11}{4} & \frac{25}{4} \\ 0 & 0 & \frac{113}{18} & \frac{113}{18} \end{array} \right]$$

2) Back substitution

From row 3:

$$\frac{113}{18} x_3 = \frac{113}{18} \Rightarrow x_3 = 1.$$

From row 2:

$$\frac{9}{2} x_2 - \frac{11}{4} x_3 = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{9}{2} x_2 - \frac{11}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{9}{2} x_2 = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow x_2 = 2.$$

From row 1:

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow 4x_1 - 4 - 1 = 7 \Rightarrow 4x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 3. \quad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.4 วิธีของเกาส์-จอร์แดน

วิธีของเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan method) เป็นวิธีที่ขยายผลจากวิธีการกำจัดแบบเกาส์ไปอีกต่อหนึ่ง ยกตัวอย่างเช่น หากเรามีระบบสมการซึ่งประกอบไปด้วย 3 สมการย่อย ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

เริ่มจากการกำจัดไปข้างหน้าในทำนองเดียวกันกับที่ใช้ในวิธีการกำจัดแบบเกาส์ โดยเปลี่ยนระบบสมการข้างต้นให้ไปอยู่ในรูปแบบซึ่งเมทริกซ์จัตุรัสทางด้านซ้ายของระบบสมการประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ที่มีค่าเป็นศูนย์ตลอดแถบล่างซ้ายและแถบบนขวาของเมทริกซ์ และมีค่าเป็นหนึ่งตลอดแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์นั้น ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{Bmatrix}$$

ซึ่งก่อให้เกิดผลลัพธ์โดยทันที คือ

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{Bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีของเกาส์-จอร์แดนเพื่อแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

เมื่อเราใช้ ChatGPT เราเพียงพิมพ์ลงไปว่า

Given [A] = [4 -2 -1; -3 6 -2; -2 -1 8], {B} = [7; 1; 0] and {X} = [x1; x2; x3] Use Gauss Elimination Method to solve for {X}. Show the step-by-step derivation in detail.

ChatGPT จะแสดงขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้

We are solving the linear system: $AX = B$

where: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Using the *Gauss-Jordan Elimination Method*, we augment matrix A with column B and reduce it.

Step 1: Write the augmented matrix $[A | B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

Step 2: Make the pivot of Row 1 a 1 (means taking the first non-zero number (called the pivot) in Row 1, and scaling the entire row so that this number becomes 1)

Divide Row 1 by 4:

$$\bullet R_1 \leftarrow \frac{1}{4}R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & -0.25 & 1.75 \\ -3 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

Step 3: Eliminate elements below pivot in column 1

$$\begin{aligned} \bullet R_2 &\leftarrow R_2 + 3 \cdot R_1 \\ \bullet R_3 &\leftarrow R_3 + 2 \cdot R_1 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & -0.25 & 1.75 \\ 0 & 4.5 & -2.75 & 6.25 \\ 0 & -2 & 7.5 & 3.5 \end{array} \right]$$

Step 4: Make the pivot of Row 2 a 1 (means taking the first non-zero number (pivot) in Row 2, and scaling (dividing) the entire row so that this number becomes 1)

Divide Row 2 by 4.5:

$$\bullet R_2 \leftarrow 14.5R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & -0.25 & 1.75 \\ 0 & 1 & -0.6111 & 1.3889 \\ 0 & -2 & 7.5 & 3.5 \end{array} \right]$$

Step 5: Eliminate above and below pivot in column 2

$$\begin{aligned} \bullet R_1 &\leftarrow R_1 + 0.5 \cdot R_2 \\ \bullet R_3 &\leftarrow R_3 + 2 \cdot R_2 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.5556 & 2.4444 \\ 0 & 1 & -0.6111 & 1.3889 \\ 0 & 0 & 6.2778 & 6.2778 \end{array} \right]$$

Step 6: Make pivot of Row 3 a 1 (means taking the first non-zero number (called the pivot) in Row 3 and dividing entire row by that number to make it equal to 1)

$$\bullet R_3 \leftarrow 16.2778R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.5556 & 2.4444 \\ 0 & 1 & -0.6111 & 1.3889 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Step 7: Eliminate above pivot in column 3

$$\begin{aligned} \bullet R_1 &\leftarrow R_1 + 0.5556 \cdot R_3 \\ \bullet R_2 &\leftarrow R_2 + 0.6111 \cdot R_3 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Final Solution:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Answer:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1$$

1.5 วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

การหาเมทริกซ์ผกผัน (matrix inverse) จากเมทริกซ์ที่กำหนดให้ สามารถทำได้ง่ายโดยผ่านวิธีของเกาส์-จอร์แดน สมมุติว่าเรามีเมทริกซ์ขนาด (3×3) ดังนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

และต้องการเมทริกซ์ผกผัน $[A]^{-1}$ เราเริ่มจากความสัมพันธ์ที่ว่า

$$\underset{(3 \times 3)}{[A]} \underset{(3 \times 3)}{[A]^{-1}} = \underset{(3 \times 3)}{[I]}$$

โดย $[I]$ แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) และหากกำหนดให้เมทริกซ์ผกผันนี้ประกอบด้วยเมทริกซ์แถวตั้ง 3 แถว ดังนี้

$$\underset{(3 \times 3)}{[A]^{-1}} = \left[\underset{(3 \times 1)}{\{X\}_1} \quad \underset{(3 \times 1)}{\{X\}_2} \quad \underset{(3 \times 1)}{\{X\}_3} \right]$$

แล้วแทนกลับลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งก็มีความหมายในทำนองที่ว่า เราจะแก้ระบบสมการนี้ถึง 3 ครั้ง นั่นคือ เปรียบเสมือนมีเวกเตอร์ทางด้านขวาถึง 3 ชุด ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

เนื่องจากระบบสมการนี้ประกอบด้วยเวกเตอร์ทางด้านขวาที่แตกต่างกัน แต่มีเมทริกซ์จัตุรัสเพียงเมทริกซ์เดียวทางด้านซ้ายของสมการ ดังนั้น เราสามารถใช้วิธีเกาส์-จอร์แดนเพื่อทำการกำจัดไปข้างหน้าไปไปโดยพร้อมกันทั้ง 3 เวกเตอร์ ดังที่จะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาเมทริกซ์ผกผัน $[A]^{-1}$ ของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

เมื่อเราใช้ ChatGPT เราเพียงพิมพ์ลงไปว่า

Given $[A] = [4 \ -2 \ -1; -3 \ 6 \ -2; -2 \ -1 \ 8]$. Find the inverse $[A]$. Show the step-by-step derivation in detail.

ChatGPT จะแสดงขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้

To find the *inverse of matrix*:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

We will use the *Gauss-Jordan elimination* method by transforming $[A|I]$ into $[I|A^{-1}]$.

Step 1: Form the augmented matrix $[A|I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Step 2: Make the pivot of Row 1 equal to 1

Divide Row 1 by 4:

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{4}R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Step 3: Eliminate entries below the pivot (column 1)

$$R_2 \leftarrow R_2 + 3 \cdot R_1 \quad \text{and} \quad R_3 \leftarrow R_3 + 2 \cdot R_1$$

Updated matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Step 4: Make pivot of Row 2 = 1

Divide Row 2 by $\frac{9}{2} \Rightarrow R_2 \leftarrow \frac{2}{9}R_2$

So:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Step 5: Eliminate above and below pivot in column 2

Row 1: $R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2$ and Row 3: $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$

Updated matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{91}{18} & \frac{5}{6} & \frac{4}{9} & 1 \end{array} \right]$$

Step 6: Make pivot of Row 3 = 1

$$R_3 \leftarrow \frac{18}{91}R_3$$

New Row 3:

$$\left[0 \quad 0 \quad 1 \mid \frac{15}{91} \quad \frac{8}{91} \quad \frac{18}{91} \right]$$

Step 7: Eliminate above (column 3)

Row 1: $R_1 \leftarrow R_1 + \frac{5}{9}R_3$ and Row 2: $R_2 \leftarrow R_2 + \frac{11}{18}R_3$

Final augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{116}{273} & \frac{131}{819} & \frac{10}{91} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{64}{273} & \frac{10}{91} & \frac{18}{91} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{91} & \frac{8}{91} & \frac{18}{91} \end{array} \right]$$

Final Answer:

The inverse of A is:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{116}{273} & \frac{131}{819} & \frac{10}{91} \\ \frac{64}{273} & \frac{10}{91} & \frac{18}{91} \\ \frac{15}{91} & \frac{8}{91} & \frac{18}{91} \end{bmatrix}$$

1.6 วิธีการแยกแบบแอลยู

วิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition method) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้เพื่อแก้ระบบสมการสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติ แนวความคิดของวิธีนี้สามารถทำความเข้าใจได้ง่าย โดยเริ่มจากระบบสมการที่ต้องการแก้

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

ขั้นตอนแรกคือการแยกเมทริกซ์ $[A]$ ออกเป็นผลคูณระหว่าง 2 เมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ ดังนี้

$$[A] = [L][U]$$

ยกตัวอย่างเช่น หากเรามีเพียง 3 สมการย่อย รายละเอียดภายในของเมทริกซ์เหล่านี้ คือ

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[A]} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{[L]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[U]}$$

กล่าวคือ เมทริกซ์ $[L]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ตลอดแถบบนขวาเป็นศูนย์หมด ในขณะที่เมทริกซ์ $[U]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ตลอดแถบล่างซ้ายเป็นศูนย์หมด หากแทนเมทริกซ์ $[A]$ กลับลงในสมการตั้งต้น จะได้

$$[L] \underbrace{[U] \{X\}}_{\{Y\}} = \{B\}$$

ดังนั้น เราจึงสามารถแก้ระบบสมการ

$$[L] \{Y\} = \{B\}$$

ก่อน ด้วยการแทนค่าแบบไปข้างหน้า (forward substitution) เพื่อหาเวกเตอร์ $\{Y\}$ ได้แล้ว จากนั้นจึงแก้ระบบสมการ

$$[U] \{X\} = \{Y\}$$

ด้วยการแทนค่าแบบย้อนกลับ (backward substitution) เพื่อหาผลลัพธ์ของเวกเตอร์ $\{X\}$ ที่ต้องการ

จากคำอธิบายนี้ เราจะเห็นได้ว่า การแก้ระบบสมการ $[A] \{X\} = \{B\}$ ด้วยวิธีแยกแบบแอลยูนั้นประกอบด้วย 3 ขั้นตอนหลัก คือ

- (ก) ทำการแยกเมทริกซ์ $[A]$ ให้เป็นผลคูณระหว่างเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$
- (ข) แก้ระบบสมการ $[L] \{Y\} = \{B\}$ ด้วยการแทนค่าแบบไปข้างหน้าเพื่อหาเวกเตอร์ $\{Y\}$
- (ค) แก้ระบบสมการ $[U] \{X\} = \{Y\}$ ด้วยการแทนค่าแบบย้อนกลับเพื่อหาผลลัพธ์เวกเตอร์ $\{X\}$

อนึ่ง หากเราพิจารณาการแยกของเมทริกซ์ $[A]$ ออกเป็นเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ ดังแสดงในสมการข้างต้น เราพบว่าสัมประสิทธิ์ที่ตลอดแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $[L]$ นั้นเป็นตัวเลขค่าใด ๆ ในขณะที่สัมประสิทธิ์ที่ตลอดแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $[U]$ นั้นต่างมีค่าเท่ากับหนึ่ง การจัดรูปแบบเมทริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ ในลักษณะเช่นนี้ เรียกว่าเป็นการจัดของคราท์ (Crout) แต่ในทางกลับกัน หากสัมประสิทธิ์ที่ตลอดแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $[L]$ มีค่าเท่ากับหนึ่งโดยสัมประสิทธิ์ที่ตลอดแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $[U]$ นั้นเป็นตัวเลขค่าใด ๆ การจัดรูปแบบเมทริกซ์ในลักษณะหลังนี้เรียกว่าเป็นการจัดของคูิตเติล (Doolittle) การจัดรูปแบบทั้งสองวิธีนี้นำไปสู่ผลลัพธ์ของเวกเตอร์ $\{X\}$ เดียวกัน

ตัวอย่าง จงใช้วิธีการแยกแบบแอลยูเพื่อแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

เมื่อเราใช้ ChatGPT เราเพียงพิมพ์ลงไปว่า

Given [A] = [4 -2 -1; -3 6 -2; -2 -1 8], [B] = [7; 1; 0] and {X} = [x1; x2; x3] Use LU Decomposition Method (Crout Method) to solve for {X}. Show the step-by-step derivation in detail.

ChatGPT จะแสดงขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้

We will use the *Crout's LU Decomposition* (lower-triangular L with non-unit diagonal, and unit upper-triangular U) so that

$$A = LU, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1) Crout factorization $A=LU$

Crout formulas (column by column):

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, \quad (i \geq j), \quad u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right), \quad (i < j).$$

Column $j=1$:

$$l_{11} = a_{11} = 4, \quad l_{21} = a_{21} = -3, \quad l_{31} = a_{31} = -2.$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Column $j=2$:

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 6 - (-3)\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2},$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = -1 - (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 = -2.$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{-2 - (-3)\left(-\frac{1}{4}\right)}{9/2} = \frac{-2 - \frac{3}{4}}{9/2} = \frac{-11/4}{9/2} = -\frac{11}{18}.$$