รวมแนวข้อสอบ

นักเรียนนายสิบทหารบก
นายทหารชั้นประทวน

โครงการ One Stop Service

ประจำปีงบประมาณ 2569
กรมยุทธศึกษาทหารบก (ยศ.ทบ)

ประกอบด้วย

- คณิตศาสตร์
- วิทยาศาสตร์
- ภาษาอังกฤษ
- ภาษาไทย
- ความรู้เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์
- ความรู้ทั่วไป (สังคมศึกษา ศีลธรรม ศาสตร์พระราชา จิตอาสา)

ข้อสอบมากกว่า 900 ข้อ

299.-

รวมแนวข้อสอบ

นักเรียนนายสิบทหารบก

นายทหารประทวน

กรมยุทธศึกษาทหารบก

ราคา 299.-

คำนำ

ชุดรวมแนวข้อสอบสำหรับการสอบนักเรียนนายสิบทหารบก นายทหารประทวน โดยทางสถาบัน THE BEST CENTER และฝ่ายวิชาการสถาบัน ได้เรียบเรียงขึ้น เพื่อให้ผู้สมัครสอบใช้สำหรับเตรียมตัวสอบในการสอบแข่งขันฯ ในครั้งนี้

ทางสถาบัน THE BEST CENTER ได้เล็งเห็นความสำคัญจึงได้จัดทำหนังสือเล่มนี้ขึ้นมา เป็นการทั้งเจาะข้อสอบทุกเรื่องที่กำหนดในการสอบพร้อมคำอธิบาย โดยได้รวบรวมขึ้นจากประสบการณ์ตรงของคณะทีมของสถาบัน THE BEST CENTER ที่มีประสบการณ์ มาจัดทำเป็นหนังสือชุดนี้ขึ้น เพื่อให้ผู้ที่สอบได้เตรียมตัวอ่านล่วงหน้า มีความพร้อมในการทำข้อสอบ

ท้ายนี้ คณะผู้จัดทำขอขอบคุณทางสถาบัน THE BEST CENTER ที่ได้ให้การสนับสนุนและมีส่วนร่วมในการจัดทำต้นฉบับนี้ ทำให้หนังสือเล่มนี้สามารถสำเร็จขึ้นมาเป็นเล่มได้ พร้อมกันนี้คณะผู้จัดทำขอน้อมรับข้อบกพร่องใด ๆ อันเกิดขึ้นและยินดีรับฟังความคิดเห็นจากทุก ๆ ท่าน เพื่อที่จะนำมาปรับปรุงแก้ไขให้ดียิ่งขึ้น

ขอให้โชคดีในการสอบทุกท่าน

ฝ่ายวิชาการสถาบัน

สถาบัน The Best Center

www.thebestcenter.com

สารบัญ

....

รวมแนวข้อสอบคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1

แนวข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์โรงเรียนนายสิบทหารบก

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. ถ้า $P(A)$ มีจำนวนสมาชิก 8 ตัว แล้ว $n(A) = 3$
2. ถ้า $A = \varnothing$ แล้ว $P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
3. ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ แล้ว $(A \cap B) \subset (A - B)$
4. ถ้า $A \cap B = B \cap C$ แล้ว $B \cap C \subset A$

2. ถ้ากำหนดให้ A, B, C เป็นเซต และมีจำนวนสมาชิกดังต่อไปนี้

$n(A \cup B) = 92$, $n(A \cup C) = 79$, $n(B \cup C) = 75$, $n(A \cap B \cap C) = 32$

$n[(A \cap B) - C] = 18$, $n[(A \cap C) - B] = 6$, $n[(B \cap C) - A] = 2$

แล้ว $n(A \cup B \cup C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 93
2. 94
3. 95
4. 96

3. จากข้อมูลเกี่ยวกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง พบว่า

35% ของนักเรียนกลุ่มนี้เป็นนักเรียนหญิง

55% ของนักเรียนกลุ่มนี้มีบ้านอยู่ในกรุงเทพมหานคร

25% ของนักเรียนกลุ่มนี้เป็นนักเรียนชายและมีบ้านอยู่ต่างจังหวัด

ถ้าโรงเรียนแห่งนี้มีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 อยู่ 1,200 คน จะมีนักเรียนหญิงที่มีบ้านอยู่ต่างจังหวัดกี่คน

1. 210 คน
2. 240 คน
3. 250 คน
4. 280 คน

4. ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $1 + \frac{4}{7} + \frac{9}{49} + \frac{16}{343} + \ldots + \frac{n^2}{7^{n-1}} + \ldots$ เป็นเท่าไร

1. $\frac{518}{344}$
2. $\frac{481}{271}$
3. $\frac{53}{34}$
4. $\frac{49}{27}$

5. ถ้า $A = \{x \mid \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ A มีกี่ตัว

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

6. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. **เหตุ** 1. $p \to q$

2. $r \to s$

3. $p \vee r$

ผล $q \vee s$

ข. **เหตุ** $(p \to q) \vee (r \to s)$

ผล $(p \to s) \vee (r \to q)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. และ ข. สมเหตุสมผล
2. ก. และ ข. ไม่สมเหตุสมผล
3. ก. ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข. สมเหตุสมผล
4. ก. สมเหตุสมผล แต่ ข. ไม่สมเหตุสมผล

7. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $[(p \wedge \sim r) \wedge q] \to \sim(p \wedge q)$ เป็นเท็จ แล้ว $(p \vee q) \to r$ เป็นจริง

ข. ถ้า $q \vee \sim r$ เป็นเท็จ แล้ว $[p \vee (q \to r)] \to \sim q$ เป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ผิด
4. ก. ผิด และ ข. ถูก

8. มีคำตอบสำหรับ a, b, c ทั้งหมด 6 ชุด ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 15 \\ ab + bc + ca &= 66 \\ abc &= 80 \end{aligned}$$

ถ้า $a > b > c$ แล้ว $a - b - c$ เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 8
2. 5
3. 2
4. 1

9. ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ถ้า $A^2(\text{adj}(A))X = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ แล้ว x คือค่าของจำนวนจริงในข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. -1
3. 1
4. 2

10. ให้ $r = \{(x, y) \mid \sqrt{y} = 3\sqrt{x} - x\}$ แล้วเรนจ์ของ r อยู่ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\left[0, \frac{1}{9}\right]$
2. $\left[0, \frac{9}{4}\right]$
3. $\left[0, \frac{27}{16}\right]$
4. $\left[0, \frac{81}{16}\right]$

11. คำตอบของอสมการ $\frac{(x+1)(x-5)}{x-1} < 0$ เป็นสับเซตของคำตอบในอสมการใดต่อไปนี้

1. $x^2 - 6x + 5 > 0$
2. $|2x - 1| > 1$
3. $1 < |x| < 2$
4. $x < -1$ หรือ $1 < x < 4$

12. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ และ $g(x) = f^{-1}(f^{-1}(x))$ แล้ว a ที่ทำให้ $g(a) = -1$ เท่ากับข้อใด

1. 1
2. 3
3. 6
4. 9

13. กำหนดให้ $f : R \rightarrow R^-$ และ $g : R \rightarrow R$ โดยที่ $(gof)(x) = 3[f(x)]^2 - 4f(x) - 7$ และ $g(x) = 2x^2 - 3x - 1$ แล้วค่าของ $(g.f)(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 4
3. 6
4. 9

14. กำหนดสมการวงรี คือ $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$ ถ้าพาราโบลา 2 รูปมีจุดยอดอยู่ที่โฟกัสทั้งสองของวงรี และตัดกันที่จุดปลายทั้งสองของแกนโทของวงรี แล้วพาราโบลาทั้งสองจะมีความกว้าง ณ โฟกัส (latus rectum) เท่ากับข้อใด

1. $\frac{28}{3}$
2. $\frac{20}{3}$
3. $\frac{16}{3}$
4. $\frac{10}{3}$

15. ถ้า m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรงจากจุด (0, 1) ไปสัมผัสวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$ แล้วค่าของ m_1m_2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 1
3. -1
4. -2

16. ค่าของ $\cot 10^\circ \tan 50^\circ - \cot 10^\circ \tan 40^\circ$ เท่ากับข้อใด

1. -1
2. 1
3. 2
4. 3

17. ถ้า a, b, c เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่ $b+c : c+a : a+b = 4 : 5 : 6$ แล้วมุม A มีขนาดเท่าไร

1. 30°
2. 45°
3. 60°
4. 120°

18. จากฐานตึกมุมเงยของเสาไฟฟ้าต้นหนึ่งเป็น 60° และจากยอดตึกนั้นซึ่งสูง 60 ฟุต มุมเงยของเสาไฟฟ้านั้นเป็น 30° ความสูงของเสาไฟฟ้าเป็นเท่าไร

1. 90 ฟุต
2. $90\sqrt{3}$ ฟุต
3. 120 ฟุต
4. $120\sqrt{3}$ ฟุต

19. กำหนดให้ $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $0 < x < y$ แล้วค่าของ $2y - 4x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 1
3. 2
4. 2.5

20. ถ้า $x^{\log_{5\sqrt{5}}125} - \log\sqrt{28} = \log\sqrt{325} - \log_{100}91$ แล้วค่าของ $3x^4$ เท่ากับข้อใด

1. 3
2. 4
3. 5
4. 6

21. ค่าของ $5(41) + 8(39) + 11(37) + ... + 32(23)$ เท่ากับข้อใด

1. 4525
2. 5425
3. 5225
4. 5525

22. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|z| = 3$ แล้วค่าสูงสุดของ $|z - 3\bar{z}|$ เท่ากับข้อใด

1. 10
2. 12
3. 14
4. 18

23. ถ้า $P(x) = px^3 + 11x^2 + 2px - 5$ เมื่อหาร P(x) ด้วย $x - 2$ จะมีเศษเป็น 15 และถ้ารากของสมการ $P(x) = 0$ คือ a, b และ c แล้วค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับข้อใด

1. 25.25
2. 26.25
3. 28.25
4. 30.25

24. ถ้า $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมบัติ $|\vec{u}| = |\vec{w}|$ และ $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} + \vec{w}|$ และมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แล้วมุมระหว่าง $\vec{v}$ กับ $\vec{w}$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{7\pi}{5}$
2. $\frac{6\pi}{5}$
3. $\frac{4\pi}{5}$
4. $\frac{\pi}{5}$

25. กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{เมื่อ } x \le 3 \\ -4 - x^2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f ต่อเนื่องที่ $x = 3$
2. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ เพราะ $\lim_{x \to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้
3. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ เพราะ $f(3)$ หาค่าไม่ได้
4. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ เพราะ $\lim_{x \to 3} f(x) \ne f(3)$

26. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $x^2g(x) - xf(x) + 4g(x) - 2f(x) = 0$ แล้วค่าของ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. 2
3. $-\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{2}$

27. ถ้าวัตถุชิ้นเคลื่อนที่ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใดๆ เป็น $24t^2$ เมตรต่อ(วินาที)^2 และขณะเวลาเป็น t เท่ากับ 1 วินาที วัตถุมีความเร็ว 16 เมตรต่อวินาที และเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 8 เมตร อยากทราบว่าเมื่อเวลา $t = 2$ วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 เมตร
2. 18 เมตร
3. 32 เมตร
4. 46 เมตร

28. ข้อมูลชุดหนึ่งมีทั้งหมด 5 จำนวน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 30.8 มัธยฐานเท่ากับ 27 ฐานนิยมเท่ากับ 25 และค่าเฉลี่ยเรขาคณิตเท่ากับ 30 ค่าพิสัยของข้อมูลชุดนี้ตรงกับข้อใด

1. 20
2. 20
3. 22
4. 23

29. ชาย 4 คน หญิง 4 คน ซึ่งนายหนึ่งและนายทวนรวมอยู่ด้วย จัดคนทั้งหมดนั่งเก้าอี้ 8 ตัว เรียงเป็นแถวยาว โดยที่นายหนึ่งและนายทวนนั่งติดกัน และนายหนึ่งไม่นั่งติดกับผู้หญิง จัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

1. 1,440 วิธี
2. 2,880 วิธี
3. 3,640 วิธี
4. 4,320 วิธี

30. ในการจัดคน 8 คน เข้าพักในห้อง 2 ห้อง ความน่าจะเป็นที่ในแต่ละห้องจะมีคนเข้าพักอย่างน้อย 3 คน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{99}{128}$
2. $\frac{97}{128}$
3. $\frac{95}{128}$
4. $\frac{91}{128}$

เฉลยแนวข้อสอบคณิตศาสตร์นายสิบทหารบก

1. **3**	2. **2**	3. **2**	4. **1**	5. **1**
6. **1**	7. **3**	8. **4**	9. **3**	10. **4**
11. **2**	12. **2**	13. **2**	14. **3**	15. **3**
16. **3**	17. **4**	18. **1**	19. **2**	20. **1**
21. **2**	22. **2**	23. **2**	24. **3**	25. **1**
26. **4**	27. **4**	28. **1**	29. **4**	30. **4**

เฉลยแนวข้อสอบคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1

1. ตอบ 3

แนวคิด

ข้อ 1. ถ้า P(A) มีจำนวนสมาชิก 8 ตัว แล้ว n(A) = 3 **ถูก**

เพราะว่า ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้วจำนวนสมาชิกของ P(A) เท่ากับ 2^n ตัว

ดังนั้น $n(P(A)) = 2^3 = 8$ ตัว

ข้อ 2. ถ้า $A = \varnothing$ แล้ว $P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ **ถูก**

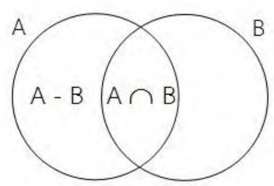
เพราะว่า $A = \varnothing$ ดังนั้น $P(A) = \{\varnothing\}$

และ $P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

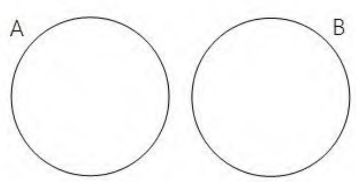
ข้อ 3. ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ แล้ว $(A \cap B) \subset (A - B)$ **ผิด**

เพราะว่า $(A \cap B) \cap (A - B) = \varnothing$

ดังนั้น $(A \cap B) \not\subset (A - B)$



$(A \cap B) \cap (A - B) = \varnothing$



$(A \cap B) \cap (A - B) = \varnothing \cap A = \varnothing$

ข้อ 4. ถ้า $A \cap B = B \cap C$ แล้ว $B \cap C \subset A$ **ถูก**

เพราะว่า $A \cap B \subset A$

และ $A \cap B = B \cap C$

ดังนั้น $B \cap C \subset A$

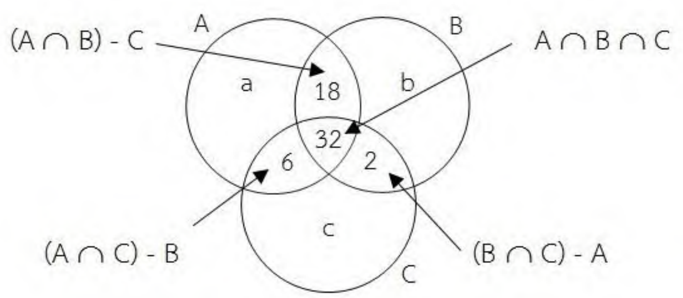
2. ตอบ 2

แนวคิด

กำหนดให้ $n(A \cup B) = 92$, $n(A \cup C) = 79$, $n(B \cup C) = 75$, $n(A \cap B \cap C) = 32$

$n[(A \cap B) - C] = 18$, $n[(A \cap C) - B] = 6$, $n[(B \cap C) - A] = 2$

จากข้อมูลที่กำหนดให้ เขียนแผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์ ประกอบได้ดังนี้



ให้ $n(A \cup B \cup C) = x$

เนื่องจาก $n(A \cup B) = 92$ จะได้ว่า

$$a = n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B) = x - 92 \qquad \text{----(1)}$$

เนื่องจาก $n(A \cup C) = 79$ จะได้ว่า

$$b = n(A \cup B \cup C) - n(A \cup C) = x - 79 \qquad \text{----(2)}$$

เนื่องจาก $n(B \cup C) = 75$ จะได้ว่า

$$a = n(A \cup B \cup C) - n(B \cup C) = x - 75 \qquad \text{----(3)}$$

นำสมการ (1) + (2) + (3) จะได้

$$a + b + c = 3x - 246$$

พิจารณาจากรูป จะได้ว่า

$$n(A \cup B \cup C) = a + b + c + 18 + 6 + 2 + 32$$

$$n(A \cup B \cup C) = (a + b + c) + 58$$

แทนค่า

$$x = (3x - 246) + 58$$

$$x = 3x - 188$$

$$2x = 188$$

$$x = \frac{188}{2} = 94$$

$\therefore$ $n(A \cup B \cup C)$ เท่ากับ 94

3. ตอบ 2

แนวคิด

กำหนดให้ 35% ของนักเรียนกลุ่มนี้เป็นนักเรียนหญิง

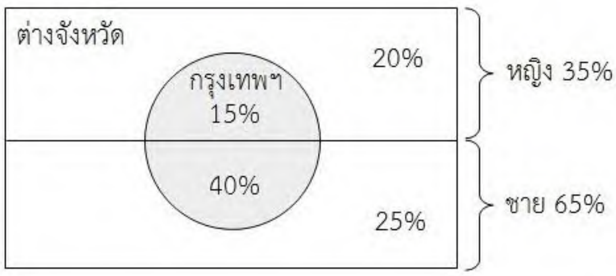
55% ของนักเรียนกลุ่มนี้มีบ้านอยู่ในกรุงเทพมหานคร

25% ของนักเรียนกลุ่มนี้เป็นนักเรียนชายและมีบ้านอยู่ต่างจังหวัด

โรงเรียนแห่งนี้มีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 อยู่ 1,200 คน

ต้องการหา จำนวนนักเรียนหญิงที่มีบ้านอยู่ต่างจังหวัด

จากข้อมูลที่กำหนดให้วาดแผนภาพได้ดังนี้



เพราะว่า จำนวนนักเรียนหญิงเท่ากับ 35%

จะได้ว่า จำนวนนักเรียนชายเท่ากับ 100% - 35% = 65%

เพราะว่า นักเรียนชายและมีบ้านอยู่ต่างจังหวัดเท่ากับ 25%

จะได้ว่า นักเรียนชายและมีบ้านอยู่กรุงเทพฯ เท่ากับ 65% - 25% = 40%

เพราะว่า นักเรียนกลุ่มนี้มีบ้านอยู่ในกรุงเทพฯ เท่ากับ 55%

จะได้ว่า นักเรียนหญิงและมีบ้านอยู่กรุงเทพฯ เท่ากับ 55% - 40% = 15%

เพราะว่า จำนวนนักเรียนหญิงเท่ากับ 35%

จะได้ว่า นักเรียนหญิงและมีบ้านอยู่ต่างจังหวัดเท่ากับ 35% - 15% = 20%

กำหนดให้ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 แห่งนี้มี 1,200 คน

ดังนั้น นักเรียนหญิงและมีบ้านอยู่ต่างจังหวัด $= \frac{20}{100} \times 1,200$

$= 240$ คน

$\therefore$ จะมีนักเรียนหญิงที่มีบ้านอยู่ต่างจังหวัดเท่ากับ 240 คน

4. ตอบ 4

แนวคิด

อนุกรมเรขาคณิต : $S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$ เมื่อ $|r| < 1$

กำหนดให้ อนุกรมอนันต์ $1 + \frac{4}{7} + \frac{9}{49} + \frac{16}{343} + \ldots + \frac{n^2}{7^{n-1}} + \ldots$

ให้ $$S_\infty = 1 + \frac{4}{7} + \frac{9}{49} + \frac{16}{343} + \ldots + \frac{n^2}{7^{n-1}} + \ldots \qquad \text{-----(1)}$$

นำ $\frac{1}{7} \times (1)$ $$\frac{1}{7} S_\infty = \frac{1}{7} + \frac{4}{49} + \frac{9}{243} + \ldots + \frac{n^2}{7^{n-1}} + \ldots \qquad \text{-----(2)}$$

นำ (1) - (2) $$(1 - \frac{1}{7})S_\infty = 1 + (\frac{4}{7} - \frac{1}{7}) + (\frac{9}{49} - \frac{4}{49}) + (\frac{16}{343} - \frac{9}{243}) + \ldots$$

$$\frac{6}{7} S_\infty = 1 + \frac{3}{7} + \frac{5}{49} + \frac{7}{343} + \ldots \qquad \text{-----(3)}$$

นำ $\frac{1}{7}$ x (3) $\frac{6}{49}S_\infty = \frac{1}{7} + \frac{3}{49} + \frac{5}{243} + \ldots$ -----(4)

นำ (3) - (4) $(\frac{6}{7} - \frac{6}{49})S_\infty = 1 + (\frac{3}{7} - \frac{1}{7}) + (\frac{5}{49} - \frac{3}{49}) + (\frac{7}{343} - \frac{5}{243}) + \ldots$

$$\frac{36}{49}S_\infty = 1 + \frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \frac{2}{343} + \ldots$$

$$\frac{36}{49}S_\infty = 1 + 2(\frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} + \ldots)$$

$$= 1 + 2\left(\frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}\right)$$

$$= 1 + 2\left(\frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{7}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

ดังนั้น $S_\infty = \frac{49}{36} \times \frac{4}{3} = \frac{49}{27}$

$\therefore$ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $1 + \frac{4}{7} + \frac{9}{49} + \frac{16}{343} + \ldots + \frac{n^2}{7^{n-1}} + \ldots$ เป็น $\frac{49}{27}$

5. ตอบ 1

แนวคิด

กำหนดให้ $A = \{x \mid \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1\}$

พิจารณา $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$ โดยที่ $x - 1 \geq 0$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง $1 - \sqrt{x^4 - x^2} = (x - 1)^2$

$$1 - \sqrt{x^2(x^2 - 1)} = x^2 - 2x + 1$$

$$-|x|\sqrt{(x^2 - 1)} = x^2 - 2x \qquad (\sqrt{x^2} = |x|)$$

เนื่องจาก $x - 1 \geq 0$ จะได้ $x \geq 1$ ดังนั้น $|x| = x$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง $(-x\sqrt{(x^2 - 1)})^2 = (x^2 - 2x)^2$

$$x^2(x^2 - 1) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$4x^3 - 5x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 5) = 0$$

$$x = 0, \frac{5}{4}$$

เนื่องจาก $x \geq 1$ ดังนั้น $x = \frac{5}{4}$

$\therefore$ จำนวนสมาชิกของ A มี 1 ตัว

6. ตอบ 1

แนวคิด **ก.** เหตุ 1. $p \to q$

2. $r \to s$

3. $p \vee r$

ผล $q \vee s$

ให้เหตุทุกข้อมีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าผลเป็นจริงสรุปว่าการอ้างสมเหตุสมผล

สมมติให้ ผล $q \vee s$ เป็นเท็จ จะได้ว่า $q \equiv F$ และ $s \equiv F$

เนื่องจาก $p \to q$ เป็นจริง แต่ $q \equiv F$ จะได้ว่า $p \equiv F$

เนื่องจาก $r \to s$ เป็นจริง แต่ $s \equiv F$ จะได้ว่า $r \equiv F$

เนื่องจาก $p \vee r$ เป็นจริง แทนค่า $p \equiv F$ และ $r \equiv F$

จะได้ว่า $p \vee r \equiv F \vee F \equiv F$ ซึ่งขัดแย้งกับ $p \vee r$ ต้องเป็นจริง

แสดงว่า ผล $q \vee s$ เป็นจริง

$\therefore$ **ข้อ ก. การอ้างเหตุผลสมเหตุสมผล**

ข. เหตุ $(p \to q) \vee (r \to s)$

ผล $(p \to s) \vee (r \to q)$

$$\boxed{p \to q \equiv {\sim}p \vee q}$$

พิจารณา $(p \to q) \vee (r \to s) \equiv ({\sim}p \vee q) \vee ({\sim}r \vee s)$

$\equiv ({\sim}p \vee s) \vee ({\sim}r \vee q)$ (จัดกลุ่มใหม่)

$\equiv (p \to s) \vee (r \to q)$

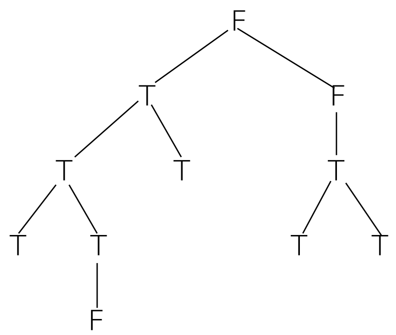
$\therefore$ **ข้อ ข. การอ้างเหตุผลสมเหตุสมผล**

7. ตอบ 3

แนวคิด

ข้อ ก. ถ้า $[(p \wedge {\sim}r) \wedge q] \to {\sim}(p \wedge q)$ เป็นเท็จ แล้ว $(p \vee q) \to r$ เป็นจริง **ผิด**

$[(p \wedge {\sim}r) \wedge q] \to {\sim}(p \wedge q)$



จะได้ว่า p เป็นจริง , q เป็นจริง และ r เป็นเท็จ

พิจารณา $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (T \vee T) \rightarrow F$

$\equiv T \rightarrow F$

$\equiv F$

ดังนั้น $(p \vee q) \rightarrow r$ เป็นเท็จ

ข้อ ข. ถ้า $q \vee \sim r$ เป็นเท็จ แล้ว $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow \sim q$ เป็นเท็จ **ผิด**

เนื่องจาก $q \vee \sim r$ เป็นเท็จ จะได้ว่า q เป็นเท็จ และ $\sim r$ เป็นเท็จ ดังนั้น r เป็นจริง

พิจารณา $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow \sim q \equiv [p \vee (F \rightarrow T)] \rightarrow \sim F$

$\equiv [p \vee T] \rightarrow T$

$\equiv T \rightarrow T$

$\equiv T$

ดังนั้น $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow \sim q$ เป็นจริง

8. ตอบ 4

แนวคิด

กำหนดให้ a, b, c เป็นคำตอบซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$a + b + c = 15 \qquad \text{-----(1)}$$

$$ab + bc + ca = 66 \qquad \text{-----(2)}$$

$$abc = 80 \qquad \text{-----(3)}$$

โดยที่ $a > b > c$

ต้องการหา ค่าของ $a - b - c$

เนื่องจาก a, b, c เป็นคำตอบของสมการพหุนามดีกรี 3 จะได้ว่า

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0 \qquad \text{-----(4)}$$

แทนค่า (1), (2), (3) ในสมการ (4) จะได้

$$x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$$

ให้ $P(x) = x^3 - 15x^2 + 66x - 80$

พิจารณาที่ $x = 2$: $P(2) = (2)^3 - 15(2)^2 + 66(2) - 80$

$= 8 - 60 + 132 - 80$

$= 0$

นั่นคือ $x = 2$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $P(x) = 0$

แยกตัวประกอบโดยวิธีการหารสังเคราะห์ ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -15 & 66 & -80 \\ & & 2 & -26 & 80 \\ \hline x - 2 & \underbrace{1 \quad -13 \quad 40}_{x^2 - 13x + 40} & & & 0 \leftarrow \text{เศษ} \end{array}$$

จะได้ $$(x - 2)(x^2 - 13x + 40) = 0$$
$$(x - 2)(x - 5)(x - 8) = 0$$
$$x = 2,\ 5,\ 8$$

กำหนดให้ $a > b > c$ นั่นคือ $a = 8,\ b = 5,\ c = 2$

ดังนั้น $a - b - c = 8 - 5 - 2 = 1$

$\therefore$ ค่าของ $a - b - c$ เท่ากับ 1

9. ตอบ 3

แนวคิด

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ถ้า $A^2(\mathrm{adj}(A))X = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ต้องการหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

หาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A

2 -1 0 (เครื่องหมายลบ)

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix}$$

0 -4 0 (เครื่องหมายบวก)

$$= 2 - 1 + 0 + 0 - 4 + 0$$
$$= -3$$

จาก $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

จะได้ $$\mathrm{adj}(A) = A^{-1}\det(A)$$

พิจารณา $$A^2(\mathrm{adj}(A))X = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2(A^{-1}\det(A))X = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A(AA^{-1})(-3)X = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$-3AX = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AX = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ -1 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ -1 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

จากกฎของคราเมอร์ (Cramer's rule) : $x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$

$$\begin{matrix} & & & & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \\ \det(A) = & \left|\begin{matrix} -\frac{8}{3} & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 & 0 \end{matrix}\right. & & \left|\begin{matrix} -\frac{8}{3} & 2 \\ -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 \end{matrix}\right. & & & \\ & & & & 0 & -\frac{8}{3} & 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 0 + 0 - \frac{8}{3} + 1$$

$$= -3$$

ดังนั้น

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$= \frac{-3}{-3}$$

$$= 1$$

10. ตอบ 4

แนวคิด

> ให้ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ
>
> แล้ว $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \mid \sqrt{y} = 3\sqrt{x} - x \}$

ต้องการหา เรนจ์ของ r

พิจารณา $\sqrt{y} = 3\sqrt{x} - x$

$$x - 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$$

สมการมีค่ารากเป็นจำนวนจริง เมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$

นั่นคือ $$(-3)^2 - 4(1)(\sqrt{y}) \geq 0$$

$$9 - 4\sqrt{y} \geq 0$$

$$9 \geq 4\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} \leq \frac{9}{4}$$

$$0 \leq \sqrt{y} \leq \frac{9}{4}$$

$$0 \leq y \leq \frac{81}{16}$$

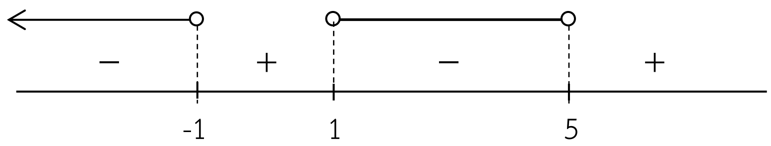
$\therefore$ เรนจ์ของ r อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{81}{16}\right]$

11. ตอบ 2

แนวคิด

กำหนดให้ อสมการ $\frac{(x+1)(x-5)}{x-1} < 0$

ค่า x ที่ทำให้แต่ละวงเล็บเป็นศูนย์คือ -1, 1, 5



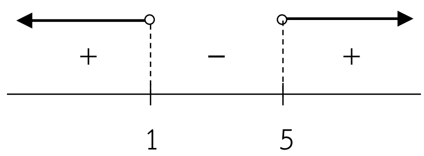
เซตคำตอบของ A คือ $(-\infty, -1) \cup (1, 5)$

ข้อ 1 $x^2 - 6x + 5 > 0$

พิจารณา $$x^2 - 6x + 5 > 0$$

$$(x - 1)(x - 5) > 0$$

ค่า x ที่ทำให้แต่ละวงเล็บเป็นศูนย์คือ 1, 5



เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

จะพบว่า $(-\infty, -1) \cup (1, 5)$ ไม่เป็นสับเซตของ $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

ข้อ 2 $|2x - 1| > 1$

เนื่องจาก $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

จะได้ว่า $2x - 1 < 1$ หรือ $2x - 1 > 1$

$$2x < 0 \quad \text{หรือ} \quad 2x > 2$$

$$x < 0 \quad \text{หรือ} \quad x > 1$$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

จะพบว่า $(-\infty, -1) \cup (1, 5)$ เป็นสับเซตของ $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

ข้อ 3 $1 < |x| < 2$

เนื่องจาก $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

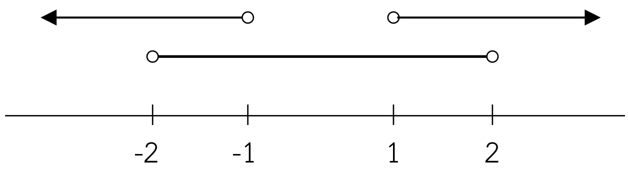
$|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

จะได้ว่า

$$1 < |x| \quad \text{และ} \quad |x| < 2$$

$$|x| > 1 \quad \text{และ} \quad |x| < 2$$

$$x < -1 \text{ หรือ } x > 1 \quad \text{และ} \quad -2 < x < 2$$



เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-2, -1) \cup (1, 2)$

จะพบว่า $(-\infty, -1) \cup (1, 5)$ ไม่เป็นสับเซตของ $(-2, -1) \cup (1, 2)$

ข้อ 4 $x < -1$ หรือ $1 < x < 4$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$

จะพบว่า $(-\infty, -1) \cup (1, 5)$ ไม่เป็นสับเซตของ $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$

12. ตอบ 4

แนวคิด

กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ และ $g(x) = f^{-1}(f^{-1}(x))$

ต้องการหา ค่า a ที่ทำให้ $g(a) = -1$

จาก $f(x) = \frac{3x}{x-1} \rightarrow y = \frac{3x}{x-1}$

เปลี่ยน x เป็น y และ เปลี่ยน y เป็น x แล้วจัดรูปใหม่ดังนี้

$$x = \frac{3y}{y-1}$$

$$x(y-1) = 3y$$

$$xy - x = 3y$$

$$xy - 3y = x$$

$$y(x-3) = x$$

$$y = \frac{x}{x-3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-3}$$

จาก $g(x) = f^{-1}(f^{-1}(x))$

แทนค่า x = a จะได้ $g(a) = f^{-1}(f^{-1}(a))$

$$= f^{-1}\left(\frac{a}{a-3}\right)$$

$$= \frac{\frac{a}{a-3}}{\frac{a}{a-3} - 3}$$

$$= \frac{\frac{a}{a-3}}{\frac{a-3(a-3)}{a-3}}$$

$$= \frac{a}{a-3(a-3)}$$

$$= \frac{a}{9-2a}$$

กำหนดให้ g(a) = -1 จะได้ว่า

$$\frac{a}{9-2a} = -1$$

$$a = -9 + 2a$$

$$9 = 2a - a$$

$$a = 9$$

$\therefore$ ค่า a ที่ทำให้ g(a) = -1 เท่ากับ 9

13. ตอบ 2

แนวคิด

กำหนดให้ $f : R \rightarrow R^-$ และ $g : R \rightarrow R$ โดยที่

$(gof)(x) = 3[f(x)]^2 - 4f(x) - 7$ และ $g(x) = 2x^2 - 3x - 1$

ต้องการหา ค่าของ (g.f)(1)

พิจารณา $(gof)(x) = 3[f(x)]^2 - 4f(x) - 7$

$g(f(x)) = 3[f(x)]^2 - 4f(x) - 7$ -----(1)

จาก $g(x) = 2x^2 - 3x - 1$

แทนค่า x = f(x) จะได้ $g(f(x)) = 2[f(x)]^2 - 3f(x) - 1$ -----(2)

สมการ (1) = (2) $3[f(x)]^2 - 4f(x) - 7 = 2[f(x)]^2 - 3f(x) - 1$

$$[f(x)]^2 - f(x) - 6 = 0$$

$$[f(x) - 3)]\ [f(x) + 2] = 0$$

$$f(x) = 3, -2$$

กำหนดให้ $f : R \rightarrow R^-$ นั่นคือ $R \subset R^-$ ดังนั้น $f(x) = -2$

พิจารณาค่าของ $(g.f)(1)$

ที่ $x = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(1) &= -2 \\ g(1) &= 2(1)^2 - 3(1) - 1 \\ &= 2 - 3 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (g.f)(1) &= g(1)f(1) \\ &= (-2)(-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore$ ค่าของ $(g.f)(1)$ เท่ากับ 4

14. ตอบ 3

แนวคิด

กำหนดให้ สมการวงรี คือ $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$ ถ้าพาราโบลา 2 รูปมีจุดยอดอยู่ที่โฟกัสทั้งสองของวงรี และตัดกันที่จุดปลายทั้งสองของแกนโทของวงรี

ต้องการหา ความกว้าง ณ โฟกัส (latus rectum) ของพาราโบลาทั้งสอง

สมการวงรี

$$\begin{aligned} 16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 &= 0 \\ (16x^2 - 64x) + (25y^2 - 50y) &= 311 \\ 16(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 2y) &= 311 \\ 16(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 - 2y + 1) &= 311 + 64 + 25 \\ 16(x - 2)^2 + 25(y - 1)^2 &= 400 \\ \frac{16(x - 2)^2}{400} + \frac{25(y - 1)^2}{400} &= \frac{400}{400} \\ \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

จากสมการวงรี จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรี (h, k) คือ $(2, 1)$

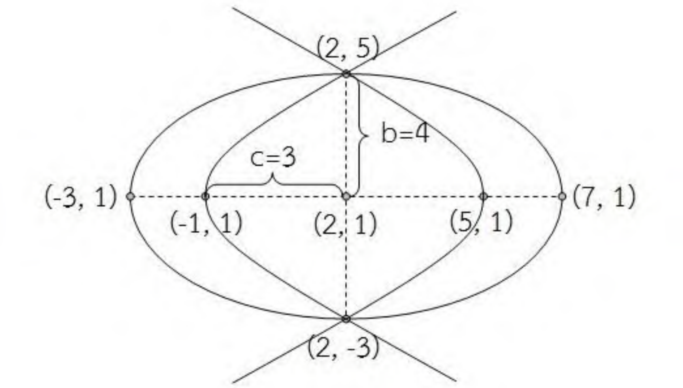
แกนเอกของวงรีขนานกับแกน x

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow c = 3$

จากโจทย์ พาราโบลา 2 รูปมีจุดยอดอยู่ที่โฟกัสทั้งสองของวงรี และตัดกันที่จุดปลายทั้งสองของแกนโทของวงรี วาดรูปประกอบการพิจารณาได้ดังนี้



เนื่องจาก แกนข

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

จากรูป กรณี จุดยอดพาราโบลาคือ (5, 1) และผ่านจุด (2, 5) จะได้

$$(5 - 1)^2 = 4c(2 - 5)$$

$$16 = 4c(-3)$$

$$4c = -\frac{16}{3}$$

กรณี จุดยอดพาราโบลาคือ (-1, 1) และผ่านจุด (2, 5) จะได้

$$(5 - 1)^2 = 4c(2 + 1)$$

$$16 = 4c(3)$$

$$4c = \frac{16}{3}$$

ความกว้าง ณ โฟกัส $= |4c| = \frac{16}{3}$ หน่วย

$\therefore$ พาราโบลาทั้งสองจะมีความกว้าง ณ โฟกัส (latus rectum) เท่ากับ $\frac{16}{3}$ หน่วย

15. ตอบ 3

แนวคิด

กำหนดให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรงจากจุด (0, 1) ไปสัมผัสวงกลมที่มีสมการเป็น

$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$

ต้องการหา ค่าของ m_1m_2

สมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$$

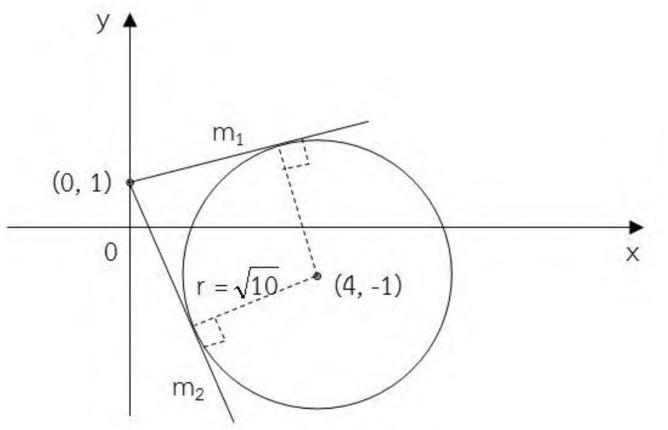
$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 2y) = -7$$

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = -7 + 16 + 1$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

นั่นคือ สมการวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (4, -1) และรัศมีวงกลมเท่ากับ $\sqrt{10}$

จากโจทย์ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรงจากจุด (0, 1) ไปสัมผัสวงกลม วาดรูปประกอบการพิจารณาได้ดังนี้



ให้ สมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม คือ $y = mx + c$

เนื่องจากเส้นตรงผ่านจุด (0, 1) แทนค่าจะได้

$$1 = m(0) + c$$

$$c = 1$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $y = mx + 1$

$$mx - y + 1 = 0$$

จากสูตร ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

แทนค่า ระยะทาง $d = \sqrt{10}$ และจุดศูนย์กลาง (4, -1) จะได้

$$\sqrt{10} = \frac{|m(4) - (-1) + 1|}{\sqrt{(m)^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{10} = \frac{|4m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\sqrt{10}\,\sqrt{m^2 + 1} = |4m + 2|$$

$$\sqrt{10(m^2 + 1)} = |4m + 2|$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$10(m^2 + 1) = (4m + 2)^2$$

$$10m^2 + 10 = 16m^2 + 16m + 4$$

$$6m^2 + 16m - 6 = 0$$

$$3m^2 + 8m - 3 = 0$$

$$(3m - 1)(m + 3) = 0$$

$$m = \frac{1}{3},\ -3$$

นั่นคือ $m_1m_2 = (\frac{1}{3})(-3) = -1$

$\therefore$ ค่าของ m_1m_2 เท่ากับ -1

16. ตอบ 3

แนวคิด

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

พิจารณา $\cot 10^\circ \tan 50^\circ - \cot 10^\circ \tan 40^\circ = \cot 10^\circ (\tan 50^\circ - \tan 40^\circ)$ -----(*)

จาก $\tan (A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

จะได้ $\tan A - \tan B = (1 + \tan A \tan B) \tan (A - B)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\tan 50^\circ - \tan 40^\circ &= (1 + \tan 50^\circ \tan 40^\circ) \tan (50^\circ - 40^\circ)\\ &= (1 + \tan 50^\circ \cot (90^\circ - 40^\circ)) \tan 10^\circ\\ &= (1 + \tan 50^\circ \cot 50^\circ) \tan 10^\circ\\ &= (1 + \tan 50^\circ \frac{1}{\tan 50^\circ}) \tan 10^\circ\\ &= 2 \tan 10^\circ\end{aligned}$$

แทนค่าใน (*) จะได้

$$\begin{aligned}\cot 10^\circ \tan 50^\circ - \cot 10^\circ \tan 40^\circ &= \cot 10^\circ (2 \tan 10^\circ)\\ &= \frac{1}{\tan 10^\circ}(2 \tan 10^\circ)\\ &= 2\end{aligned}$$

$\therefore$ ค่าของ $\cot 10^\circ \tan 50^\circ - \cot 10^\circ \tan 40^\circ$ เท่ากับ 2

17. ตอบ 4

แนวคิด

กำหนดให้ a, b, c เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่

$b + c : c + a : a + b = 4 : 5 : 6$

ต้องการหา ขนาดของมุม A

ให้สามเหลี่ยมมีด้านยาว 1 ส่วนเท่ากับ p จะได้

$b + c = 4p$ -----(1)

$c + a = 5p$ -----(2)

$a + b = 6p$ -----(3)

นำ (1) + (2) + (3) จะได้ $2(a + b + c) = 15p$

$a + b + c = \frac{15}{2}p$ -----(4)

นำ (1) แทนใน (4) จะได้ $a + 4p = \frac{15}{2}p$

$$a = \frac{15}{2}p - 4p = \frac{7}{2}p$$

นำ (2) แทนใน (4) จะได้ $b + 5p = \frac{15}{2}p$

$$b = \frac{15}{2}p - 5p = \frac{5}{2}p$$

นำ (3) แทนใน (4) จะได้ $c + 6p = \frac{15}{2}p$

$$c = \frac{15}{2}p - 6p = \frac{3}{2}p$$

จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

แทนค่า $\left(\frac{7p}{2}\right)^2 = \left(\frac{5p}{2}\right)^2 + \left(\frac{3p}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5p}{2}\right)\left(\frac{3p}{2}\right)\cos A$

$$\frac{49}{4}p^2 = \frac{25}{4}p^2 + \frac{9}{4}p^2 - \frac{30}{4}p^2\cos A$$

นำ $\frac{4}{p^2}$ คูณตลอดสมการ $49 = 25 + 9 - 30\cos A$

$$49 = 34 - 30\cos A$$

$$30\cos A = -15$$

$$\cos A = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $A = 120^\circ$

$\therefore$ มุม A มีขนาดเท่ากับ 120°

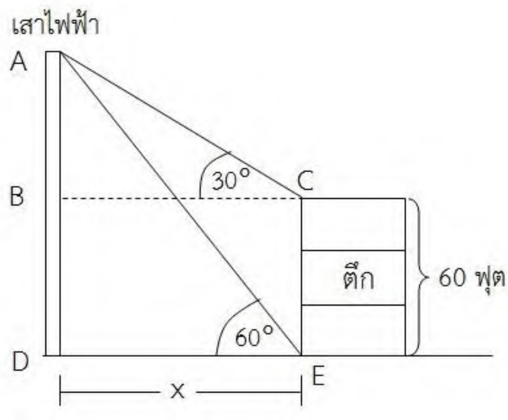
18. ตอบ 1

แนวคิด

กำหนดให้ จากฐานตึกมุมเงยของเสาไฟฟ้าต้นหนึ่งเป็น 60° และจากยอดตึกนั้นซึ่งสูง 60 ฟุต มุมเงยของเสาไฟฟ้านั้นเป็น 30°

ต้องการหา ความสูงของเสาไฟฟ้า

จากข้อมูลที่กำหนดให้ วาดรูปประกอบการพิจารณาได้ดังนี้



พิจารณาสามเหลี่ยม ABC : $\tan 30^\circ = \frac{AB}{x}$ และ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{AB}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{x}{\sqrt{3}} \qquad \text{-----(*)}$$

พิจารณาสามเหลี่ยม ADE : $\tan 60^\circ = \frac{AD}{x}$ และ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\frac{AD}{x} = \sqrt{3}$$

$$\frac{AB+60}{x} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{3}}+60}{x} = \sqrt{3}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}}+60 = \sqrt{3}\,x$$

นำ $\sqrt{3}$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$x + 60\sqrt{3} = 3x$$

$$2x = 60\sqrt{3}$$

$$x = 30\sqrt{3}$$

แทนค่า $x = 30\sqrt{3}$ ใน (*) จะได้

$$AB = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30$$

ดังนั้น ความสูงของเสาไฟฟ้า = AB + 60

= 30 + 60

= 90 ฟุต

19. ตอบ 2

แนวคิด

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{โดยที่ } \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

กำหนดให้ $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $0 < x < y$

ต้องการหา ค่าของ $2y - 4x$

พิจารณา $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{5+\frac{2}{2}\sqrt{21}}$

$$= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{10+2\sqrt{21}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(7+3)+2\sqrt{(7)(3)}}$$

จากสูตร $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

จะได้ว่า $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{7} + \sqrt{3})$

$$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

กำหนดให้ $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ โดยที่ $0 < x < y$ จะได้ว่า

$$x = \frac{3}{2} \text{ และ } y = \frac{7}{2}$$

ดังนั้น $2y - 4x = 2\left(\frac{7}{2}\right) - 4\left(\frac{3}{2}\right)$

$$= 7 - 6$$

$$= 1$$

$\therefore$ ค่าของ $2y - 4x$ เท่ากับ 1

20. ตอบ 1

แนวคิด

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

$\log_a a = 1$

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

กำหนดให้ $x^{\log_{5\sqrt{5}}125} - \log\sqrt{28} = \log\sqrt{325} - \log_{100} 91$

ต้องการหา ค่าของ $3x^4$

พิจารณา $x^{\log_{5\sqrt{5}}125} - \log\sqrt{28} = \log\sqrt{325} - \log_{100} 91$

จะได้ $x^{\log_{5\sqrt{5}}125} = \log\sqrt{325} + \log\sqrt{28} - \log_{100} 91$

$= \log\sqrt{325} + \log\sqrt{28} - \log_{10^2} 91$

$= \log\sqrt{325} + \log\sqrt{28} - \frac{1}{2}\log 91$

$= \log\sqrt{325} + \log\sqrt{28} - \log 91^{\frac{1}{2}}$

$= \log\sqrt{325} + \log\sqrt{28} - \log\sqrt{91}$

$= \log\left(\frac{\sqrt{325}.\sqrt{28}}{\sqrt{91}}\right)$

$= \log\sqrt{100}$

$= \log 10$

$= 1$ -----(1)

พิจารณา $x^{\log_{5\sqrt{5}}125}$ เนื่องจาก $5\sqrt{5} = 5(5^{\frac{1}{2}}) = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$

จะได้ว่า $\log_{5\sqrt{5}} 125 = \log_{5^{\frac{3}{2}}} 5^3$

$= \frac{3}{\frac{3}{2}}\log_5 5$

$= 2(1)$

$= 2$

ดังนั้น $x^{\log_{5\sqrt{5}}125} = x^2$ -----(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $x^2 = 1$

ดังนั้น $3x^4 = 3(x^2)^2 = 3(1)^2 = 3$

$\therefore$ ค่าของ $3x^4$ เท่ากับ 3

21. ตอบ 2

แนวคิด

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$

พิจารณา 5, 8, 11, ... , 32 จะได้ $a_1 = 5,\ d = 3$

จากลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n - 1)d$

แทนค่า $= 5 + (n - 1)(3)$

$= 3n + 2$

พิจารณา 41, 39, 37, ... , 23 จะได้ $a_1 = 41$, $d = -2$

แทนค่า $a_n = 41 + (n - 1)(-2)$

$= 43 - 2n$

พิจารณา $5(41) + 8(39) + 11(37) + ... + 32(23)$

$$= \sum_{i=1}^{10} (3n+2)(43-2n)$$

$$= \sum_{i=1}^{10} (-6n^2 + 125n + 86)$$

$$= \sum_{i=1}^{10} -6n^2 + \sum_{i=1}^{10} 125n + \sum_{i=1}^{10} 86$$

$$= -6\sum_{i=1}^{10} n^2 + 125\sum_{i=1}^{10} n + \sum_{i=1}^{10} 86$$

$$= -6\left[\frac{10}{6}(10+1)(2(10)+1)\right] + 125\left[\frac{10}{2}(10+1)\right] + 10(86)$$

$$= -6\left[\frac{10}{6}(11)(21)\right] + 125\left[\frac{10}{2}(11)\right] + 860$$

$$= -2310 + 6875 + 860$$

$$= 5425$$

$\therefore$ ค่าของ $5(41) + 8(39) + 11(37) + ... + 32(23)$ เท่ากับ 5425

22. ตอบ 2

แนวคิด

จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$
ค่าสัมบูรณ์ของ z : $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$

กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|z| = 3$

ต้องการหา ค่าสูงสุดของ $|z - 3\bar{z}|$

ให้ จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$

และ $\bar{z} = a - bi$

พิจารณา $|z| = 3$

$\sqrt{a^2+b^2} = 3$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง $a^2 + b^2 = 9$

พิจารณา $|z - 3\bar{z}| = |(a + bi) - 3(a - bi)|$

$= |a + bi - 3a + 3bi|$

$= |-2a + 4bi|$

$= \sqrt{(-2a)^2 + (4b)^2}$

$= \sqrt{4a^2 + 16b^2}$

$= \sqrt{(4a^2 + 4b^2) + 12b^2}$

$= \sqrt{4(a^2 + b^2) + 12b^2}$

$= \sqrt{4(9) + 12b^2}$

$= \sqrt{36 + 12b^2}$

จาก $a^2 + b^2 = 9 \rightarrow b^2 = 9 - a^2$

จะพบว่า b^2 มีค่ามากที่สุด เมื่อ $a^2 = 0$ นั่นคือ $b^2 = 9$

ดังนั้น $|z - 3\bar{z}| = \sqrt{36 + 12(9)}$

$= \sqrt{36 + 108}$

$= \sqrt{144}$

$= 12$

$\therefore$ ค่าสูงสุดของ $|z - 3\bar{z}|$ เท่ากับ 12

23. ตอบ 2

แนวคิด

> ถ้า $x = a, b, c$ เป็นคำตอบของสมการพหุนามดีกรี 3 นั่นคือ
>
> $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$
>
> ดังนั้น สัมประสิทธิ์หน้า x^2 คือ ค่าลบของผลบวกของค่ารากทั้งหมด
>
> สัมประสิทธิ์หน้า x คือ ผลบวกของผลคูณของค่ารากแต่ละคู่
>
> ค่าคงตัว คือ ค่าลบของผลคูณของค่ารากทั้งหมด

กำหนดให้ $P(x) = px^3 + 11x^2 + 2px - 5$ เมื่อหาร $P(x)$ ด้วย $x - 2$ จะมีเศษเป็น 15

ถ้า a, b และ c คือรากของสมการ $P(x) = 0$

ต้องการหา ค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$

เนื่องจาก $P(x) = px^3 + 11x^2 + 2px - 5$ หารด้วย $x - 2$ จะมีเศษเป็น 15 จะได้ว่า

$$P(2) = 15$$

$$p(2)^3 + 11(2)^2 + 2p(2) - 5 = 15$$

$$8p + 44 + 4p - 5 = 15$$

$$12p + 39 = 15$$

$$12p = -24$$

$$p = -\frac{24}{12} = -2$$

แทนค่า $p = -2$ ใน $P(x)$ จะได้

$$P(x) = (-2)x^3 + 11x^2 + 2(-2)x - 5$$

$$= -2x^3 + 11x^2 - 4x - 5$$

เนื่องจาก a, b และ c เป็นค่ารากของสมการ P(x) = 0 นั่นคือ

$$-2x^3 + 11x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$$

จะได้ว่า $$a + b + c = \frac{11}{2} \qquad \text{-----(1)}$$

$$ab + bc + ca = 2 \qquad \text{-----(2)}$$

จากสูตร $$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \qquad \text{-----(3)}$$

แทนค่า (1) และ (2) ใน (3) จะได้

$$\left(\frac{11}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(2)$$

$$\frac{121}{4} = a^2 + b^2 + c^2 + 4$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{121}{4} - 4$$

$$= \frac{105}{4}$$

$$= 26.25$$

$\therefore$ ค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับ 26.25

24. ตอบ 3

แนวคิด

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมบัติ

$|\vec{u}| = |\vec{w}|$ และ $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} + \vec{w}|$ และมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$

ต้องการหา มุมระหว่าง $\vec{v}$ กับ $\vec{w}$

พิจารณา $$|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} + \vec{w}|$$

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\frac{\pi}{5} = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$

โจทย์กำหนดให้ $|\vec{u}| = |\vec{w}|$ จะได้ว่า

$$|\vec{w}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}| \cos\frac{\pi}{5} = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$

$$- 2|\vec{w}||\vec{v}| \cos\frac{\pi}{5} = 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$

$$-\cos\frac{\pi}{5} = \cos\theta$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\theta$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\theta$$

$$\theta = \frac{4\pi}{5}$$

$\therefore$ มุมระหว่าง $\vec{v}$ กับ $\vec{w}$ เท่ากับ $\frac{4\pi}{5}$

25. ตอบ 1

แนวคิด

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ 1. $f(a)$ หาค่าได้ 2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ 3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ต้องมีสมบัติครบทั้ง 3 ข้อ

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{เมื่อ } x \leq 3 \\ -4 - x^2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$$

พิจารณาค่า f ที่ $x = 3$:

จะได้ $f(x) = 5 - 6x$

ดังนั้น $f(3) = 5 - 6(3) = -13$

นั่นคือ $f(3)$ หาค่าได้

พิจารณาค่าลิมิตของ f ที่ $x \to 3$:

กรณี $x < 3$: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (5 - 6x)$

$= 5 - 6(3)$

$= -13$

กรณี $x > 3$: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (-4 - x^2)$

$= -4 - (3)^2$

$= -13$

จะได้ว่า $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = -13$