

แคลคูลัสและ สมการเชิงอนุพันธ์ ด้วย AI

$$\int \sin^2 x \, dx$$
$$y'' + 7y' + 3y = \cos x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$



แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์

ด้วย AI

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ ด้วย AI

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

 **สำนักพิมพ์**
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2569

300.-

ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย AI / ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

1. แคลคูลัส. 2. สมการเชิงอนุพันธ์. 3. ปัญหาประยุกต์ -- การใช้ในงานวิศวกรรม.

515

ISBN (e-book) 978-974-03-4419-3

สพจ.2740



สรรคุณคำวิชาการ สู่สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว
การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดทำโดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2569

www.cupress.chula.ac.th [CUB6811-001]

โทร. 0-2218-3562-3

บรรณาธิการอำนวยการ : รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลวรรณ พิมพ์พันธุ์

กองบรรณาธิการฝ่ายวิชาการ : ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ปิยนอก บุนนาค

ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

ศาสตราจารย์ นายแพทย์ชัยณัฐ พันธุ์เจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธุ์ เฑาะคุปต์

ผู้ประสานงาน : วาสนา ชำเ็น

พิสูจน์อักษร : พัชรมณฑา คณาน

ออกแบบปกและรูปเล่ม : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

<http://www.chulabook.com>

โทร. 08-6323-3703-4

customer@cubook.chula.ac.th, info@cubook.chula.ac.th

Apps: CU-eBook Store

คำนำ

ปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence หรือ AI) ได้เข้ามามีบทบาทสำคัญในแวดวงการศึกษา โดยเฉพาะในด้านคณิตศาสตร์และการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ ปัจจุบัน AI สามารถแก้โจทย์แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ตามขั้นตอนที่เราคุ้นเคยจากห้องเรียน พร้อมทั้งสร้างโปรแกรมที่แสดงผลลัพธ์และกราฟออกมาได้อย่างรวดเร็วทั้งมีที่สวยงาม

อย่างไรก็ตาม AI มักระบุไว้ล่วงหน้าว่าผลลัพธ์อาจมีความคลาดเคลื่อน ซึ่งก่อให้เกิดความกังวลว่า นักศึกษาอาจใช้ AI หาคำตอบโดยไม่เข้าใจหลักการเบื้องหลัง หนังสือ “แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย AI” จึงจัดทำขึ้นเพื่อเสริมสร้างความตระหนักรู้ในการใช้ AI อย่างมีวิจารณญาณ โดยนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีมาตรฐานก่อน แล้วจึงเปรียบเทียบกับการใช้ AI ในการแก้ปัญหาเดียวกันด้วยคำสั่งสั้น ๆ

วิธีนี้ช่วยให้ผู้อ่านสามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จาก AI และเข้าใจขั้นตอนการคิดอย่างเป็นระบบ ขณะเดียวกันยังเห็นถึงศักยภาพของ AI ในการสนับสนุนการเรียนรู้และการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพในเวลาอันรวดเร็ว

ผู้เขียนขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ให้การสนับสนุนในการจัดพิมพ์และเผยแพร่หนังสือเล่มนี้ เพื่อส่งเสริมความรู้ความเข้าใจในการใช้ AI ในด้านคณิตศาสตร์และการคำนวณแก่เยาวชนไทย และหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นแรงบันดาลใจให้ผู้อ่านนำ AI ไปประยุกต์ใช้ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
สาขาวิชาวิศวกรรมอากาศยาน
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2568

*** ข้อพึงระวังในการใช้ AI ***

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจอย่างลึกซึ้งและต้องฝึกฝนด้วยตนเอง หนังสือเล่มนี้ได้ถูกออกแบบมาให้เกิดการพัฒนาทักษะเหล่านี้ ผ่านการอธิบายอย่างเป็นขั้นเป็นตอน ประกอบไปด้วยตัวอย่างปัญหาทางคณิตศาสตร์พื้นฐานและขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างละเอียด ดังนั้น จึงพึงระลึกเสมอว่า

- ใช้ AI เพื่อตรวจทานคำตอบ หลังจากได้ลองแก้ปัญหาด้วยตนเองแล้ว
- ขอคำอธิบายเพิ่มเติมจาก AI เมื่อเกิดการติดขัดในบางขั้นบางตอน
- ฝึกตั้งคำถามกับ AI เพื่อเพิ่มความเข้าใจในที่มาของผลลัพธ์
- อย่าส่งโจทย์ให้ AI เพื่อเพียงหาคำตอบ การคิดด้วยตนเองคือหัวใจของการเรียนคณิตศาสตร์
- อย่าเชื่อถือคำตอบจาก AI ทุกครั้งโดยไม่ตรวจสอบ เพราะ AI อาจให้คำตอบที่ผิดได้
- แบบฝึกหัดท้ายบทจะช่วยทำให้เกิดความเข้าใจในคณิตศาสตร์ขึ้นเป็นอย่างมาก ไม่เป็นขามอีกต่อไป และที่สำคัญ พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เหล่านี้ล้วนมีความสำคัญต่อการแก้ปัญหามจริงในทางปฏิบัติ

สารบัญ

คำนำ

บทที่ 1	คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ด้วย AI	1
1.1	บทนำ	1
1.2	การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วย AI	2
1.3	ข้อพึงระวังในการใช้ AI	8
1.4	บทสรุป	10
	แบบฝึกหัด	10
บทที่ 2	แคลคูลัส	15
2.1	บทนำ	15
2.2	การหาค่าลิมิต	16
2.3	การหาค่าอนุพันธ์	22
2.4	การอินทิเกรต	30
2.5	อนุกรมเทย์เลอร์	37
2.6	อนุกรมทั่วไป	41
2.7	บทสรุป	44
	แบบฝึกหัด	44
บทที่ 3	สมการเชิงอนุพันธ์	51
3.1	บทนำ	51
3.2	ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์	52
3.3	ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์	54
3.4	บทสรุป	67
	แบบฝึกหัด	68

บทที่ 4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	75
4.1	บทนำ	75
4.2	สมการแบบแยกได้	76
4.3	สมการเชิงเส้น	85
4.4	สมการแม่นตรง	93
4.5	สมการรูปแบบจำเพาะ เบร์นูลลี และรีคาติ	105
4.6	วิธีเชิงตัวเลข	111
4.7	บทสรุป	116
	แบบฝึกหัด	117
 บทที่ 5	 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	 125
5.1	บทนำ	125
5.2	สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	126
5.3	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน	130
5.4	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน	135
5.5	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน	140
5.6	สมการไม่เอกพันธ์	147
5.7	วิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า	153
5.8	วิธีแปรผันพารามิเตอร์	158
5.9	วิธีเชิงตัวเลข	168
5.10	บทสรุป	175
	แบบฝึกหัด	176
 บทที่ 6	 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไป	 185
6.1	บทนำ	185
6.2	สมการเอกพันธ์ที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	186
6.3	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน	188

6.4	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน	191
6.5	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน	196
6.6	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าผสม	199
6.7	สมการไม่เอกพันธ์	201
6.8	วิธีเชิงตัวเลข	207
6.9	บทสรุป	211
	แบบฝึกหัด	212
บทที่ 7	การแปลงลาปลาซ	221
7.1	บทนำ	221
7.2	สมการพื้นฐาน	222
7.3	การแปลงลาปลาซ	225
7.4	การแปลงลาปลาซผกผัน	228
7.5	การแก้สมการเชิงอนุพันธ์	232
7.6	บทสรุป	249
	แบบฝึกหัด	250
บทที่ 8	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	255
8.1	บทนำ	255
8.2	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบสองจุด	256
8.3	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	260
8.4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง	264
8.5	สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อน	269
8.6	บทสรุป	273
	แบบฝึกหัด	274
บทที่ 9	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเอลลิปติก	285
9.1	บทนำ	285

9.2	สมการเชิงอนุพันธ์	286
9.3	ปัญหาในหนึ่งมิติ	287
9.4	ปัญหาในสองมิติ	289
9.5	บทสรุป	305
	แบบฝึกหัด	306
บทที่ 10	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิค	313
10.1	บทนำ	313
10.2	สมการเชิงอนุพันธ์	314
10.3	ปัญหาในหนึ่งมิติ	317
10.4	ปัญหาในสองมิติ	330
10.5	บทสรุป	336
	แบบฝึกหัด	337
บทที่ 11	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไฮเพอร์โบลิค	345
11.1	บทนำ	345
11.2	สมการเชิงอนุพันธ์	346
11.3	ปัญหาในหนึ่งมิติ	349
11.4	ปัญหาในสองมิติ	360
11.5	บทสรุป	365
	แบบฝึกหัด	366
	บรรณานุกรม	375
	ดัชนี	377

คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ด้วย AI

1.1 บทนำ

AI (Artificial Intelligence) หรือปัญญาประดิษฐ์ เช่น ChatGPT และ DeepSeek ได้เข้ามามีบทบาทต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ความเข้าใจในคณิตศาสตร์มีความสำคัญ เพราะเป็นสิ่งจำเป็นในการวิเคราะห์งานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ จึงเป็นต้นเหตุให้นักศึกษาตามสถาบันการศึกษาถูกบังคับให้เรียนวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิชาแคลคูลัส (calculus) วิชาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) รวมทั้งวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน วิชาเหล่านี้อธิบายพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นเพื่อใช้แก้ปัญหาในระดับสูงขึ้นไป การศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เริ่มตั้งแต่การทำความเข้าใจฟังก์ชัน (function) ในรูปแบบต่าง ๆ การหาค่าลิมิต (limit) ของฟังก์ชันเหล่านี้ การหาค่าอนุพันธ์ (differentiation) การอินทิเกรต (integration) ฯลฯ ซึ่งต่างมีความซับซ้อนและจำเพาะในตัวเอง เป็นผลให้นักศึกษาต้องท่องจำเพื่อเตรียมตัวสอบ แต่ส่วนใหญ่ก็มักลืมวิธีการเหล่านี้หลังจากการสอบได้เสร็จสิ้นไปแล้ว ในปัจจุบัน AI สามารถให้ผลลัพธ์ของปัญหาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เหล่านี้ได้อย่างรวดเร็ว อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจาก AI เหล่านี้จำเป็นต้องถูกตรวจสอบว่ามีความถูกต้อง และมีขั้นตอนที่มาที่ไปเป็นอย่างไร

AI ที่ใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic mathematics) ซึ่งเรากันเคยกันในชั้นเรียนมักตั้งอยู่บนซอฟต์แวร์อื่นอีกต่อหนึ่ง เช่น AI OpenGPT เรียกใช้ซอฟต์แวร์ Wolfram Alpha หรือที่รู้จักกันว่า Mathematica ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์ที่ได้รับความนิยมเชื่อถือมาอย่างยาวนาน ในขณะที่ AI อื่นอาจมีซอฟต์แวร์เป็นของตนเองหรือเรียกใช้ซอฟต์แวร์อื่น ๆ ดังนั้น ผู้ใช้จำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นด้วยตนเอง ยกตัวอย่างเช่น เมื่อเราใช้ AI เพื่อให้ได้ผลลัพธ์จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) เราจะทราบได้อย่างไรว่าผลลัพธ์นั้นถูกต้อง วิธีการตรวจสอบจะทำให้ผู้ใช้ AI เข้าใจถึงที่มาที่ไปของผลลัพธ์นั้นได้อย่างชัดเจน ก่อให้เกิดความแตกฉานในคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น

AI ดังกล่าวข้างต้นสามารถให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นสัญลักษณ์ (symbolic) ได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ เช่น

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

อนึ่ง การแก้ปัญหาต่าง ๆ ในงานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมมักต้องการผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลข ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการอินทิเกรต

$$\int_0^3 x^2 dx$$

AI สามารถให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ 9 ได้ทันที ยิ่งไปกว่านั้น หากฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรต (integrand) มีความซับซ้อน AI สามารถประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาที่ใช้กันโดยทั่วไป เช่น ไพธอน (Python) หรือ แมทแล็บ (MATLAB) เพื่อให้ผู้ใช้ทำการคำนวณหาผลลัพธ์สุดท้ายบนเครื่องคอมพิวเตอร์แบบพกพา (notebook) ได้อย่างสะดวก

1.2 การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วย AI

ในการเรียนวิชาแคลคูลัส เราจำเป็นต้องจำสูตรหลากหลายเพื่อใช้หาค่าอนุพันธ์และค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน หากเราจำสูตรต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและดำเนินการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนด้วยความระมัดระวัง เราจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ดังตัวอย่างต่าง ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน

$$f = \frac{x}{3 - 4\cos x}$$

เราสามารถหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ ChatGPT หรือ DeepSeek ได้โดยง่าย โดยเพียงพิมพ์ว่า

Determine the first derivative of $f = x/(3-4*\cos(x))$.

ทั้ง ChatGPT และ DeepSeek จะแสดงวิธีการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f นี้อย่างเป็นขั้นเป็นตอนบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

To find the first derivative of the function:

$$f(x) = \frac{x}{3 - 4\cos(x)}$$

we will use the Quotient Rule for differentiation. The Quotient Rule states that if we have a function $\frac{u(x)}{v(x)}$, its derivative is:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Here, let: $u = x$ and $v = 3 - 4\cos(x)$.

Step 1 Compute u' and v' :

Derivative of $u = x$ is: $u' = \frac{d}{dx}(x) = 1$

Derivative of $v = 3 - 4\cos(x)$ is: $v' = \frac{d}{dx}(3 - 4\cos(x)) = 0 - 4(-\sin(x)) = 4\sin(x)$

Step 2 Apply the Quotient Rule:

Substituting u , u' , v and v' into the Quotient Rule formula:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(1)(3 - 4\cos(x)) - (x)(4\sin(x))}{(3 - 4\cos(x))^2}$$

Simplify the numerator to obtain the final answer:

$$f'(x) = \frac{3 - 4\cos(x) - 4x\sin(x)}{(3 - 4\cos(x))^2}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อน

$$g = \frac{x \tan x - 3 \tan x - 21x^3 + 7x^4}{x^3 - 3x^2 + 6x - 18}$$

ในทำนองเดียวกัน ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งสามารถหาได้โดยง่ายด้วย AI ก่อให้เกิดผลลัพธ์คือ

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{2x \tan x + 504}{(x^2 + 6)^2} + \frac{\tan^2 x + 43}{x^2 + 6} + 7$$

และค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนี้คือ

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{2016x - 48 \tan x}{(x^2 + 6)^3} - \frac{4x \tan^2 x - 6 \tan x + 88x}{(x^2 + 6)^2} + \frac{2 \tan x (\tan^2 x + 1)}{x^2 + 6}$$

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นและความซับซ้อนเช่นนี้สามารถผลิตพลาดได้ง่ายหากทำด้วยมือแบบที่เราคุ้นเคยกันในชั้นเรียน

ตัวอย่าง กระบวนการอินทิเกรตเป็นอีกแขนงหนึ่งในการเรียนวิชาแคลคูลัสที่ทำให้ผู้ศึกษาเกิดความไม่สบายใจเพราะต้องจำสูตรและเทคนิคหลาย ๆ อย่าง อีกทั้งไม่เห็นถึงความสำคัญของผลลัพธ์ที่จะนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในงานชนิดใดได้บ้าง ดังตัวอย่างเช่น

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

โดย C เป็นค่าคงตัวจากการอินทิเกรต ในกรณีเช่นนี้ เราอาจใช้ ChatGPT หรือ DeepSeek โดยพิมพ์ลงไปว่า

Integrate $dx/(x^2+9)$.

ทั้ง ChatGPT และ DeepSeek จะแสดงวิธีทำบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

To evaluate the integral $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$, we use the standard formula:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

In our case, $a^2 = 9$ so $a = 3$. Thus,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

หรืออีกหนึ่งตัวอย่างที่มีความซับซ้อนมากขึ้นไปอีก ทั้ง ChatGPT และ DeepSeek สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้เช่นเดียวกัน ดังนี้

$$\int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{3} \ln(2)$$

ตัวอย่าง คณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ใน AI ยังช่วยแก้ปัญหาอื่น ๆ ที่บุคคลทั่วไปอาจใช้เวลาานกว่าจะได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เช่น หากต้องการแฟกเตอร์ (factor) ฟังก์ชัน

$$h = x^4 + 26x^3 - 212x^2 - 1578x + 5859$$

เราสามารถใส่ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทำให้ได้ ก่อให้เกิดผลลัพธ์

$$h = (x+7)(x-9)(x-3)(x+31)$$

เราอาจใช้ DeepSeek ด้วยการพิมพ์เป็นคำสั่งลงไปว่า

$$\text{Factor } x^4 + 26x^3 - 212x^2 - 1578x + 5859.$$

DeepSeek จะแสดงกระบวนการแฟกเตอร์นี้อย่างเป็นขั้นเป็นตอนค่อนข้างยาว ทั้งยังตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ให้อีกด้วย สุดท้ายสรุปได้ผลลัพธ์ ดังนี้

After systematically applying the Rational Root Theorem and synthetic division, I was able to factor the polynomial completely. The final factored form is:

$$h = (x-3)(x-9)(x+7)(x+31)$$

ตัวอย่าง วิชาแก้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นอีกวิชาหนึ่งที่เปรียบเสมือนยาขมสำหรับผู้เรียนจำนวนมากไม่น้อย เพราะต้องจดจำเทคนิคและกระบวนการจำเพาะเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป เช่น

$$\frac{dy}{dx} + y = 5$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งข้างต้นนี้ คือ

$$y(x) = Ce^{-x} + 5$$

โดย C เป็นค่าคงตัว ซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่กำหนดมาให้

ผลเฉลยข้างต้นนี้สามารถหาได้ง่ายโดยใช้ DeepSeek ด้วยการพิมพ์ว่า

Solve the differential equation: $dy/dx + y = 5$.

DeepSeek จะแสดงการแก้อย่างเป็นขั้นเป็นตอน และให้คำตอบของผลลัพธ์คือ

The general solution to the differential equation $\frac{dy}{dx} + y = 5$ is:

$$y(x) = Ce^{-x} + 5$$

หากสมการที่กำหนดมาให้มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

DeepSeek สามารถให้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองนี้ คือ

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

โดย C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัว ซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาจำเพาะที่กำหนดมาให้อีกเช่นกัน

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ สามารถพล็อตได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ช่วยทำให้ผู้ศึกษาเข้าใจในความหมายของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจากผลเฉลยเหล่านี้ เช่น หาก $C_1 = C_2 = 1$ แล้ว ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองข้างต้นนี้ก็คือ

$$y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$$

AI เช่น ChatGPT สามารถพล็อตกราฟนี้ได้โดยตรง โดยเพียงพิมพ์ลงไปว่า

Plot $y(x) = \exp(-x) + \exp(-3*x)$ for $0 < x < 2$.

AI จะสร้างพล็อตของ y ซึ่งแปรผันไปตาม x ดังแสดงในรูป อนึ่ง เราอาจให้ AI สร้างโค้ดเป็นภาษาใด ๆ เช่น Python ให้ เช่นในกรณีนี้ โค้ดที่ได้คือ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Define the function
def y(x):
    return np.exp(-x) + np.exp(-3 * x)
```

```

# Generate x values from 0 to 2 (exclusive) with small step
size
x = np.linspace(0.001, 2, 400) # Avoid x=0 to prevent divis
ion issues (though not needed here)

# Compute y values
y_values = y(x)

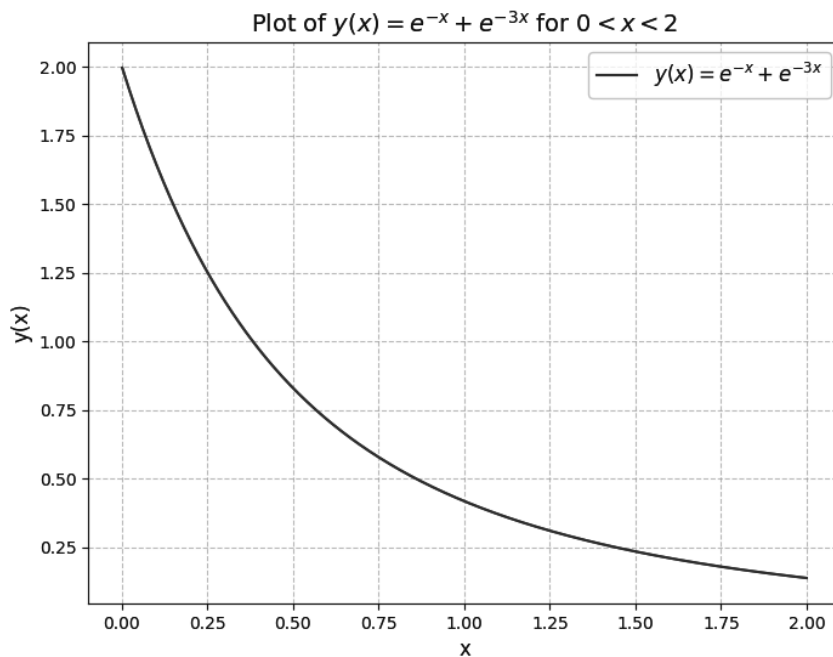
# Create the plot
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x, y_values, label=r'$y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$', co
lor='blue')

# Add labels and title
plt.xlabel('x', fontsize=12)
plt.ylabel('y(x)', fontsize=12)
plt.title('Plot of $y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$ for $0 < x < 2$
', fontsize=14)

# Add grid and legend
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)
plt.legend(fontsize=12)

# Show the plot
plt.show()

```



1.3 ข้อพึงระวังในการใช้ AI

การใช้ AI เพื่อแก้ปัญหาในวิชา Calculus และ Differential Equations มีประโยชน์มาก แต่ต้องระวังข้อผิดพลาดและข้อจำกัดบางประการ ดังนี้:

(ก) ความถูกต้องของคำตอบ (correctness)

- AI อาจให้คำตอบที่ผิดโดยเฉพาะกับโจทย์ที่ซับซ้อน หรือใส่คำถามที่ผิดพลาด
- ผู้ใช้ควรตรวจสอบคำตอบด้วยตัวเองหรือใช้หลายเครื่องมือเพื่อยืนยัน เช่น Wolfram Alpha และ Maxima เป็นต้น
- ผู้ใช้ต้องระวังการหาค่า Limit, Integral, Derivative ที่มีเงื่อนไขพิเศษ เช่น อินทิกรัลไม่แท้ (improper integral) ซึ่งมีขอบเขตของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ (infinity) หรือฟังก์ชันที่อินทิเกรตมีค่าลู่ออก (divergence) เป็นต้น

(ข) การแสดงวิธีทำ (step-by-step solutions)

- AI บางตัวแสดงเฉพาะคำตอบสุดท้าย โดยไม่แสดงขั้นตอน ทำให้เรียนรู้ไม่ได้
- เลือกใช้ AI ที่แสดงขั้นตอนการทำโดยละเอียด เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและเข้าใจแนวคิด

(ค) การตีความโจทย์ (problem interpretation)

- AI อาจเข้าใจโจทย์ผิดถ้าโจทย์คลุมเครือหรือใช้สัญลักษณ์ไม่มาตรฐาน
- พิมพ์โจทย์ให้ชัดเจน และตรวจสอบว่าคำถามตรงกับสิ่งที่ต้องการ

(ง) ข้อจำกัดทางคณิตศาสตร์ (mathematical limitations)

- AI อาจไม่สามารถแก้โจทย์ที่ต้องใช้ตรรกะบางอย่างที่เกิดขึ้นกับมนุษย์โดยธรรมชาติ
- ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการมีอยู่และความเป็นหนึ่งเดียว (existence and uniqueness) ในสมการเชิงอนุพันธ์ที่อาจถูกมองข้าม
- การคำนวณผลลัพธ์ในรูปแบบอนุกรม (series solutions), การแปลงแบบลาปลาซ (Laplace transform), การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) อาจเกิดข้อผิดพลาดหากปัญหามีความซับซ้อน

(จ) การตรวจสอบเงื่อนไข (checking assumptions)

- ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์, AI อาจไม่ได้ตรวจสอบเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) หรือเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ได้อย่างรัดกุม
- ผู้ใช้ควรตรวจสอบว่าผลลัพธ์ที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นหรือเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้

(ฉ) การพึ่งพา AI มากเกินไป (over-reliance)

- การใช้ AI แก้โจทย์อยู่ตลอดเวลาอาจทำให้ผู้ใช้ไม่เข้าใจแนวคิดที่แท้จริง
- ดังนั้นจึงควรใช้ AI เป็นเครื่องมือช่วยเรียนรู้ ไม่ใช่แทนการฝึกทำโจทย์เอง

(ช) ข้อผิดพลาดทางเทคนิค (technical errors)

- AI บางครั้งให้คำตอบที่ดูสมเหตุสมผล แต่ผิดทางคณิตศาสตร์
- ผู้ใช้จึงควรตรวจสอบผลลัพธ์ด้วยการคำนวณมือหรือเครื่องมืออื่น

(ซ) การประยุกต์ใช้ในโลกรจริง (real-world applications)

- โจทย์แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาในโลกรจริงจริงมีความซับซ้อนกว่าในตำรา AI อาจไม่สามารถประยุกต์บริบทจริงได้

(ณ) การอ้างอิงและแหล่งข้อมูล (references and sources)

- AI บางตัวไม่แสดงวิธีทำ ไม่ระบุที่มาของสูตรหรือทฤษฎีที่ใช้ ทำให้ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ยาก

(ญ) ดังนั้น ผู้ใช้ AI จึงควร:

- ใช้ AI เช่น Wolfram Alpha, ChatGPT แบบมี Plugins, Symbolab, Maxima เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง
- ฝึกทำโจทย์ด้วยตัวเองก่อน แล้วใช้ AI เพื่อตรวจคำตอบ
- ถามอาจารย์หรือเพื่อนเมื่อ AI ให้คำตอบที่ดูแล้วไม่น่าถูกต้อง กระบวนการเช่นนี้ควบคู่กับการพัฒนาความเข้าใจเอง จึงก่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด

1.4 บทสรุป

ในบทนี้ เราได้เรียนรู้ความสำคัญและเห็นประโยชน์ของ AI เช่น ChatGPT และ DeepSeek ที่สามารถช่วยแก้สมการทางคณิตศาสตร์ ช่วยลดความยากลำบากและเวลาที่ใช้ไปในการทำด้วยมือไปได้เป็นอย่างมาก อีกทั้งยังช่วยขจัดความผิดพลาดหากสมการคณิตศาสตร์นั้น ๆ มีความซับซ้อน และที่สำคัญเป็นอย่างยิ่งก็คือทำให้เรามีเวลาในการศึกษาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น เข้าใจในความหมายทางกายภาพด้วยการพล็อต และเห็นลักษณะของผลลัพธ์บนหน้าจอคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

AI เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์เป็นอย่างมาก แต่ในขณะเดียวกันอาจให้ผลลัพธ์ที่ไม่ถูกต้องได้ ผู้ใช้ AI ต้องตรวจสอบผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นว่ามีความถูกต้องอย่างแท้จริง การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จะทำให้ผู้ศึกษามีความเข้าใจในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้งมากขึ้น นั่นคือไม่เพียงได้มาซึ่งคำตอบแต่อย่างเดียว ในบทต่อ ๆ ไป เราจะเรียนรู้กระบวนการตรวจสอบผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจาก AI เพื่อให้มั่นใจในความถูกต้องของผลลัพธ์

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดในบทนี้เน้นความเข้าใจในลักษณะของฟังก์ชัน การขยาย การลดรูป รวมทั้งการพล็อตฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ ด้วยคำสั่งที่เหมาะสม AI ChatGPT และ DeepSeek จะนำเสนอขั้นตอนการทำอย่างละเอียดจนได้มาซึ่งผลลัพธ์ วิธีการหาผลลัพธ์อาจแตกต่างไปจากที่เคยเรียนมา จึงขอให้ศึกษาเพื่อก่อให้เกิดความรู้หลากหลายมากยิ่งขึ้น

1. จงสร้างคำสั่ง AI ChatGPT หรือ DeepSeek เพื่อหาค่าต่อไปนี้

(ก) $(-3)^4$

(ข) $16^{-3/4}$

(ค) $3(x+6)+4(2x-7)$

(ง) $(x-3)(4x+1)$

(จ) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

(ฉ) $3x^{3/2}-9x^{1/2}+6x^{-1/2}$

2. จงสร้างคำสั่ง AI ChatGPT หรือ DeepSeek เพื่อลดรูปหรือหาคำต่อไปนี้

$$(ก) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$$

$$(ข) \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \frac{x + 3}{2x + 1}$$

$$(ค) \frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{x + 1}{x - 2}$$

$$(ง) \frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$$

$$(จ) \left(\frac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}} \right)^{-2}$$

$$(ฉ) \frac{(4x^3y^3)(3xy^2)^2}{\sqrt{xy}}$$

3. จงหาผลคูณของฟังก์ชัน f และ g ของแต่ละข้อด้วย AI ChatGPT หรือ DeepSeek

$$(ก) f = x^2 - 2x \quad ; \quad g = (x + 1)^2$$

$$(ข) f = \sqrt{x - 1} \quad ; \quad g = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$(ค) f = \sin(x - x^2) \quad ; \quad g = \cos(x^2 + x)$$

$$(ง) f = e^{x-2} \quad ; \quad g = \ln(x + 3)$$

$$(จ) f = \sin(x^2 - x) \quad ; \quad g = \ln(x^2 + 2x)$$

$$(ฉ) f = e^x \quad ; \quad g = e^{-2x^2}$$

4. จงสร้างคำสั่งใน AI ChatGPT หรือ DeepSeek เพื่อลดรูปฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายที่สุด

$$(ก) f = 6x^4 + 28x^3 - 7x^2 + 14x - 5$$

$$(ข) g = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(e^x + \sin x)(3x - 7)$$

$$(ค) h = \frac{x \tan x - 3 \tan x - 21x^3 + 7x^4}{x^3 - 3x^2 + 6x - 18}$$

$$(ง) u = 3x + x^2 + 4\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + 2$$

$$(จ) v = \frac{\sin x \tan^2 x + 6 \sin x \tan x + 9 \sin x}{x \cos^2 x - x - 7 \cos^2 x + 7}$$

$$(ฉ) w = \frac{15x + 3xy^2 + 5y^2 + y^4}{x^2(\cos x \sin y - \cos y \sin x) - \cos x \sin y - \cos y \sin x}$$

5. จงสร้างคำสั่งใน AI ChatGPT หรือ DeepSeek เพื่อพิสูจน์ว่า

$$(ก) \quad x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$(ข) \quad \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$(ค) \quad \tan(4x) = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$$

$$(ง) \quad \cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

$$(จ) \quad (e^x + e^{-x})\tanh x = e^x - e^{-x}$$

6. จงสร้างคำสั่งใน AI ChatGPT หรือ DeepSeek เพื่อพิสูจน์ว่า

$$(ก) \quad \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$

$$(ข) \quad \tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

$$(ค) \quad \cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$

$$(ง) \quad \cosh(4x) = 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1$$

$$(จ) \quad \sinh^3 x = \frac{1}{4}\sinh(3x) - \frac{3}{4}\sinh x$$

7. จงใช้ AI ChatGPT หรือ DeepSeek เพื่อพล็อตฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยกำหนดขนาดและช่วงของการพล็อตให้เหมาะสม

$$(ก) \quad f = 3x^5 - 25x^3 + 60x \quad (ง) \quad u = \sin(\pi/x)$$

$$(ข) \quad g = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} \quad (จ) \quad v = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$$

$$(ค) \quad h = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$$

8. จงใช้ AI ChatGPT หรือ DeepSeek เพื่อพล็อตฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยกำหนดขนาดและช่วงของการพล็อตให้เหมาะสม

$$(ก) \quad f = x^3 - x + 1$$

$$(ข) \quad g = x^4 - 3x^2 + x$$

$$(ค) \quad h = 3x^5 - 25x^3 + 60x$$

9. จงพิมพ์คำสั่งใน AI ChatGPT หรือ DeepSeek ว่า “จงพล็อตฟังก์ชันอะไรก็ได้ที่ดูตระการตา” แล้วพิจารณาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น ผลลัพธ์ของฟังก์ชันที่ดูแปลกตานี้แสดงถึงประโยชน์ของการใช้ฟังก์ชันในงานทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี
10. จงพิมพ์คำสั่งใน AI ChatGPT หรือ DeepSeek ว่า “จงพล็อตฟังก์ชันอะไรก็ได้ที่เกิดการเปลี่ยนแปลงโดยกะทันหัน” แล้วพิจารณาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น ผลลัพธ์ของฟังก์ชันที่เกิดการเปลี่ยนแปลงโดยกะทันหันนี้มักเกิดจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic differential equation) ซึ่งเกิดขึ้นกับปัญหาจริงในทางปฏิบัติ เช่น คลื่นช็อก (shock wave) ของสภาวะอากาศหน้าเครื่องบินความเร็วเหนือเสียง หรือคลื่นช็อกที่เกิดจากการระเบิดของนิวเคลียร์
11. จงพิมพ์คำสั่งใน AI ChatGPT หรือ DeepSeek ว่า “จงพล็อตฟังก์ชันพื้นผิวที่สวยงามในสามมิติ” แล้วพิจารณาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น ผลลัพธ์ของฟังก์ชันที่เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปนี้มักเกิดจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอลลิปติก (elliptic differential equation) ซึ่งเกิดขึ้นกับปัญหาจริงในทางปฏิบัติ เช่น การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในไมโครชิพ (microchip) หรือการเปลี่ยนแปลงของความเค้น (stress) ในโครงสร้างหลังคาเป็นต้น

บทที่ 2

แคลคูลัส

2.1 บทนำ

แคลคูลัส (calculus) เป็นวิชาพื้นฐานที่นิสิตนักศึกษาสายวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจำเป็นต้องเรียน หัวใจของวิชานี้ประกอบด้วยสองส่วนหลัก คือการหาค่าอนุพันธ์ (differentiation) และการอินทิเกรต (integration) ซึ่งตั้งอยู่บนความเข้าใจของฟังก์ชันและการหาลิมิต (limit) อีกต่อหนึ่ง กระบวนการศึกษาวิชาแคลคูลัสเพื่อหาค่าอนุพันธ์และโดยเฉพาะอย่างยิ่งการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนทำให้วิชานี้กลายเป็นยาขมสำหรับนิสิตนักศึกษาส่วนใหญ่ เพราะต้องจำสูตรและขั้นตอนต่าง ๆ อย่างเหมาะสมจึงจะได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

ศักยภาพของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ใน AI สามารถให้ผลลัพธ์อย่างรวดเร็ว ในบทนี้เราจะมาศึกษากระบวนการหาผลลัพธ์ซึ่งเกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่สำคัญ ๆ ในแคลคูลัสก่อนใช้ AI เพื่อหาผลลัพธ์เดียวกันนั้น ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความตระหนักในการแก้ปัญหาแคลคูลัสที่สามารถทำได้โดยสะดวกด้วยการใช้ AI เชิงสัญลักษณ์ในปัจจุบัน

2.2 การหาค่าลิมิต

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a สามารถเขียนในรูปแบบของสมการได้คือ

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$f(x) = x^2$$

ดังนั้น

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$$

เราสามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนี้ได้ด้วยการใช้คำสั่งเสมือนคำพูดบน AI DeepSeek เช่น

Find limit of $L = x^2$ as x approaches a .

DeepSeek จะตอบกลับขึ้นมาบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ว่า

To find the limit of x^2 as x approaches a , we can evaluate the function at $x = a$ directly, since x^2 is a continuous function for all real numbers.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$$

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$g(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

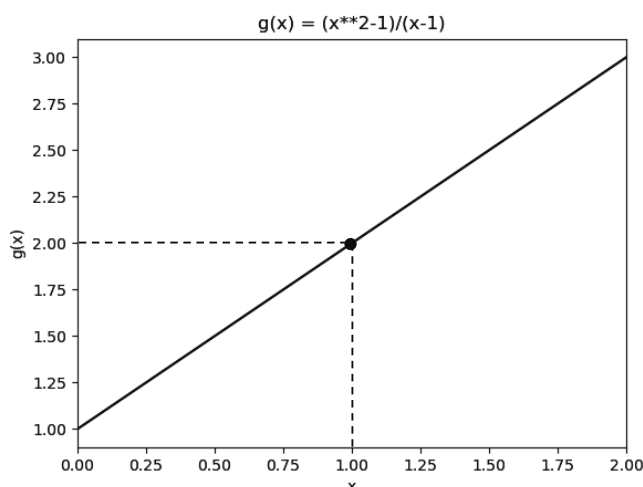
หากเราใช้วิธีง่าย ๆ แบบในตัวอย่างที่แล้ว

$$L = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้และไม่ถูกต้อง ยกตัวอย่างเช่น หาก $a = 1$ ดังนั้น

$$g(x) = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1}$$

แต่เมื่อเราพล็อตฟังก์ชัน $g(x)$ ดังแสดงในรูป เราจะพบว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 แล้ว ฟังก์ชัน g นี้มีค่าเข้าสู่ 2



เราสามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนี้ได้ด้วยการใช้คำสั่งบน DeepSeek โดยพิมพ์ลงไปว่า

Find limit of $g(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ as x approaches a .

DeepSeek จะตอบกลับบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ขึ้นมาว่า

To find the limit of the function $g(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ as x approaches a , we can proceed with the following steps:

Step 1: Direct Substitution (Check for Indeterminate Form)

First, substitute $x = a$ directly into the function:

$$g(a) = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0}$$

This results in the indeterminate form $0/0$, which means we cannot determine the limit directly and need to simplify the expression further.

Step 2: Simplify the Expression

Notice that the numerator $x^2 - a^2$ is a difference of squares, which can be factored as $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Substituting this back into the original function,

$$g(x) = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a}$$

For $x \neq a$, the $(x - a)$ terms cancel out, then,

$$g(x) = x + a$$

Step 3: Evaluate the simplified expression as x to a

Now, the simplified form $g(x) = x + a$ is continuous everywhere, including at $x = a$. Therefore, we can substitute $x = a$ directly,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = a + a = 2a$$

คำตอบที่ได้จาก DeepSeek นี้เหมือนกับที่เราทำในตอนต้น เรายังพบว่า DeepSeek มีแนวคิดในการหาคำตอบเช่นเดียวกับที่เราทำในตอนต้นของตัวอย่างนี้ ทำให้เรามั่นใจในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

ตัวอย่าง จงหาลำลิมิตของ

$$L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

หากเราแทน $x = 4$ โดยตรง เราจะได้ผลลัพธ์คือ $0/0$ คล้ายกับที่เกิดขึ้นในตัวอย่างที่แล้ว แนวคิดในการแก้ปัญหานี้คือนำค่าคอนจูเกต (conjugate) ของตัวเศษ $\sqrt{x} + 2$ คูณเข้าทั้งเศษและส่วนก่อนแทนค่าลิมิต ดังนี้

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(x - 4)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ในการทำงานเดียวกัน หากเราใช้ DeepSeek เราก็เพียงพิมพ์และได้ผลลัพธ์เดียวกันนี้เช่นกัน

Find limit of $L = (\text{sqrt}(x)-2)/(x-4)$ as x approaches 4.

To find the limit:

$$L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

we can proceed by rationalizing the numerator,

$$L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - (2)^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

Simplify the numerator and cancel the common factor of $(x-4)$ to obtain,

$$L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Now, substitute $x = 4$ into the simplified expression:

$$L = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่าง จงหาลำลิมิตของ

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$$

ในกรณีนี้ก็เช่นกัน หากเราพยายามแทน $x = 0$ โดยตรงลงในฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ เราจะได้ผลลัพธ์เป็น $0/0$ เทคนิคการหาผลลัพธ์ด้วยการแฟกเตอร์หรือการคูณเข้าทั้งเศษและส่วนด้วยค่าคอนจูเกตของตัวเศษดังเช่นตัวอย่างก่อนหน้านี้ไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ วิธีการเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้องคือการหาฟังก์ชันที่เหมาะสมมาคูณเข้าทั้งเศษและส่วน ดังนี้

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}\right)}{x} \cdot \frac{4(x+4)}{4(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (x+4)}{4x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{4x(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(x+4)} = \frac{-1}{4(0+4)} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

ซึ่งหากใช้ Deepseek เราพิมพ์ถามลงไปว่า

Find limit of $L = (1/(x+4)) - 1/4 / x$ as x approaches 0.

DeepSeek จะแสดงวิธีทำ ดังนี้

To find the limit of the expression:

$$L = \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$$

as x approaches 0, we can follow these steps:

Step 1: Combine the Fractions in the Numerator.

First, combine the two fractions in the numerator over a common denominator,

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4} = \frac{4 - (x+4)}{4(x+4)} = \frac{-x}{4(x+4)}$$

Step 2: Simplify the Expression.

Now, substitute the simplified numerator back into the original expression,

$$L = \frac{\frac{-x}{4(x+4)}}{x} = \frac{-x}{4(x+4)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{4(x+4)}$$

Step 3: Evaluate the limit as x approaches 0.

Finally, take the limit as x approaches 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(x+4)} = \frac{-1}{4(0+4)} = \frac{-1}{16}$$

ซึ่งได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกัน

เราจะเห็นได้ว่า AI ให้ผลลัพธ์ของการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้โดยสะดวก โดยเฉพาะหากฟังก์ชันนั้นมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตของ

$$L = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{4-x}{5-\sqrt{x^2-9}}$$

หากเราใช้ DeepSeek เราก็เพียงพิมพ์ลงไปว่า

Find limit of $L = (4-x)/(5-\sqrt{x^2-9})$ as x approaches -4.

ซึ่งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้ก็คือ

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4-x}{5-\sqrt{x^2-9}} = \frac{8}{5-\sqrt{7}} = 3.398112$$

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตของ

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x} - \sin x}$$

หากเราใช้ DeepSeek เราก็เพียงพิมพ์ลงไปว่า

Find limit of $L = (exp(x^3)-1)/(1-cos(sqrt(x-sin(x))))$ as x approaches 0.

DeepSeek จะแสดงวิธีการทำบนหน้าจอค่อนข้างยาวซึ่งขอละไว้ในที่นี้ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้คือ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x} - \sin x} = 12$$

ตัวอย่าง จงหาลำลิมิตของฟังก์ชันข้างล่างนี้เมื่อ x มีค่าเข้าสู่อินฟินิตี้ (Infinity)

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x + 4}{\sqrt{3x^2 - 5}}$$

หากเราใช้ DeepSeek เราก็เพียงพิมพ์ลงไปว่า

Find limit of $L = (9*x+4)/(\text{sqrt}(3*x^2-5))$ as x approaches Infinity.

DeepSeek แสดงวิธีการทำบนหน้าจอค่อนข้างยาวซึ่งขอละไว้ในที่นี้เช่นกัน ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้คือ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x + 4}{\sqrt{3x^2 - 5}} = 3\sqrt{3} = 5.196152$$

ตัวอย่าง หากฟังก์ชันที่ต้องการหาลำลิมิตนั้นประกอบด้วยสองตัวแปรคือ x และ y DeepSeek ก็ยังใช้หาค่าให้ได้โดยสะดวก เช่น

$$L = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2y + xy^3}{(x+y)^3}$$

ในกรณีนี้ เราอาจพิมพ์ลงไปว่า

Find limit of $L = (y*x^2+x*y^3)/(x+y)^3$ as x approaches -1 and y approaches 2.

DeepSeek จะแสดงวิธีการทำบนหน้าจอที่ค่อนข้างยาวจึงขอละไว้ในที่นี้ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้คือ

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2y + xy^3}{(x+y)^3} = -6$$

อนึ่ง เพื่อให้เกิดความเข้าใจในกระบวนการหาลำลิมิตโดยอ้อมแก่ ผู้ศึกษาควรศึกษาขั้นตอนการหาผลลัพธ์ที่ปรากฏขึ้นบนหน้าจอ ความเข้าใจในกระบวนการหาลำลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ เป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่น่าเสนอในหัวข้อต่อไป

2.3 การหาค่าอนุพันธ์

การหาค่าอนุพันธ์ (differentiation) เป็นหัวข้อหลักในการศึกษาวิชาแคลคูลัส เหตุผลของความจำเป็นในการศึกษาเรื่องนี้ก็เพราะว่าการวิเคราะห์งานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ส่วนใหญ่นั้นเริ่มมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ ความรู้พื้นฐานของการหาค่าอนุพันธ์จึงเป็นสิ่งจำเป็นและถูกบังคับให้เรียนในสถาบันต่าง ๆ อย่างไรก็ตาม การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันทั่วไปโดยเฉพาะฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนนั้นใช้เวลานานและเกิดความผิดพลาดได้ง่ายหากทำด้วยมือแบบที่เรียนกันในชั้นเรียน ศักยภาพของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ใน AI สามารถลดความยุ่งยากและจัดข้อผิดพลาดเหล่านั้นลงไปได้มาก

เราจะมาเริ่มจากคำนิยามของค่าอนุพันธ์ (derivative) ของ y เมื่อเทียบกับ x ก่อน ที่ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของ $y = f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x \end{aligned}$$

เมื่อเราให้ $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 0 = 2x$$

เราอาจใช้ DeepSeek เพื่อหาค่าอนุพันธ์ของ $y = f(x) = x^2$ นี้ได้โดยพิมพ์คำสั่งคล้ายคำพูดลงไปว่า

Find the derivative of $y = f(x) = x^2$ wrt x .

DeepSeek จะแสดงขั้นตอนการหาผลลัพธ์บนหน้าจอ ดังต่อไปนี้

To find the derivative of the function $y = f(x) = x^2$ with respect to x , we will use the power rule of differentiation. The power rule states that if $y = x^n$, then the derivative of y with respect to x is:

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Step-by-Step Solution:

Step 1: Identify the exponent n .

In the given function $y = x^2$, the exponent n is 2.

Step 2: Apply the power rule.

Multiply the exponent n by the variable x raised to the power of $n-1$:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1}$$

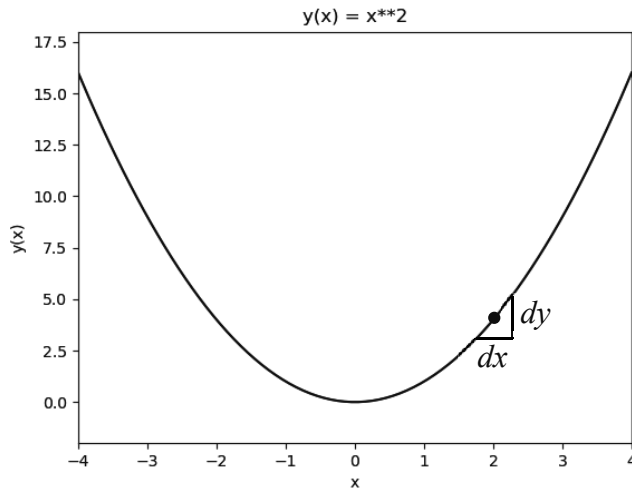
Step 3: Simplify the expression.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^1 = 2x$$

ลักษณะการกระจายของฟังก์ชัน $y = x^2$ ได้แสดงในรูปโดยใช้ชุดคำสั่ง Python ดังนี้

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-4, 4, 161)
y = x**2
plt.plot(x, y, 'k')
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y(x)')
plt.xlim(-4, 4); plt.ylim(-2, 18)
plt.title('y(x)=x**2')
plt.show()
```

ค่าอนุพันธ์ dy/dx แทนค่าความชัน (slope) ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ ยกตัวอย่างเช่น
ที่ $x = 2$ ค่าอนุพันธ์ $dy/dx = 2(2) = 4$ เป็นต้น



ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของ $y = f(x) = 2x - 3x^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 3(x + \Delta x)^2 - (2x - 3x^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 - 6x - 3\Delta x \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 - 6x - 3\Delta x = 2 - 6x - 3(0) = 2 - 6x\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์เมื่อฟังก์ชันที่กำหนดมาให้มีค่าคงที่ เช่น $y = f(x) = 5$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5 - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

นั่นคือค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่าคงที่นั้นเท่ากับศูนย์

เราอาจใช้ DeepSeek เพื่อหาค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่ในข้างต้นนี้ได้เช่นกัน โดยพิมพ์คำสั่งคล้ายคำพูดลงไปว่า

Find the derivative of $y = f(x) = 5$ wrt x .

DeepSeek จะแสดงขั้นตอนการหาผลลัพธ์บนหน้าจอ แล้วให้คำตอบคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5) = 0$$

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของ $y = f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ซึ่งหากพิมพ์คำสั่ง DeepSeek เราจะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกัน ดังนี้

Find the derivative of $y = f(x) = \text{sqrt}(x)$ wrt x for $x > 0$.

DeepSeek จะแสดงขั้นตอนการหาผลลัพธ์บนหน้าจอ แล้วให้คำตอบเช่นเดียวกัน คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของ $y = f(x) = \frac{x}{2x + 3}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x + \Delta x}{2(x + \Delta x) + 3} - \frac{x}{2x + 3}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x + \Delta x}{2(x + \Delta x) + 3} \cdot \frac{2x + 3}{2x + 3} - \frac{x}{2x + 3} \cdot \frac{2(x + \Delta x) + 3}{2(x + \Delta x) + 3}}{\Delta x} \end{aligned}$$

ซึ่งหลังจากทำการบวก ลบ คูณ หาร สักครู่นึงแล้วจะได้

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3}{(2x + 2\Delta x + 3)(2x + 3)} = \frac{3}{(2x + 0 + 3)(2x + 3)}$$

นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(2x + 3)^2}$$

เราสามารถหาผลลัพธ์เดียวกันนี้ได้ง่ายโดยพิมพ์ลงใน DeepSeek ว่า

Find the derivative of $y = f(x) = x/(2x+3)$ wrt x .

DeepSeek จะแสดงขั้นตอนการหาผลลัพท์บนหน้าจอ โดยอาจใช้ Quotient Rule ดังนี้

The Quotient Rule states that if you have a function $y = \frac{u}{v}$, where both u and v are functions of x , then the derivative of y with respect to x is,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ซึ่งสุดท้ายนำมาสู่ผลลัพธ์เดียวกัน คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(2x+3)^2}$$

อนึ่ง ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในงานทางปฏิบัติอาจมีความซับซ้อนมาก ทำให้การหาค่าอนุพันธ์ด้วยมือนั้นใช้เวลานานและเกิดความผิดพลาดได้ง่าย เราสามารถใช้คำสั่งใน DeepSeek หาค่าอนุพันธ์เชิงสัญลักษณ์ได้โดยสะดวกดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์เชิงสัญลักษณ์ของ

$$y = f(x) = x^4 - 8x^3 + 12x - 5$$

แล้วคำนวณค่าอนุพันธ์ที่ $x = -2, 0$ และ 2

ในกรณีนี้ เราอาจพิมพ์ลงใน DeepSeek ว่า

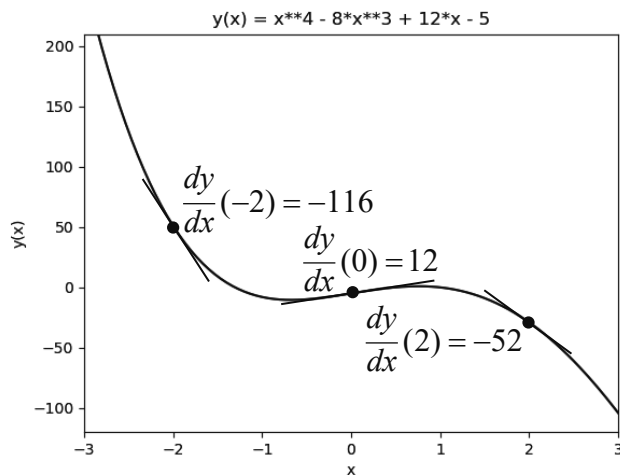
Find the derivative of $y = f(x) = x^4 - 8x^3 + 12x - 5$ wrt x . Then determine their values at $x = -2, 0$ and 2 .

DeepSeek จะแสดงกระบวนการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้อย่างเป็นขั้นเป็นตอน พร้อมค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ $x = -2, 0$ and 2 แล้วสรุปผลลัพท์บนหน้าจอให้ ดังนี้

Summary of Results:

- Derivative: $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 12$
- At $x = -2$: $f'(-2) = -116$
- At $x = 0$: $f'(0) = 12$
- At $x = 2$: $f'(2) = -52$

ค่าอนุพันธ์ที่คำนวณได้ตามตำแหน่ง x ต่าง ๆ เหล่านี้ คือ ค่าความชันดังแสดงในรูป



ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = [x + (x + \sin^2 x)^3]^4$$

เราสามารถพิมพ์คำสั่งลงใน DeepSeek เพื่อหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y ได้ ดังนี้

Find the derivative of $y = f(x) = (x + (x + (\sin(x))^2)^3)^4$ wrt x .

DeepSeek แสดงกระบวนการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y โดยละเอียดอย่างเป็นขั้นเป็นตอน (ซึ่งขอละรายละเอียดที่ปรากฏขึ้นบนหน้าจอไว้ ณ ที่นี้) ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น คือ

$$\frac{dy}{dx} = 4 \left(x + (x + \sin^2(x))^3 \right)^3 \left[1 + 3(x + \sin^2(x))^2 (1 + 2 \sin(x) \cos(x)) \right]$$

ความเข้าใจในกระบวนการหาค่าอนุพันธ์ที่ค่อนข้างซับซ้อนเช่นนี้ ผู้ศึกษาความทำความเข้าใจในขั้นตอนการหาผลลัพธ์ที่ปรากฏขึ้นบนหน้าจอ กระบวนการเดียวกันนี้ยังสามารถใช้หาค่าอนุพันธ์อันดับ n ใด ๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ได้ ดังตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x + 5$$

เราสามารถพิมพ์คำสั่งลงใน DeepSeek เพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน y ได้ ดังนี้