สมบัติกายภาพ ของสสาร : ของไหล 2

PHYSICAL PROPERTIES OF MATTER : FLUIDS 2

ดร.ปนัดดา เดชาดิลก

ชื่อหนังสือ : สมบัติกายภาพของสสาร : ของไหล 2

(Physical Properties of Matter : Fluid 2)

ผู้แต่ง : ปนัดดา เดชาดิลก

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ปนัดดา เดชาดิลก.

สมบัติกายภาพของสสาร : ของไหล 2 = Physical Properties of Matter : Fluid 2. -- กรุงเทพฯ : [ม.ป.พ.], 2569.

90 หน้า.

1. กลศาสตร์ของไหล. I. ชื่อเรื่อง.

620.106

ISBN (e-book) : 978-616-631-577-6

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ 2537

ห้ามคัดลอก จัดพิมพ์ หรือทำซ้ำรวมทั้งดัดแปลงเป็นสื่ออื่น ๆ ก่อนได้รับอนุญาต

พิมพ์ครั้งที่ 1: เดือนเมษายน 2569 E-Book ขนาด A4

ราคา : 150

พิมพ์ที่ : PROTEXTS.COM

บริษัท แดเน็กซ์ อินเตอร์คอร์ปอเรชั่น จำกัด

103/11 ซอยกำแพงเพชร 6 ซ.5 แขวงตลาดบางเขน

เขตหลักสี่ กรุงเทพมหานคร 10210 โทรศัพท์ 02-575-1791

Website: www.Protexts.com **E-mail:** Protexts@hotmail.com

คำนำ (Preface)

หนังสือเล่มนี้จัดพิมพ์เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนรายวิชาสมบัติทางฟิสิกส์ของสสาร (2304377) ซึ่งเป็นวิชาเลือกในหลักสูตรปริญญาบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เนื้อหาครึ่งแรกของภาคการศึกษาคือสมบัติทางฟิสิกส์ของสสารซึ่งเป็นของไหลโดยหนังสือเล่มนี้เป็นเล่มที่ 2 โดยต่อเนื่องจากหนังสือ “สมบัติทางฟิสิกส์ของสสาร:ของไหล 1” สำหรับผู้ที่สนใจในเชิงลึกโดยมุ่งเน้นการขนส่งโมเมนตัมระหว่างการไหลแบบต่าง ๆ เริ่มต้นจากการไหลของของไหลนิวโตเนียนแบบอัดไม่ได้เพียงชนิดเดียวที่ตัวเลขเรย์โนลด์ต่าง ๆ ระบบที่ประกอบด้วยของไหลมากกว่า 1 ชนิด การไหลที่อุณหภูมิไม่คงที่ ไปจนถึงพลาสมาของไหลยิ่งยวด และของไหลในระบบที่มีขนาดใกล้เคียงกับโมเลกุลของไหล คณิตศาสตร์ที่ต้องใช้ในรายวิชานี้นั้นอยู่ในภาคผนวกเพื่อให้นิสิตระดับปริญญาตรีจากภาควิชาอื่น ๆ ของคณะวิทยาศาสตร์และคณะครุศาสตร์ที่สนใจสามารถอ่านได้ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่านไม่มากก็น้อย

ปนัดดา เดชาดิลก

3 มีนาคม 2569

สารบัญ (Table of content)

บทที่ 8 การขนส่งโมเมนตัม 4 (Momentum transfer 4) 1

8.1 หลักการเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์เชิงสเกลลิง 1

8.2 การประมาณค่าโดยใช้ตัวเลขเรย์โนลด์สำหรับการไหลแบบคงตัว 2
(Approximation using Reynolds Number for Steady Flow)

8.3 การประมาณค่าโดยใช้ตัวเลขสเตราฮอลสำหรับการไหลแบบไม่คงตัว 3
(Approximation using Strouhal Number for Time-Dependent Flow)

8.4 แบบฝึกหัด 4

บทที่ 9 การขนส่งโมเมนตัม 5 (Momentum Transfer 5) 6

9.1 สมบัติของการไหลแบบสโตกส์ซึ่งเกิดจากความเป็นสมการเชิงเส้นของสมการสโตกส์ 6

9.2 การคำนวณแรงที่ของไหลกระทำต่อวัตถุ 8

9.3 ฟังก์ชันกระแส (Stream Function) 9

9.4 ฟังก์ชันของกรีนซึ่งเกี่ยวข้องกับการไหลแบบสโตกส์: เทนเซอร์โอซีนและการกระจายตัว
แบบ multipole 12

9.5 แบบฝึกหัด

บทที่ 10 การขนส่งโมเมนตัม 6 (Momentum Transfer 6) 16

7.1 การไหลแบบไม่หนืด (Inviscid Flow) 16

10.2 การไหลแบบไม่หมุนและศักย์ความเร็ว (Irrotational Flow and Velocity Potential) 18

10.3 ปฏิทรรศน์ดะล็อมแบรต์ (D'Alembert's Paradox) 19

10.4 การรบกวนแบบซิงกูลาร์ (Singular Perturbation) 21

7.5 ทฤษฎีชั้นขอบ (Boundary Layer Theory) 23

7.6 การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) 25

10.7 แบบฝึกหัด 25

บทที่ 11 ความตึงผิวและระบบซึ่งประกอบด้วยของไหลหลายชนิด 27
(Surface tension and multifluid systems)

11.1 ความตึงผิวและสมดุลความเค้นที่รอยต่อระหว่างของไหลต่างชนิด 27
(Surface tension and fluid-fluid interface stress balance)
11.2 สมดุลความเค้นในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวรอยต่อของไหลต่างชนิด 29
(Normal stress balance at the fluid-fluid interface)
11.3 สมดุลความเค้นเฉือน ณ รอยต่อระหว่างของไหลต่างชนิด 30
(Shear stress balance at the fluid-fluid interface)
11.4 สรุป (Conclusion) 30
11.5 แบบฝึกหัด (Exercise) 31

บทที่ 12 ระบบของไหลที่อุณหภูมิไม่คงที่ (Non-isothermal fluid systems) 32

12.1 แรงลอยตัวและการประมาณบูส์สิเนสค์ (Buoyancy force and Boussinesq approximation) 32
12.2 การเปลี่ยนแปลงสมการขนส่งความร้อนที่เกิดจากการไหล 34
(Heat transfer equation alteration due to a fluid flow)
12.3 สรุป (Conclusion) 37
12.4 แบบฝึกหัด (Exercises) 37

บทที่ 13 การไหลของสารละลายอิเล็คโทรไลต์ 38

13.1 สมการ Nernst-Planck (Nernst-Planck Equation) 38
13.2 สมการ Poisson (Poisson's Equation) 39
13.3 สมการ Poisson-Boltzmann (Poisson-Boltzmann Equation) และ Electrical Double Layer 40
13.4 Electroosmosis 41
13.5 การไหลแบบ electrokinetic ลักษณะอื่น ๆ 44
13.6 แบบฝึกหัด 44

บทที่ 14 หัวข้อพิเศษซึ่งเกี่ยวข้องกับการไหลของของไหล (Special topics involving fluid flows) 45

14.1พลาสมา (Plasma) 45

14.2 ของไหลยิ่งยวด (Superfluids) 48

14.3 “รอยต่อ” ระหว่างกลศาสตร์ต่อเนื่อง และกลศาสตร์ควอนตัม (Interface between continuum mechanics and quantum mechanics) 49

14.4 สรุป (Conclusion) 49

14.5 แบบฝึกหัด (Exercises) 49

บรรณานุกรม (References) 51

ภาคผนวก (Appendix) 53

ดัชนี (Indices) 89

บทที่ 8 การขนส่งโมเมนตัม 4: การวิเคราะห์เชิงสเกลลิงในกลศาสตร์ของไหล

(Momentum transfer 4: scaling analysis in fluid mechanics)

8.1) หลักการเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์เชิงสเกลลิง

การวิเคราะห์เชิงสเกลลิงมีพื้นฐานคือการทำให้ตัวแปรไร้หน่วยและอนุพันธ์ของมันมีค่าอยู่ใน O(1) โดยใช้ "สเกล" (scale) ของแต่ละตัวแปร สเกลของตัวแปรตามคือ order of magnitude ที่เป็นไปได้มากที่สุดของตัวแปรตาม ในขณะที่สเกลของตัวแปรอิสระคือช่วงของตัวแปรอิสระที่ส่งผลให้ตัวแปรตามมีการเปลี่ยนแปลง ในระบบซึ่งประกอบด้วยของไหลนิวโตเนียนแบบอัดไม่ได้ ให้ L เป็นสเกลความยาวของระบบ (ดังอธิบายในบทที่ 5.1 สเกลความยาวคือช่วงความยาวซึ่งความเร็วของไหลมีการเปลี่ยนแปลง เช่นภายในท่อทรงกระบอก L คือรัศมีหรือเส้นผ่านศูนย์กลางพื้นที่หน้าตัดท่อเป็นต้น) และให้ U (อัตราเร็วสูงสุดของระบบ)เป็นสเกลความเร็ว ตัวแปรและตัวดำเนินการ (operators) ไร้หน่วยต่าง ๆ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$\hat{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{L} \qquad \hat{\vec{\nabla}} = L\vec{\nabla} \qquad \hat{\nabla}^2 = L^2\nabla^2 \tag{8.1a}$$

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{U} \tag{8.1b}$$

$$\hat{t} = \frac{t}{[t]} \tag{8.1c}$$

$$\hat{\wp} = \frac{\wp}{[\wp]} \tag{8.1e}$$

โดยสเกลเวลา ($[t]$) และ สเกลความดันไดนามิกส์ ($[\wp]$) ถูกกำหนดโดยลักษณะทางพลศาสตร์การไหลดังจะอธิบายต่อไปด้านล่าง

สมการนาเวียร์สโตกส์และสมการต่อเนื่องสามารถเขียนในรูปของตัวแปรและตัวดำเนินการไร้หน่วยในสมการที่ 8.12a - 8.12e ดังนี้

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Sr}\frac{\partial\hat{\vec{v}}}{\partial\hat{t}} + \hat{\vec{v}}\cdot\hat{\vec{\nabla}}\hat{\vec{v}}\right) = -\left(\frac{[\wp]}{\mu U/L}\right)\hat{\vec{\nabla}}\,\hat{\wp} + \hat{\nabla}^2\hat{\vec{v}} \tag{8.2a}$$

$$\hat{\vec{\nabla}}\cdot\hat{\vec{v}} = 0 \tag{8.2b}$$

ค่าคงที่ไร้หน่วย (dimensionless parameter) สองค่าซึ่งปรากฏในสมการที่ 8.13a ได้แก่

(1) ตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) $\mathrm{Re} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{L^2/\upsilon}{L/U}$ คืออัตราส่วนระหว่างสเกลเวลาของ "การแพร่" ของโมเมนตัม $\left(L^2/\upsilon\right)$ หรือการลดลงของโมเมนตัมเพราะความหนืด (viscous dissipation) และสเกลเวลาของ "การพา" ของโมเมนตัม (L/U) ถ้า $\mathrm{Re} >> 1$ แสดงว่า การพาของโมเมนตัมเกิดขึ้นรวดเร็วกว่าการสูญเสียโมเมนตัมเนื่องจากความหนืด (viscous dissipation) ถ้า $\mathrm{Re} << 1$ หมายความว่าการสูญเสียโมเมนตัมเนื่องจากความหนืดเกิดขึ้นไวกว่ามาก หาก $\mathrm{Re} \sim 1$ คือทั้งสองกระบวนการเกิดขึ้นด้วยอัตราพอ ๆ กัน

(2) ตัวเลขสเตราฮอล (Strouhal number) หรือ $Sr = \frac{[t]}{L/U}$ คืออัตราส่วนระหว่างสเกลเวลาของระบบ ($[t]$) และสเกลเวลาการพาของโมเมนตัม (L/U)

การประมาณค่าโดยใช้ Re และ Sr จะถูกอธิบายในบทที่ 8.2 และ 8.3

8.2) **การประมาณค่าโดยใช้ตัวเลขเรย์โนลด์สำหรับการไหลแบบคงตัว (Approximation using Reynolds Number for Steady Flow)**

ในการศึกษาความดันและความเร็วของไหล สิ่งแรกที่ต้องคำนวณคือตัวเลขเรย์โนลด์ดังที่อธิบายข้างต้นในบทที่ 8.2 $\mathrm{Re} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{L^2/\upsilon}{L/U} = \frac{[t]_{dissipation}}{[t]_{convection}}$ โดยที่ $[t]_{dissipation}$ คือสเกลเวลาของกระบวนการ viscous dissipation ขณะที่ $[t]_{convection}$ คือสเกลเวลาของกระบวนการพาของโมเมนตัมในของไหล สมการนาเวียร์สโตกส์สำหรับการไหลแบบคงตัวสามารถเขียนโดยใช้ตัวแปรและค่าคงที่ไร้หน่วยดังนี้

$$\frac{[t]_{dissipation}}{[t]_{convection}}\left(\hat{\vec{v}}\cdot\hat{\vec{\nabla}}\hat{\vec{v}}\right) = -\left(\frac{[\wp]}{\mu U/L}\right)\hat{\vec{\nabla}}\,\hat{\wp} + \hat{\nabla}^2\hat{\vec{v}} \qquad (8.3)$$

หาก $[t]_{dissipation} << [t]_{convection}$ ส่งผลให้ $\mathrm{Re} << 1$ และสมการนาเวียร์สโตกส์สามารถถูกประมาณค่าโดยละทิ้งผลของการพาของโมเมนตัม(พจน์ไม่เชิงเส้น)ที่มีต่อความเร็วและความดันในของไหล

$$0 \approx -\hat{\vec{\nabla}}\,\hat{\wp} + \hat{\nabla}^2\hat{\vec{v}} \qquad (8.4)$$

โดย $[\wp] = \mu U/L$ สเกลของความดันไดนามิกส์คือความเค้นเนื่องจากความหนืด

สมการที่ 8.15 ถูกเรียกว่า "สมการสโตกส์" (Stokes' equation) เป็นสมการเชิงเส้น การไหลซึ่งสามารถอธิบายได้โดยใช้สมการสโตกส์เรียกกันว่าการไหลแบบคืบคลาน (creeping flow) หรือการไหลแบบสโตกส์

(Stokes flow) เป็นการไหลซึ่งเกิดขึ้นในระบบที่มีสเกลความยาวและสเกลความเร็วต่ำ การไหลแบบสโตกส์มีลักษณะต่างจากการไหลที่เราเห็นในชีวิตประจำวันเป็นอย่างมาก รายละเอียดจะถูกอธิบายต่อไปในบทที่ 6

ถ้า $[t]_{convection} << [t]_{dissipation}$ ส่งผลทำให้ Re >> 1 ทำให้สามารถประมาณค่าสมการนาเวียร์สโตกส์โดยละทิ้งผลของการสูญเสียโมเมนตัมเนื่องจากความหนืด (viscous dissipation) ดังนี้

$$\left(\hat{\vec{v}} \cdot \hat{\vec{\nabla}} \hat{\vec{v}}\right) \approx -\hat{\vec{\nabla}} \hat{\wp} \qquad (8.5)$$

โดยสเกลของความดันไดนามิกส์ $[\wp] = \rho U^2$ ถูกเรียกว่า inertial pressure scale การแก้สมการที่ 8.5 จะให้ผลเฉลยซึ่งเป็นการประมาณค่าที่ดี(ความถูกต้องสูง)ในตำแหน่งส่วนใหญ่ยกเว้นในบริเวณแคบ ๆ ใกล้กับพื้นผิวของแข็งซึ่งถูกเรียกว่าชั้นขอบ (boundary layer)

ของไหลซึ่งการไหลของมันสามารถอธิบายได้โดยใช้สมการที่ 8.16 ถูกเรียกว่าของไหลไม่หนืด (inviscid fluid) ซึ่งเป็นลักษณะการไหลที่เราพบเห็นในชีวิตประจำวัน

8.3) **การประมาณค่าโดยใช้ตัวเลขสเตราฮอลสำหรับการไหลแบบไม่คงตัว (Approximation using Strouhal Number for Time-Dependent Flow)**

การไหลแบบไม่คงตัวคือการไหลที่ความเร็วและความดันของไหลเป็นฟังก์ชันของเวลา เช่น การไหลเวียนของโลหิตในร่างกาย อัตราเร็วของเลือดเป็นฟังก์ชันของเวลาเนื่องจากการบีบตัวของหัวใจ บางครั้งแม้ว่าการไหลจะเป็นการไหลแบบไม่คงตัว เราสามารถใช้การประมาณค่าโดยถือว่าการไหลนั้นเป็นการไหลแบบ"เกือบ ๆ" จะคงตัว หรือการไหลแบบคงตัวเทียม (pseudo-steady flow) จากการพิจารณาค่าตัวเลขเรย์โนลด์ (Re) และตัวเลขสเตราฮอล (*Sr*) ประกอบกัน

การคำนวณตัวเลขเรย์โนลด์ทำให้ทราบว่ากระบวนการขนส่งโมเมนตัมในของไหลถูกควบคุมโดยกระบวนการพาโมเมนตัม (convection of momentum) หรือการสูญเสียโมเมนตัมเพราะความหนืด (viscous dissipation) หาก Re << 1 และผลของการพาโมเมนตัมถูกละทิ้งในสมการนาเวียร์สโตกส์ เราจะสามารถเขียนสมการดังกล่าวได้ดังนี้

$$\frac{\mathrm{Re}}{Sr} \frac{\partial \hat{\vec{v}}}{\partial \hat{t}} = -\hat{\vec{\nabla}} \hat{\wp} + \hat{\nabla}^2 \hat{\vec{v}} \qquad (8.6)$$