



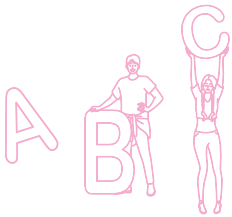
สรุปเนื้อหา + แนวข้อสอบเข้า **ม.4**

โรงเรียน

เตรียมอุดมศึกษา

(ทั้ง 5 วิชา)

มั่นใจเต็ม 100



- ✓ สรุปเนื้อหาแบบเจาะลึก และประเด็นที่มักออกสอบ ครบทั้ง 5 วิชา (คณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์, ภาษาไทย, ภาษาอังกฤษ, สังคมศึกษา)
- ✓ อัดรวมแนวข้อสอบจากแนวโน้มปีล่าสุด เพื่อให้คุ้นเคยกับความเข้มข้นของข้อสอบ
- ✓ เจลละเอียด เน้นให้แนวคิด และเทคนิคที่ช่วยเวลาในการทำข้อสอบ แต่ได้คะแนนสูง
- ✓ ใช้เตรียมตัวสอบได้ทุกแผนการเรียน

พร้อมสำหรับสนามสอบเข้า ม.4 ที่มีอัตราการแข่งขันสูงที่สุด
ของประเทศไทย





มีเพียง “ความรู้” เท่านั้นที่มนุษย์ใช้พลิก “โลก”
และเปลี่ยน “ชีวิต” เราจึงสร้างสรรค์ และส่งมอบ “ความรู้”
ในรูปแบบที่ดีกว่า เพื่อให้คนไทย “เรียนรู้” ได้ตลอดชีวิต

Only “Knowledge” can help human
change “The World” and “Their Lives”.

With this truth, it drives us to deliver
“Knowledge” for Thai being able to
“Learn” better everyday.



สรุปเข้มเนื้อหา + แนวข้อสอบเข้า ม.4 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา (ทั้ง 5 วิชา) มั่นใจเต็ม 100



AUTHORS

อดิเทพ สวัสดิ์ไชย, นาฏอนงค์ พลอยงาม,
นุชนารถ แสนพุก, สุชาดา โสฎงา,
ปรางค์มาศ น้ำทิพย์, อัญมณี อินทรสกุล,
วศรินทร์ ใจเที่ยง, พินทุสร หาญวีรกุล

EDITORIAL

ศิริกาญจน์ วงศ์เศวตศิลา sirikarn_r@idcpremier.com

PRODUCTION MANAGER

วรพล ณีธิกุล

GRAPHIC DESIGNERS

ชวรินทร์ รัตนะ, อนงค์นาฏ รัตนะ

PAGE LAYOUT

วรวิทย์ วรจินต์

PROOFREADER

เกษรา พรวัฒนมงคล

PUBLISHING COORDINATORS

สุริย์รัตน์ จิ๋ว, ฉัตรดนัย ศรีสวัสดิ์

PRODUCTION SPECIALIST

ระพีพัฒน์ โทจำปา

PUBLISHED AND DISTRIBUTED BY



บริษัท ไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด

200 หมู่ 4 ชั้น 19 ห้อง 1901

จัสมินอินเตอร์เนชั่นแนลทาวเวอร์

ถ.แจ้งวัฒนะ ต.ปากเกร็ด อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี 11120

โทรศัพท์ 0-2962-1081 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย)

โทรสาร 0-2962-1084

สมาชิกสัมพันธ์

โทรศัพท์ 0-2962-1081-3 ต่อ 121

โทรสาร 0-2962-1084

ร้านค้าและตัวแทนจำหน่าย

โทรศัพท์ 0-2962-1081-3 ต่อ 112-114

โทรสาร 0-2962-1084



ข้อมูลทางบรรณานุกรม

อดิเทพ สวัสดิ์ไชย

สรุปเข้มเนื้อหา + แนวข้อสอบเข้า ม.4

โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา (ทั้ง 5 วิชา) มั่นใจเต็ม 100

นนทบุรี : ไอดีซีฯ, 2566

444 หน้า

1. แบบทดสอบ

I นาฏอนงค์ พลอยงาม

II นุชนารถ แสนพุก

III สุชาดา โสฎงา

IV ปรางค์มาศ น้ำทิพย์

V อัญมณี อินทรสกุล

VI วศรินทร์ ใจเที่ยง

VII พินทุสร หาญวีรกุล (ผู้แต่งร่วม)

VIII ชื่อเรื่อง

371.262

Barcode 885-916-101-215-3

พิมพ์ครั้งที่ 1 มกราคม 2566

E-book พฤศจิกายน 2568

พิมพ์ครั้งที่ 3 ธันวาคม 2567

พิมพ์ที่ บริษัท ดี.เค.ปรินต์ติ้ง จำกัด

441/56 หมู่ 2 ต.บางบ่อ อ.บางบ่อ จ.สมุทรปราการ 10560

โทรศัพท์ 0-2115-9105

โทรสาร 0-2115-9044

เครื่องหมายการค้าอื่นๆ ที่อ้างถึงเป็นของบริษัทนั้นๆ

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยบริษัท ไอดีซี
พรีเมียร์ จำกัด ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้
ไม่ว่าในรูปแบบใดๆ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจาก
ผู้จัดพิมพ์เท่านั้น

บริษัท ไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด จัดตั้งขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ที่มีคุณภาพ
สู่ผู้อ่านชาวไทย เรายินดีรับงานเขียนของนักวิชาการและนักเขียนทุกท่าน
ท่านผู้สนใจกรุณาดัดต่อผ่านทางอีเมลที่ infopress@idcpremier.com
หรือทางโทรศัพท์หมายเลข 0-2962-1081 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย)

โทรสาร 0-2962-1084

ราคา 480 บาท

คำนำ



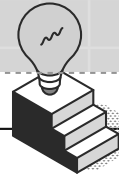
การสอบเข้า ม.4 ถือเป็นการสอบที่สำคัญสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นอย่างมาก ถือได้ว่าเป็นประตูด่านแรกที่จะพาไปสู่เส้นทางระดับอุดมศึกษา การเลือกโรงเรียน เลือกสายการเรียน ล้วนเป็นเรื่องที่สำคัญ ซึ่งโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาถือว่าเป็นโรงเรียนที่ได้รับความสนใจของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั่วประเทศ ทำให้มีอัตราการแข่งขันสูงในทุก ๆ ปี ในทุกสายการเรียนที่เปิดรับสมัคร นักเรียนที่สมัครสอบจึงต้องมีความรู้ที่พร้อมก่อนสอบ เพื่อสามารถทำข้อสอบภายใต้เวลาที่จำกัด คณะผู้จัดทำตระหนักถึงความมุ่งมั่น ความตั้งใจ หนังสือเล่มนี้ได้สรุปเนื้อหาครบทั้ง 5 วิชาหลักที่ใช้ในการสอบ ผู้อ่านสามารถทบทวนซ้ำจนเกิดความเข้าใจ พร้อมทั้งแนวข้อสอบสำหรับฝึกฝนก่อนเจอสนามสอบจริง เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพแก่ผู้อ่านและทำให้ผู้อ่านได้เข้าศึกษาต่อในสายการเรียนและโรงเรียนที่หวังไว้

ทั้งนี้ กราบขอบพระคุณในความอนุเคราะห์ของอาจารย์ผู้ตรวจสอบทางวิชาการที่ได้เสียสละเวลาอันมีค่ามาช่วยตรวจทานความถูกต้องของเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ เพื่อให้หนังสือมีคุณภาพและเกิดประโยชน์ต่อผู้อ่านสูงสุด

คณะผู้จัดทำ



จากใจนักเรียน



พี่โบ๊ท... ข้อสอบวิชาคณิตของเตรียมฯ นั้น พี่อยากแนะนำให้น้อง ๆ ฝึกฝน ทำโจทย์ให้หลากหลาย ฝึกการคิดให้แม่นยำ รวดเร็ว ที่สำคัญขอให้มุ่งมั่น ทุ่มเทกับการสอบครั้งนี้ อาจจะหนักนิดหนึ่ง แต่พี่เชื่อว่าความพยายามที่น้อง ๆ ทำไว้จะไม่เสียเปล่าแน่นอน พี่ขอส่งกำลังใจให้น้อง ๆ ทุกคนนะครับ

พี่แนต... เบื้องหลังของผลลัพธ์ที่ดี คือ การฝึกฝน ความสำเร็จใด ๆ ได้มาอย่างง่ายดาย ทุกครั้งน้อง ๆ ฝึกทำโจทย์ อ่านหนังสือเท่าที่ควร น้อง ๆ ได้เข้าใจสิ่งที่ต้องการอีกก้าวแล้ว พี่ขอเป็นกำลังใจให้น้อง ๆ ทุกคน ความพยายามไม่เคยทำร้ายคนที่ตั้งใจค่ะ



พี่ลูกตาล... “โยคะ เว ชายเต ภูริ” ปัญญาย่อมเกิดขึ้น เพราะการฝึกฝน ฉันทะ ความขยันหมั่นเพียรทำข้อสอบบ่อย ๆ ปัญญาก็จะพาเราไปสู่ความฝันที่เราตั้งใจ ฉันทันนั้น โชคดีค่ะ

พี่ท็อป... สิ่ง พี่อยากบอกน้อง ๆ ที่กำลังเตรียมตัวสอบก็คือ “การเตรียมความพร้อม” นั้นหมายถึง การฝึกทำโจทย์และท่องศัพท์ ที่สำคัญ อย่าลืมความพร้อมด้านสุขภาพร่างกาย การทานอาหารให้มีประโยชน์พักผ่อนให้เพียงพอ และมีสภาพจิตใจที่มีความสุข พี่ขอเป็นกำลังใจให้น้อง ๆ ทุกคนที่กำลังเตรียมตัวสอบนะครับ



พี่มะปราง... พี่เชื่อว่า การฝึกฝนทำข้อสอบบ่อย ๆ นั้นจะเป็นตัวช่วยน้อง ๆ ได้ดีมาก ทำให้น้อง ๆ รู้จักคิด พลิกแพลง สู้กับโจทย์ได้แบบไม่ต้องกลัวใคร และสามารถเข้าเรียนในสายการเรียนที่ตั้งใจได้แน่นอน

พี่พลอย... ความสำเร็จไหนได้มาโดยไม่พยายาม พี่ขอเป็นกำลังใจให้น้อง ๆ ในการเตรียมตัวสอบนะคะ



อยากให้น้อง ๆ วางแผน จัดตารางสอบที่ไม่หักโหมเกินไป และในส่วนของวิชาภาษาอังกฤษ การทำข้อสอบเก่า ทำแบบฝึกหัดซ้ำ ๆ มีส่วนช่วยได้เยอะเลยคะ เพราะน้อง ๆ จะได้เจอกับคำศัพท์และรูปแบบประโยคที่ใช้บ่อย ๆ เมื่อพยายามและเตรียมตัวมาเป็นอย่างดีแล้ว พี่ก็ขออวยพรให้โชคดีเป็นของน้อง ๆ ทุกคนนะคะ



พี่ส้ม... ถ้าเรามีเป้าหมาย ขอให้ตั้งใจ และทุ่มเท ฝึกฝน อ่านทบทวนให้มาก ฝึกทำแบบฝึกหัดให้หลากหลาย ใช้เวลาที่มีให้คุ้มค่า เตรียมตัวให้พร้อม คนที่พร้อมก่อนคือคนที่จะไปสู่ชัยชนะและเป้าหมายที่วางไว้อย่างภาคภูมิใจ และจะไม่กลับมาเสียเวลาที่หลัง ขอให้น้อง ๆ ทุกคนมีพลังและโชคดีในการสอบ ความฝันของทุกคนไม่ไกลเกินเอื้อม





Part 1 คณิตศาสตร์

บทที่ 1 จำนวนจริง.....	2
บทที่ 2 เลขยกกำลัง	3
คุณสมบัติของเลขยกกำลังที่ควรทราบ	3
บทที่ 3 พหุนาม	4
การดำเนินการของพหุนาม.....	4
บทที่ 4 สมการเชิงเส้นและอสมการ	6
สมการ.....	6
การแก้สมการกำลังสอง.....	7
การแก้สมการกำลังสองโดยการแยกตัวประกอบ	7
การใช้สูตรในการแก้สมการกำลังสอง.....	8
อสมการ.....	10
การแก้สมการกำลังสาม.....	10
บทที่ 5 อัตราส่วน.....	11
การหาอัตราส่วนที่เท่ากัน	11
การแปลงอัตราส่วนของปริมาณมากกว่าสองสิ่ง	11
บทที่ 6 ความเท่ากันทุกประการ	12
ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	12
บทที่ 7 เส้นขนาน.....	13
บทที่ 8 พีทาโกรัส.....	14
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	14
อัตราส่วนตรีโกณมิติ.....	14
กฎมือซ้าย.....	15
สมบัติต่าง ๆ ของตรีโกณมิติที่ควรทราบ.....	15
มุมก้ม มุมเงย.....	16



บทที่ 9 วงกลม	17
ส่วนประกอบของวงกลม	17
มุมในวงกลมและมุมในครึ่งวงกลม	18
คุณสมบัติต่าง ๆ ของมุมในวงกลมและมุมในครึ่งวงกลม	18
บทที่ 10 สมการพาราโบลา	19
บทที่ 11 พื้นที่ผิวและปริมาตร	20
พื้นที่ของรูปทรง 2 มิติ	20
พื้นที่รูปสามเหลี่ยม	20
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม	21
พื้นที่รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า	23
พื้นที่รูปวงกลม	23
ปริมาตรของรูปทรง 3 มิติ	24
ปริมาตรของปริซึม	24
ปริมาตรทรงกระบอก	25
ปริมาตรปริซึมฐานรูปวงกลม 2 วง หรือปริมาตรทรงกระบอกกลวง	25
ปริมาตรพีระมิด	26
ปริมาตรทรงกลม	27
พื้นที่ผิวของรูปทรงต่าง ๆ	27
บทที่ 12 สถิติ	28
การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น	28
การวิเคราะห์ค่ากลางของข้อมูล	30
ค่าเฉลี่ย	30
มัธยฐาน	31
ฐานนิยม	31
ความน่าจะเป็น	32

ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1	33
ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 2	40
เฉลย ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1	48
เฉลย ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 2	73

Part 2 วิทยาศาสตร์

บทที่ 1 ชีววิทยา.....	102
เซลล์.....	102
1. ส่วนที่ห่อหุ้มเซลล์	102
2. โพรโทพลาสซึม	103
การลำเลียงสารเข้าและออกจากเซลล์.....	106
1. การลำเลียงสารผ่านเยื่อหุ้มเซลล์โดยไม่ใช้พลังงานจากเซลล์ (passive transport)	106
2. การลำเลียงสารผ่านเยื่อหุ้มเซลล์โดยใช้พลังงานจากเซลล์ (active transport)	108
3. การลำเลียงสารโดยการสร้างเวสิเคิล (vesicular transport)	109
สารเคมีในสิ่งมีชีวิต	110
คาร์โบไฮเดรต.....	110
โปรตีน.....	111
ลิพิด	112
วิตามิน	113
เกลือแร่	114
ระบบร่างกายของสิ่งมีชีวิต	116
ระบบย่อยอาหาร (digestion)	116
ระบบหมุนเวียนเลือด (circulatory system).....	120
ระบบหายใจ (respiratory system)	125



ระบบขับถ่าย (excretory system)	127
ระบบประสาท (nervous system).....	129
ระบบสืบพันธุ์ (reproductive system).....	132
ระบบนิเวศ (ecosystem).....	135
ความสัมพันธ์ของสิ่งมีชีวิตในระบบนิเวศ.....	138
พืช.....	140
การถ่ายทอดลักษณะทางพันธุกรรม	144
การสร้างภูมิคุ้มกันในร่างกาย	145
บทที่ 2 เคมี	146
สารและสสาร	146
สารละลายและการแยกสาร	148
ความเข้มข้นของสารละลาย.....	149
การเจือจางสารละลาย	151
การแยกสาร.....	152
ธาตุและสารประกอบ	154
ธาตุกัมมันตรังสี	157
สารละลายกรดเบส.....	159
การตรวจสอบความเป็นกรด-เบส.....	162
การเกิดปฏิกิริยาเคมี.....	164
บทที่ 3 ฟิสิกส์.....	166
คลื่น.....	166
เสียงและการได้ยิน	167
คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า	168
แสงและการมองเห็น	171
ปริมาณทางฟิสิกส์	178

การเคลื่อนที่	179
เครื่องกล.....	181
ไฟฟ้า.....	188
บทที่ 4 โลกและอวกาศ.....	193
ปฏิสัมพันธ์ในระบบสุริยะ	193
ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบโลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์	194
การระบุตำแหน่งดาวเบื้องต้น.....	196
กลุ่มดาวที่สำคัญ.....	197
ปรากฏการณ์ทางดาราศาสตร์	198
ระบบสุริยะ.....	199
โครงสร้างโลก	202
ธรณีประวัติ	203
การลำดับชั้นหินและประเภทของหิน	205
แร่.....	206
บรรยากาศ	207
การศึกษาสภาพอากาศ.....	209
ข้อสอบวิชาวิทยาศาสตร์ ชุดที่ 1	211
ข้อสอบวิชาวิทยาศาสตร์ ชุดที่ 2	220
เฉลย ข้อสอบวิชาวิทยาศาสตร์ ชุดที่ 1.....	228
เฉลย ข้อสอบวิชาวิทยาศาสตร์ ชุดที่ 2.....	237

Part 3 ภาษาไทย

บทที่ 1 การอ่าน	248
บทที่ 2 การเขียน.....	253



บทที่ 3 การฟัง การดู และการพูด	258
บทที่ 4 หลักการใช้ภาษา	261
เสียงในภาษาไทย	261
การสร้างคำ	262
ชนิดและหน้าที่ของคำ	264
ประโยคในภาษาไทย	267
ระดับภาษา	269
คำสุภาพและคำราชาศัพท์	269
คำเป็น คำตาย	270
คำยืมที่มาจากภาษาต่างประเทศ	270
ภาพย์ โคลง กลอน	272
บทที่ 5 วรรณคดีและวรรณกรรม	275
ข้อสอบวิชาภาษาไทย ชุดที่ 1	279
ข้อสอบวิชาภาษาไทย ชุดที่ 2	283
เฉลย ข้อสอบวิชาภาษาไทย ชุดที่ 1	287
เฉลย ข้อสอบวิชาภาษาไทย ชุดที่ 2	289

Part 4 ภาษาอังกฤษ

บทที่ 1 Conversation	292
บทที่ 2 Grammar	295
Sentence Structure	295
Tense	297
Simple Tense	297
Continuous Tense	298

Perfect Tense	299
Perfect Continuous	299
Passive Voice	300
Conditional Sentences	303
ข้อสอบวิชาภาษาอังกฤษ ชุดที่ 1.....	305
ข้อสอบวิชาภาษาอังกฤษ ชุดที่ 2.....	312
เฉลย ข้อสอบวิชาภาษาอังกฤษ ชุดที่ 1	319
เฉลย ข้อสอบวิชาภาษาอังกฤษ ชุดที่ 2	323

Part 5 สัมมนา

บทที่ 1 ศาสนา ศีลธรรม และจริยธรรม	328
ศาสนา.....	328
ศาสนาสากล.....	329
ศาสนาพราหมณ์-ฮินดู.....	329
ศาสนาคริสต์	333
ศาสนาอิสลาม	335
พระพุทธศาสนา	336
พุทธประวัติ.....	336
หลักธรรมคำสอนของพระพุทธศาสนา.....	337
วันสำคัญทางพระพุทธศาสนา	343
ชาดก.....	344
พุทธศาสนสุภาษิต.....	345
ศาสนพิธี.....	346
พิธีกรรมทางพระพุทธศาสนา	346



บทที่ 2 หน้าที่พลเมือง วัฒนธรรม และการดำเนินชีวิตในสังคม.....348

วัฒนธรรม..... 348

สังคมวิทยา 349

รัฐศาสตร์..... 353

ระบอบการเมืองการปกครอง..... 354

การเมืองการปกครองไทยในปัจจุบัน..... 355

ศาล 357

นิติศาสตร์..... 358

กฎหมายแพ่งและพาณิชย์..... 359

กฎหมายครอบครัว..... 361

กฎหมายมรดก 362

กฎหมายภาษีอากร 363

กฎหมายอาญา..... 364

บทที่ 3 เศรษฐศาสตร์.....367

เศรษฐศาสตร์..... 367

ตลาด..... 369

ระบบเศรษฐกิจ..... 370

อุปสงค์และอุปทาน 370

การคลังภาครัฐ 372

สถาบันทางการเงิน..... 373

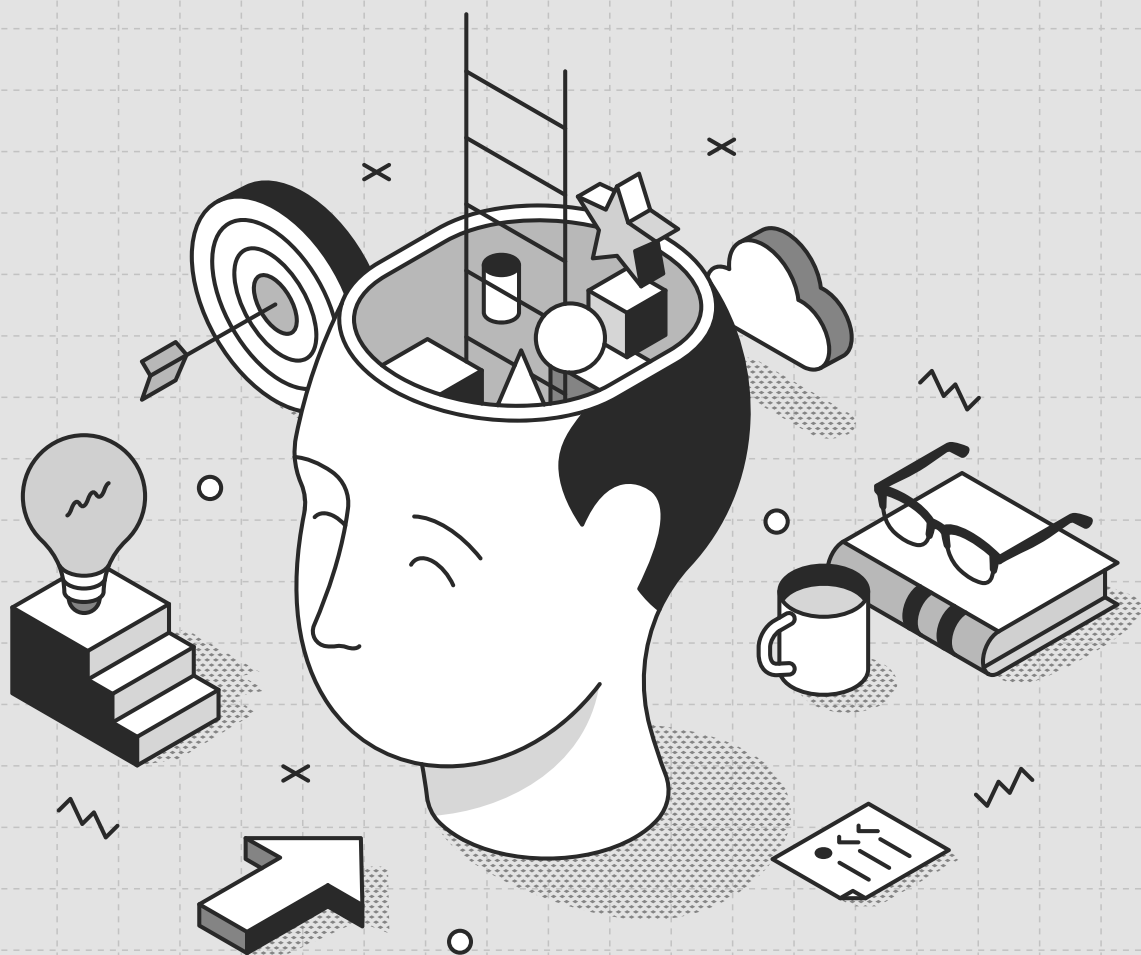
ภาวะเงินเฟ้อ-เงินฝืด 376

เศรษฐศาสตร์ระหว่างประเทศ..... 377

การค้าระหว่างประเทศ 377

ความร่วมมือทางเศรษฐกิจระหว่างประเทศ 378

เศรษฐกิจพอเพียง.....	379
สหกรณ์	379
บทที่ 4 ประวัติศาสตร์	382
การแบ่งยุคสมัยทางประวัติศาสตร์	384
ประวัติศาสตร์ไทย	385
โบราณในดินแดนประเทศไทย	385
อาณาจักรสุโขทัย (พ.ศ. 1792-2006).....	386
อาณาจักรอยุธยา (พ.ศ. 1893-2310).....	387
อาณาจักรธนบุรี (พ.ศ. 2310-2325).....	390
สมัยรัตนโกสินทร์ตอนต้น (รัชกาลที่ 1-3)	390
สมัยปรับปรุงและปฏิรูปประเทศให้ทันสมัย (รัชกาลที่ 4-6).....	392
สมัยประชาธิปไตย (รัชกาลที่ 7-ปัจจุบัน).....	394
ประวัติศาสตร์สากล.....	396
บทที่ 5 ภูมิศาสตร์	402
แผนที่	402
เครื่องมือภูมิศาสตร์	403
โลก.....	404
สภาพภูมิอากาศ	407
ภูมิศาสตร์โลก.....	408
ภูมิศาสตร์ประเทศไทย	410
ประเด็นข่าวที่น่าสนใจที่ควรรู้.....	413
ข้อสอบ วิชาสังคมศึกษา ชุดที่ 1	414
ข้อสอบ วิชาสังคมศึกษา ชุดที่ 2	418
เฉลย ข้อสอบวิชาสังคมศึกษา ชุดที่ 1	422
เฉลย ข้อสอบวิชาสังคมศึกษา ชุดที่ 2	426

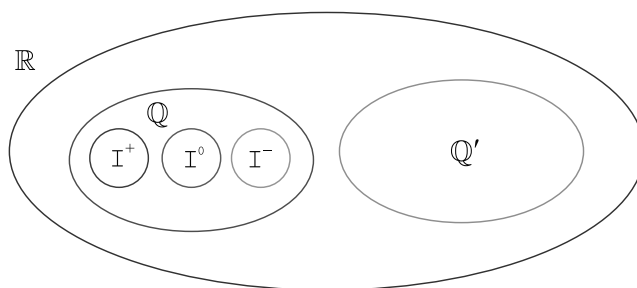


Part 1

คณิตศาสตร์

บทที่ 1

จำนวนจริง



จำนวนจริง ($\mathbb{R}$) คือ จำนวนที่ประกอบไปด้วยจำนวนตรรกยะ ($\mathbb{Q}$) และจำนวนอตรรกยะ ($\mathbb{Q}'$)

จำนวนตรรกยะ ($\mathbb{Q}$) คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปทศนิยมซ้ำ และ $\frac{a}{b}$ ได้ โดยที่ $b \neq 0$ และ a, b เป็นจำนวนเต็ม

เช่น $5.555\ldots$, $\frac{1}{3}$, 0 , 1 เป็นต้น

จำนวนอตรรกยะ ($\mathbb{Q}'$) คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้ แต่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมไม่รู้จบ และทศนิยมไม่ซ้ำ (ในที่นี้จะเรียกว่า ทศนิยม 2 ไม่) เช่น π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ เป็นต้น

จำนวนเต็ม คือ จำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวก ($\mathbb{I}^+$) หรือจำนวนนับ ($\mathbb{N}$) จำนวนเต็มศูนย์ ($\mathbb{I}^0$) และจำนวนเต็มลบ ($\mathbb{I}^-$)



ข้อควรรู้เกี่ยวกับการดำเนินการ

- ♥ จำนวนเต็มบวก $\times / \div$ จำนวนเต็มบวก = จำนวนเต็มบวก
- ♥ จำนวนเต็มลบ $\times / \div$ จำนวนเต็มบวก = จำนวนเต็มลบ
- ♥ จำนวนเต็มบวก $\times / \div$ จำนวนเต็มลบ = จำนวนเต็มลบ
- ♥ จำนวนเต็มลบ $\times / \div$ จำนวนเต็มลบ = จำนวนเต็มบวก

บทที่ 2

เลขยกกำลัง



ถ้า a เป็นจำนวนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือจำนวนนับ

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

โดยจะเรียก a ว่า ฐานของเลขยกกำลัง และเรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

คุณสมบัติของเลขยกกำลังที่ควรทราบ

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $(a^m)^n = a^{mn}$
5. $(ab)^n = a^n b^n$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
8. $a^0 = 1$

การดำเนินการบวกหรือลบในรากที่ n

$$x\sqrt[n]{a} \pm y\sqrt[n]{a} = (x \pm y)\sqrt[n]{a} \quad \text{“ได้รู้ทและอันดับของรากที่ } n \text{ ต้องเหมือนกัน”}$$

การดำเนินการคูณหรือหารในรากที่ n

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; b \neq 0 \quad \text{“อันดับของรากที่ } n \text{ ต้องเหมือนกัน จับคูณหรือหารกันได้เลย”}$$

บทที่ 3

พหุนาม



พหุนาม คือ ผลบวกหรือลบกันของเอกนามอย่างน้อยหนึ่งตัว

$$\begin{array}{ccc} 2x & 5y & \longrightarrow & 2x + 5y \\ \text{เอกนาม} & \text{เอกนาม} & & \text{พหุนาม} \end{array}$$

การดำเนินการของพหุนาม

การบวกลบพหุนาม

พหุนามจะสามารถบวกหรือลบกันได้ เมื่อตัวแปรเหมือนกันเท่านั้น

ตัวอย่าง

$$\begin{array}{c} \overbrace{2x - xy - 8 + 4x + 3xy} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 6x + 2xy - 8 \end{array}$$

การคูณหารพหุนาม

1. การคูณหารเอกนามด้วยเอกนาม ให้คำนึงเสมอว่า ตัวแปรคูณตัวแปร ค่าคงที่คูณค่าคงที่ การหารก็ทำเช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง

$$\begin{array}{c} \overbrace{2y^2 \times 3y} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ (2 \times 3)(y^2 \times y) \end{array} \quad \text{หรือ} \quad \begin{array}{c} \overbrace{2y^2 \div 3y} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \frac{2y^2}{3y} \end{array}$$

2. การคูณหารพหุนามด้วยเอกนาม การคูณแบบนี้ต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติการแจกแจง โดยการกระจายเอกนาม เข้าไปคูณในแต่ละพจน์ของพหุนาม

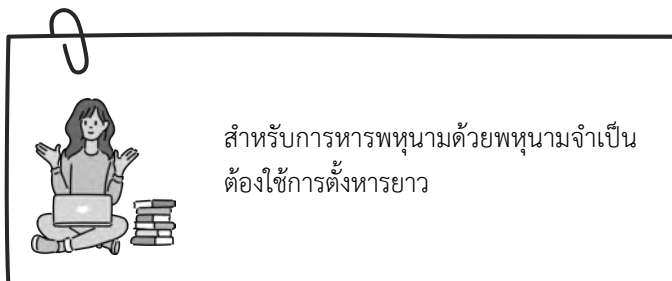
ตัวอย่าง

$$\begin{array}{c} \overbrace{2y^2(3y - 5x)} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ (2y^2)(3y) + (2y^2)(-5x) \end{array} \quad \text{หรือ} \quad \begin{array}{c} \overbrace{(3y - 5x) \div 2y^2} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \frac{3y}{2y^2} - \frac{5x}{2y^2} \end{array}$$

3. การคูณหารพหุนามด้วยพหุนาม การคูณพหุนามด้วยพหุนามนั้นใช้สมบัติการแจกแจงเช่นเดียวกัน แต่ต่างกันคือ ต้องให้แต่ละพจน์ของพหุนามคูณกันให้ครบทุกตัว

ตัวอย่าง

$$(2y^2 + 8)(3y - 5x) = (2y^2)(3y) + (2y^2)(-5x) + (8)(3y) + (8)(-5x)$$



ตัวอย่าง

$6y^3 - 10xy^2 + 24y - 40x$ หารด้วย $2y^2 + 8$ เราสามารถตั้งหารยาวได้ดังนี้

หาตัวที่คูณ $2y^2$

ใส่ $3y$ พจน์แรกของผลหาร

แล้วได้ $6y^3$ นั่นก็คือ $3y \rightarrow 3y$

$$(2y^2 + 8)(3y) = 6y^3 - 10xy^2 + 24y - 40x$$

$$\begin{array}{r} 6y^3 \\ + 24y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 10xy^2 \\ - 40x \end{array}$$

จากนั้นนำ $3y$ ไปคูณ
ตัวหาร แล้วนำมาลบ
ออกจากตัวตั้ง
ตามวิธีการหารปกติ

มีตัวแปรเหมือน
พจน์สุดท้ายของตัวตั้ง

ผลหาร $\rightarrow 3y - 5x$

$$2y^2 + 8 \overline{) 6y^3 - 10xy^2 + 24y - 40x}$$

$$\begin{array}{r} 6y^3 \\ + 24y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 10xy^2 \\ - 40x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 10xy^2 \\ - 40x \end{array}$$

$$\underline{\underline{0}}$$

เศษ

บทที่ 4 สมการเชิงเส้น และอสมการ



สมการ

สมการ คือ ประโยคที่แสดงถึงการเท่ากันของจำนวน โดยใช้สัญลักษณ์ “=” เพื่อแสดงความเท่ากันของจำนวน

ส่วนคำตอบของสมการ คือ จำนวนที่แทนในตัวแปรแล้วทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง

สมบัติการเท่ากัน เมื่อให้ a, b, c เป็นจำนวนใด ๆ

สมบัติ	รายละเอียด
สมบัติการสะท้อน	$a = a$
สมบัติสมมาตร	ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
สมบัติการถ่ายทอด	ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน	ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน	ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่มีตัวแปรเพียงตัวแปรเดียว โดยสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวต้องมีตัวแปรที่มีดีกรีหนึ่งเท่านั้น สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจะอยู่ในรูป $Ax + B = 0$ เมื่อ $A \neq 0$ และ A, B เป็นค่าคงตัว โดยมี x เป็นตัวแปร

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ สมการที่มีตัวแปร 2 ตัว ดีกรีของตัวแปรแต่ละตัวเป็นหนึ่งและต้องไม่อยู่ในรูปการคูณกันของตัวแปร สมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยมี x และ y เป็นตัวแปร เรียกว่า รูปสมการทั่วไป หรืออยู่ในรูป $y = mx + c$ เมื่อ m คือ ความชันและ c คือ ค่าคงตัว เรียกว่า รูปสมการมาตรฐาน

การแก้ระบบสมการ

กรณีมีสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร และมีจำนวนสมการเท่ากับหรือมากกว่า 2 สมการ เราสามารถหาคำตอบของสมการทั้งสองได้ โดยทำได้ 2 วิธี คือ วิธีการแทนค่า หรือ วิธีการกำจัดตัวแปร

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของระบบสมการ $x - 3y = 4$ และ $3x + y = -8$

วิธีการแทนค่า	วิธีการกำจัดตัวแปร
ให้ $x - 3y = 4$ เป็นสมการที่ (1) $3x + y = -8$ เป็นสมการที่ (2) จัดรูปสมการที่ (1) ให้อยู่ในรูปตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง เช่น จัดให้อยู่ในรูปตัวแปร $x = 4 + 3y$ จากนั้นแทนค่า x ในสมการที่ (2) จะได้ $3(4 + 3y) + y = -8$ $12 + 9y + y = -8$ $10y = -20$ $\therefore y = -2$ ทำให้ได้ $x = 4 + 3y = 4 + 3(-2) = -2$	ให้ $x - 3y = 4$ เป็นสมการที่ (1) $3x + y = -8$ เป็นสมการที่ (2) เลือกตัวแปรเพื่อกำจัด เช่น เลือกกำจัด x จากนั้นทำ สัมประสิทธิ์หน้า x ให้เท่ากัน โดยนำ 3 คูณ (1) จะได้ $3x - 9y = 12$ ให้เป็นสมการที่ (3) จากนั้นเอา (3) - (2) $3x - 9y - (3x + y) = 12 - (-8)$ $-10y = 20$ $\therefore y = -2$ แทนค่า y ในสมการใดก็ได้ เช่น แทนในสมการที่ (1) ทำให้ได้ $x - 3(-2) = 4$ นั่นคือ $x = -2$

การแก้สมการกำลังสอง

การแก้สมการกำลังสอง สามารถทำได้หลายวิธี ในเบื้องต้น คือ แยกตัวประกอบพหุนามกำลังสอง (แยก 2 วงเล็บ หรือ แยก factor ที่หลาย ๆ คนรู้จัก) การใช้กำลังสองสมบูรณ์ ผลต่างกำลังสอง และใช้สูตรแก้สมการ เพื่อหาคำตอบหรือ หาค่าของตัวแปร ซึ่งอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

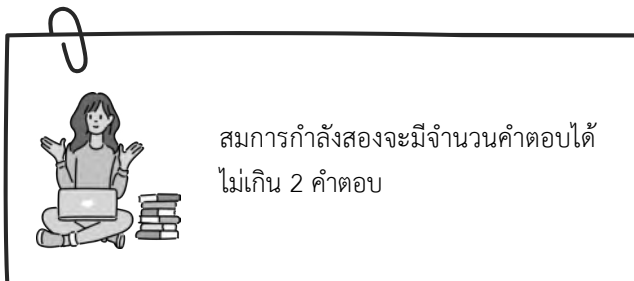
การแก้สมการกำลังสองโดยการแยกตัวประกอบ

สมมติว่า แยกตัวประกอบพหุนามได้เป็น $(x + a)(x + b) = 0$ เราสามารถสรุปได้ว่า $x + a = 0$ หรือ $x + b = 0$ โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง

$$(x - 5)(x + 2) = 0 \text{ ดังนั้น } x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \text{ หรือ } x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$(2x + 3)(3x + 6) = 0 \text{ ดังนั้น } 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ หรือ } 3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2$$





การใช้สูตรในการแก้สมการกำลังสอง

ให้ $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

♥ สูตรที่เราจะใช้ในการแก้สมการกำลังสอง คือ
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



การใช้สูตรสามารถรู้ได้ว่า สมการนั้นมีจำนวนคำตอบกี่จำนวน

โดยพิจารณาจาก $\sqrt{b^2 - 4ac}$



♥ ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แสดงว่า สมการมี 2 คำตอบ

♥ ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แสดงว่า สมการมี 1 คำตอบ

♥ ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แสดงว่า ไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง

หลักการแยกตัวประกอบ

วิธีที่ 1 การแยก factor

ให้ $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

เราต้องหาคำตอบสองจำนวนที่คูณกันได้ c และจำนวนสองจำนวนนั้นบวกหรือลบกันได้ b

ตัวอย่าง

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 5x + 6 = 0$

จะได้ว่า สองจำนวนที่คูณกันได้ 6 และบวกกันได้ 5 คือ 2 และ 3

จะสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น $(x + 2)(x + 3) = 0$

ดังนั้น $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ หรือ $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

วิธีที่ 2 การใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างกำลังสอง

♥ การใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์ จะสามารถจัดได้ตามรูปแบบ คือ $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)(a \pm b) = (a \pm b)^2$

ตัวอย่าง

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 8x + 16 = 0$

จะได้ว่า $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2(x)(4) + 4^2$

$= (x + 4)^2$

ดังนั้น $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$



$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(\text{หน้า} \pm \text{หลัง})^2 = \text{หน้า}^2 \pm \text{สองหน้าหลัง} + \text{หลัง}^2$$

♥ การใช้สูตรผลต่างกำลังสอง จะสามารถจัดได้ตามรูปแบบ คือ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

ตัวอย่าง

จงแยกตัวประกอบของ $49x^2 - 25 = 0$

จะได้ว่า $49x^2 - 25 = (7x)^2 - (5)^2$

$$= (7x + 5)(7x - 5)$$

$$\text{ดังนั้น } 7x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{7} \text{ หรือ } 7x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{7}$$


$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$\text{หน้า}^2 - \text{หลัง}^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})(\text{หน้า} - \text{หลัง})$$

ในกรณีที่เรายากใช้สูตรหรือไม่สามารถแยก factor ได้ จึงต้องเลือกใช้วิธีถัดไปนั่นคือ การแยกตัวประกอบโดยใช้สูตร

วิธีที่ 3 การแยกตัวประกอบโดยใช้สูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ให้ $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

สามารถแทนค่าตามสูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ได้ทันที



ข้อควรระวัง $b^2 - 4ac$ ต้องมีค่ามากกว่า หรือเท่ากับ 0 จึงจะมีคำตอบเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง

จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 + 4x + 1 = 0$

จะได้ว่า $a = 3, b = 4, c = 1$ สามารถแทนค่าในสูตรได้ดังนี้

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{-4 + 2}{6} = \frac{-1}{3} \text{ หรือ } x = \frac{-4 - 2}{6} = -1$$



อสมการ

อสมการ คือ ประโยคที่แสดงถึงการไม่เท่ากันของจำนวน โดยใช้สัญลักษณ์ $<$ (น้อยกว่า), $>$ (มากกว่า), $\leq$ (น้อยกว่าเท่ากับ), $\geq$ (มากกว่าเท่ากับ) และ $\neq$ (ไม่เท่ากับ) เพื่อแสดงความไม่เท่ากันของจำนวน

สมบัติการไม่เท่ากัน เมื่อให้ a, b, c แทนจำนวนจริงใด ๆ

สมบัติ	รายละเอียด
สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน	ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน	ถ้า $a < b$ แล้ว $ac < bc$ เมื่อ $c > 0$ ถ้า $a < b$ แล้ว $ac > bc$ เมื่อ $c < 0$

การแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ใช้วิธีการแก้ด้วยวิธีเดียวกันกับการแก้สมการ



ข้อควรระวัง ถ้าแก้อสมการด้วยวิธีการคูณ หรือหาร ด้วยจำนวนที่ติดลบ ให้เปลี่ยนเครื่องหมายเป็นเครื่องหมายตรงกันข้ามเสมอ โดย $>$ ตรงข้ามกับ $<$ และ $\leq$ ตรงข้ามกับ $\geq$ ส่วนเครื่องหมายไม่เท่ากับไม่ต้องเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายตรงกันข้าม

การแก้สมการกำลังสาม

สูตรกำลังสามสมบูรณ์

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

สูตรผลบวกกำลังสาม

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

สูตรผลต่างกำลังสาม

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

บทที่ 5

อัตราส่วน



อัตราส่วน คือ การเปรียบเทียบปริมาณของสิ่งสองสิ่งหรือมากกว่านั้น โดยไม่จำเป็นต้องเป็นหน่วยเดียวกันก็ได้

โดยอัตราส่วน A ต่อ B เขียนแทนด้วย $A : B$ หรือ $\frac{A}{B}$

การหาอัตราส่วนที่เท่ากัน

หลักการคูณ การหาอัตราส่วนที่เท่ากันจากการคูณทำได้โดยนำจำนวนใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์คูณเข้าไปในจำนวนอัตราส่วน

$$\text{จะได้อัตราส่วนใหม่ที่เท่ากับส่วนเดิม } A : B = \frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C} = AC : BC$$

หลักการหาร การหาอัตราส่วนที่เท่ากันจากการหารทำได้โดยนำจำนวนใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์มาหารไปในจำนวนอัตราส่วน

$$\text{จะได้อัตราส่วนใหม่ที่เท่ากับส่วนเดิม } A : B = \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C} = \frac{A}{C} : \frac{B}{C} \text{ เมื่อ } C \neq 0$$

การคูณไขว้ การคูณไขว้เพื่อตรวจสอบการเท่ากัน ใช้เมื่อเรามีอัตราส่วนอยู่ 2 ชุด และต้องการตรวจสอบว่าอัตราส่วนทั้ง 2 ชุดเท่ากันหรือไม่ โดยใช้การคูณไขว้ ถ้า $A : B = C : D$ นั่นคือ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ แล้ว $AD = BC$ เมื่อ $B \neq 0$ และ $D \neq 0$

การแปลงอัตราส่วนของปริมาณมากกว่าสองสิ่ง

การแปลงนี้เป็นการนำหลักการด้านบนมาประยุกต์ใช้ เพื่อให้เราสามารถเปรียบเทียบปริมาณของสิ่งมากกว่าสองสิ่งได้

ตัวอย่าง

$$A : B = 3 : 5 \text{ และ } B : C = 2 : 1$$

หากเราต้องการเปรียบเทียบ $A : C$ สามารถทำได้โดยการแปลงอัตราส่วนทั้งสองให้มีปริมาณของ B เท่ากัน กล่าวคือ ให้หา ค.ร.น. ของ 5 และ 2 ซึ่งก็คือ 10 และสามารถแปลงได้ ดังนี้

$$A : B = 3 : 5 \text{ ใช้หลักการคูณ โดยคูณด้วย 2 จะได้ } A : B = 6 : 10$$

$$B : C = 2 : 1 \text{ ใช้หลักการคูณ โดยคูณด้วย 5 จะได้ } B : C = 10 : 5$$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า $A : B : C = 6 : 10 : 5$ นั่นคือ $A : C = 6 : 5$

บทที่ 6 ความเท่ากัน ทุกประการ

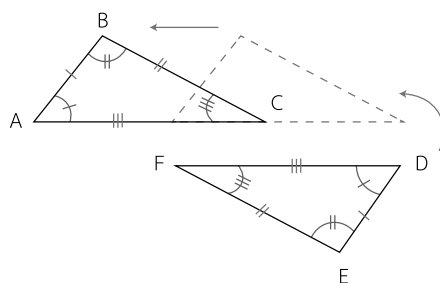


ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ความเท่ากันทุกประการ หมายถึง รูปเรขาคณิตสองรูปที่เมื่อเราเคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งจะสามารถทับกันได้สนิท

จากรูป ถ้าเราหมุนรูปสามเหลี่ยม DEF ทวนเข็มนาฬิกา 180° จากนั้นเลื่อนไปทางซ้าย จะพบว่า สามารถทับกับสามเหลี่ยม ABC ได้สนิทพอดี แปลว่า สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากัน

ทุกประการ เขียนแทนด้วย $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



♥ โดยการตรวจสอบว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ สามารถพิจารณาได้ 5 ความสัมพันธ์ ดังนี้

	ความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ระหว่างสองด้านนั้นมีขนาดเท่ากัน
	ความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม กล่าวคือ มีมุมเท่ากันสองคู่ และด้านที่อยู่ระหว่างสองมุมนั้นมีขนาดเท่ากัน
	ความสัมพันธ์แบบ มุม-มุม-ด้าน กล่าวคือ มีมุมเท่ากันสองคู่ และด้านที่ถัดจากสองมุมนั้นมีขนาดเท่ากัน
	ความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน กล่าวคือ มีด้านเท่ากันสามคู่
	ความสัมพันธ์แบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน กล่าวคือ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และด้านประชิดมุมฉากด้านใดด้านหนึ่งยาวเท่ากัน

บทที่ 7

เส้นขนาน



เส้นขนาน คือ เส้นตรงสองเส้นที่ไม่มีทางตัดกัน หรือเป็นเส้นตรงที่มีเส้นตั้งฉากเดียวกันได้ จากรูป เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD สามารถเขียนแทนด้วย $AB \parallel CD$	
มุมภายใน ถ้าเส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD แล้วมีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดผ่านเส้นขนาน ทำให้เกิดมุมภายใน และมุมภายในนั้นจะรวมกันได้ 180° เสมอ จากรูป เส้นตรง $AB \parallel CD$ จะได้ว่า $\hat{1} + \hat{3} = 180^\circ$ และ $\hat{2} + \hat{4} = 180^\circ$	
มุมแย้ง ถ้าเส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD แล้วมีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดผ่านเส้นขนาน ทำให้เกิดมุมแย้งเกิดขึ้น และมุมแย้งนั้นจะเท่ากันเสมอ จากรูป เส้นตรง $AB \parallel CD$ จะได้ว่า $\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$	
มุมตรงข้าม ถ้าเส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD แล้วมีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดผ่านเส้นขนาน ทำให้เกิดมุมตรงข้ามกัน และมุมตรงข้ามนั้นจะเท่ากันเสมอ จากรูป เส้นตรง $AB \parallel CD$ จะได้ว่า $\hat{1} = \hat{3}$, $\hat{2} = \hat{4}$, $\hat{5} = \hat{7}$ และ $\hat{6} = \hat{8}$	

บทที่ 8

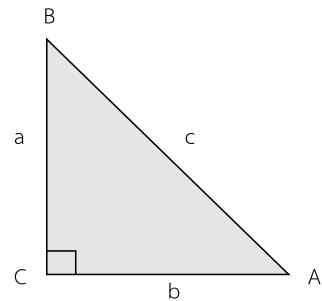
พีทาโกรัส



ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉาก

$$c^2 = a^2 + b^2$$



โดย c คือ ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก (มุม C)

a คือ ความยาวด้านตรงข้ามมุม A หรือความยาวด้านประกอบมุมฉาก

b คือ ความยาวด้านตรงข้ามมุม B หรือความยาวด้านประกอบมุมฉาก



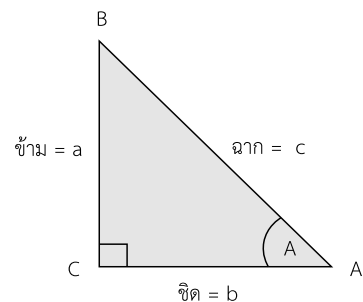
ค่าของสามเหลี่ยมมุมฉากที่พบบ่อย

3, 4, 5 | 5, 12, 13 | 7, 24, 25 | 8, 15, 17 |

9, 40, 41 | 11, 60, 61 | 1, $\sqrt{3}$, 2 เป็นต้น

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ อัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านทั้ง 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่น ถ้าเราสนใจมุม A จะเรียก ด้านตรงข้ามมุม A ว่า “ข้าม” เรียก ด้านติดหรือชิดมุม A ว่า “ชิด” และเรียก ด้านที่ยาวที่สุดของสามเหลี่ยมมุมฉาก A ว่า “ฉาก”



อัตราส่วนตรีโกณมิติ มีดังนี้

$$1. \sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{a}{c}$$

$$2. \cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{b}{c}$$

$$3. \tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{a}{b}$$

$$4. \operatorname{cosec} A = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin A}$$

$$5. \sec A = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos A}$$

$$6. \cot A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan A}$$

กฎมือซ้าย

กฎมือซ้าย ใช้ในหาอัตราส่วนตรีโกณมิติได้ง่ายขึ้น

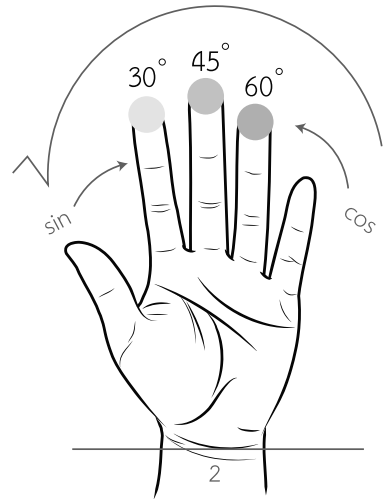
ตัวอย่าง

- (1) ถ้าเป็น $\sin 30^\circ$ ให้นิ้วชี้ของมือซ้ายแล้วนับจากทางนิ้วโป้งว่าเหลือกี่นิ้ว โดยอย่าลืมว่านิ้วทุกนิ้วติดรุท แล้วส่วนด้วย 2

$$\text{จะได้ } \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

- (2) ถ้าเป็น $\cos 30^\circ$ ให้นิ้วชี้ของมือซ้ายแล้วนับจากทางนิ้วก้อยว่าเหลือกี่นิ้ว โดยอย่าลืมว่านิ้วทุกนิ้วติดรุท แล้วส่วนด้วย 2

$$\text{จะได้ } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



สมบัติต่าง ๆ ของตรีโกณมิติที่ควรทราบ

เอกลักษณ์

$$1. \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$2. \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$3. \cot^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$4. \sin \theta \operatorname{cosec} \theta = 1$$

$$5. \cos \theta \sec \theta = 1$$

$$6. \tan \theta \cot \theta = 1$$



ส่วนกลับของตรีโกณมิติ

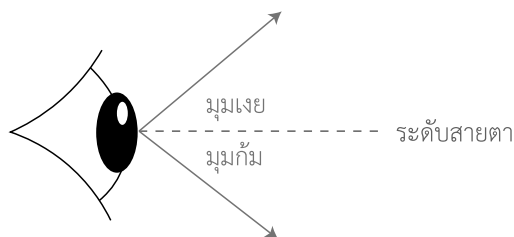
$$\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} \quad \text{และ} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \quad \text{และ} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{และ} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

มุมก้ม มุมเงย

การหาความสูงและระยะทางจากตรีโกณมิติต้องอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับมุมก้ม มุมเงย



มุมเงย คือ มุมที่อยู่เหนือเส้นระดับสายตา

มุมก้ม คือ มุมที่อยู่ใต้เส้นระดับสายตา



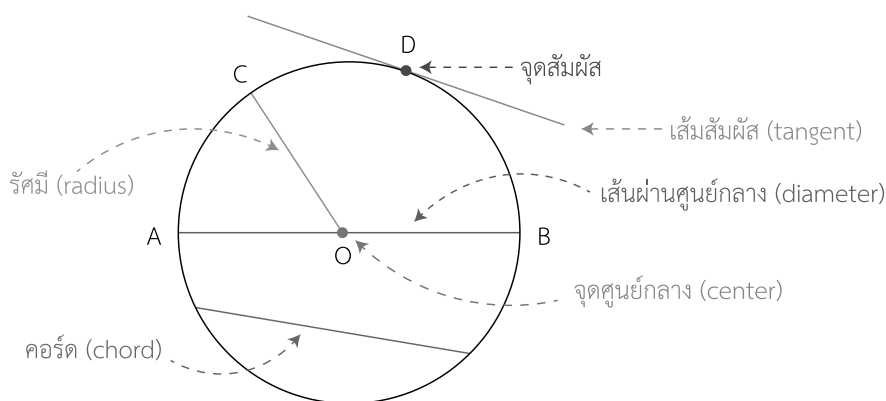
โดยส่วนใหญ่ในเรื่องนี้ จะใช้ $\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

บทที่ 9

วงกลม



ส่วนประกอบของวงกลม



จากรูป เราเรียกจุด O ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม โดยมี จุด A , B และ C เป็นจุดบนวงกลม ซึ่งหากเราลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O ไปยังจุดบนวงกลม C จะได้ $\overline{OC}$ แล้วเราเรียก $\overline{OC}$ ว่า รัศมีของวงกลม โดยรัศมีของวงกลมสามารถมีได้หลายเส้น และแต่ละเส้นมีความยาวเท่ากันเสมอ

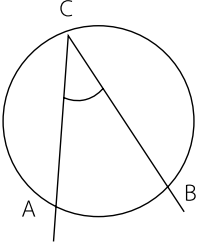
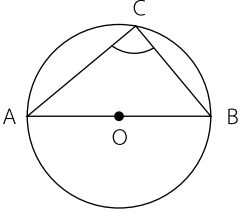
นอกจากนี้ หากเราลากส่วนของเส้นตรงจากจุด A ไปยังจุด B โดยผ่านจุดศูนย์กลาง O เราจะเรียก $\overline{AB}$ ว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง

คอร์ด คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน และเป็นการแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนโค้งสองส่วนโค้ง
เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น และเราเรียกจุดตัดนั้นว่า **จุดสัมผัส**

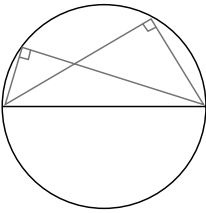
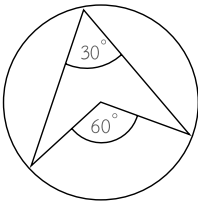
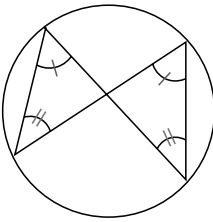
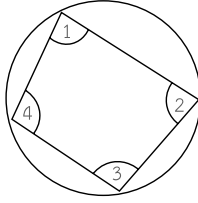


เราจึงสามารถกล่าวได้ว่า เส้นผ่านศูนย์กลางเป็นคอร์ดที่ยาวที่สุดและแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนโค้งสองส่วนโค้งที่เท่ากันทุกประการ

มุมในวงกลมและมุมในครึ่งวงกลม

มุมในวงกลม	มุมในครึ่งวงกลม
 มุมที่มีจุดยอดอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม	 มุมที่มีจุดยอดอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองผ่านจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง

คุณสมบัติต่าง ๆ ของมุมในวงกลมและมุมในครึ่งวงกลม

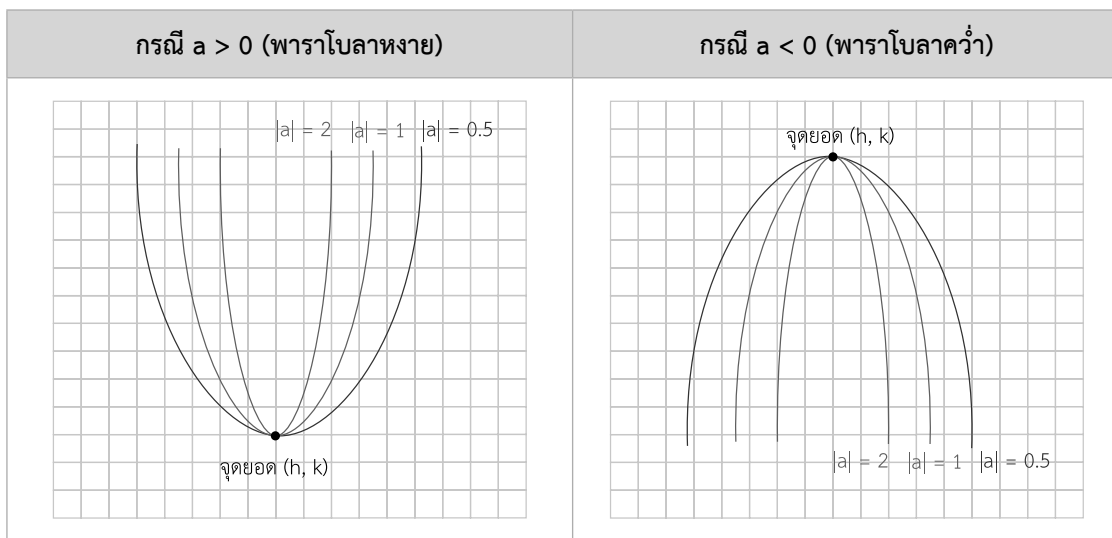
 1. มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก (90 องศา) เสมอ	 2. ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
 3. ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน	 4. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมได้ $\hat{1} = \hat{3}$, $\hat{2} = \hat{4}$

บทที่ 10

สมการพาราโบลา

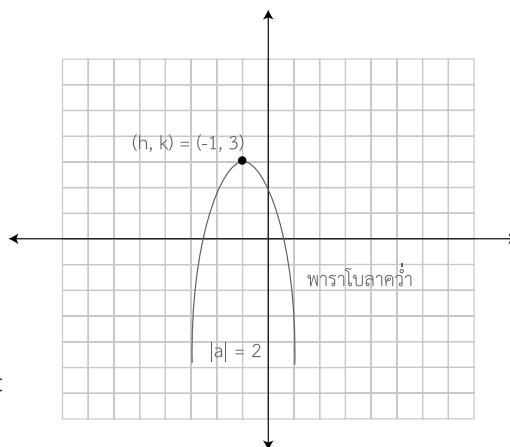


สมการพาราโบลา สมการที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ ซึ่งสามารถจัดรูปสมการใหม่ คือ $y - k = a(x - h)^2$ หรือ $y = a(x - h)^2 + k$ โดย (h, k) คือ จุดยอดของพาราโบลา และ a มีผลต่อลักษณะของกราฟพาราโบลา โดยสามารถเขียนเป็นกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง

สมการพาราโบลา $y = -2(x + 1)^2 + 3$
 เนื่องจาก $a = -2 < 0$ ดังนั้น กราฟที่ได้
 จะเป็นพาราโบลาคว่ำ
 พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่พิกัด
 $(h, k) = (-1, 3)$ และ $|a| = |-2| = 2$
 สามารถเขียนกราฟพาราโบลาได้ดังนี้



♥ สูตรการหาจุดยอด เมื่อรููปสมการ คือ $y = ax^2 + bx + c$

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ และ } y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

บทที่ 11

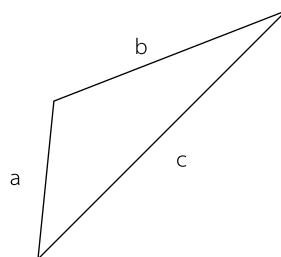
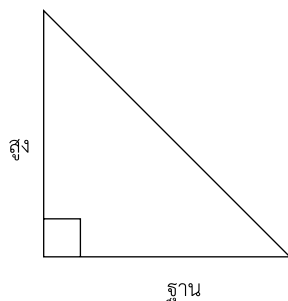
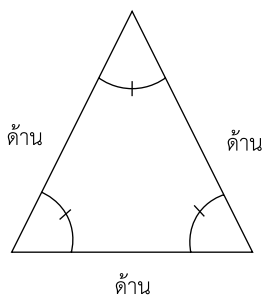
พื้นที่ผิว และปริมาตร



พื้นที่ผิว คือ ผลรวมของพื้นที่ผิวข้างทุกด้านของรูปทรง เช่น พื้นที่ผิวรูปทรงสี่เหลี่ยม ก็จะมีพื้นที่ผิวข้างทั้งหมด 6 ด้าน โดยถ้าจะคำนวณพื้นที่ผิวและปริมาตร จะต้องมาหาทวนสูตรเรื่องพื้นที่ของรูปทรง 2 มิติ และปริมาตรของรูปทรง 3 มิติ ดังนี้

พื้นที่ของรูปทรง 2 มิติ

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม

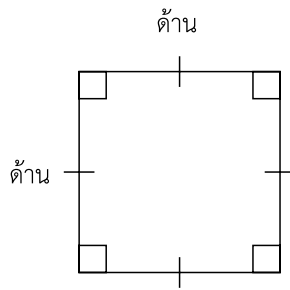


$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{ด้าน} \times \text{ด้าน}$$

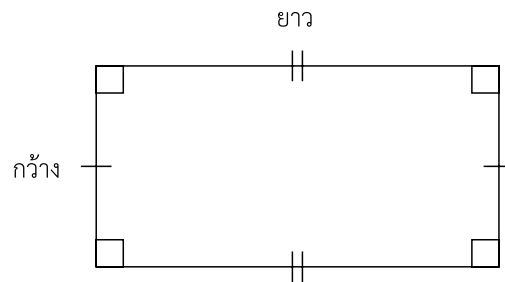
$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของด้านประกอบมุมฉาก}$$

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{โดยที่ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

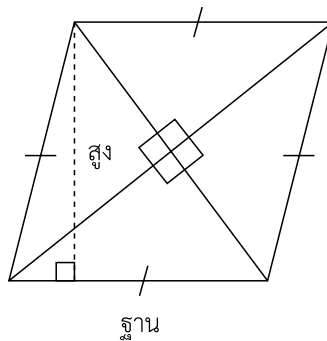
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม



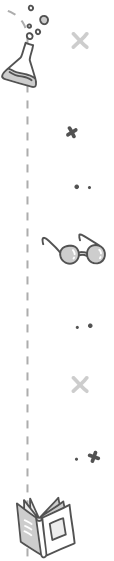
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน $\times$ ด้าน

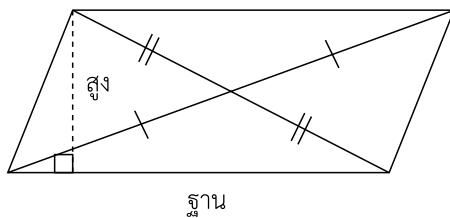


พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง $\times$ ยาว

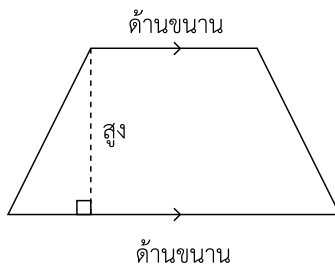


พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (จตุรัสเอียง ๆ) = ฐาน $\times$ สูง

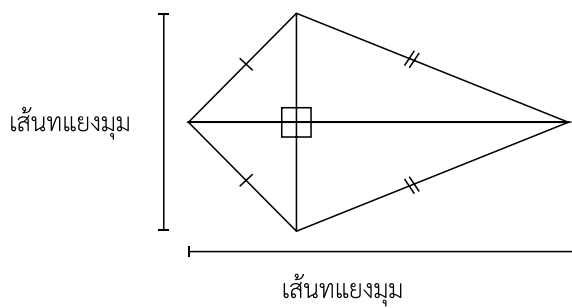




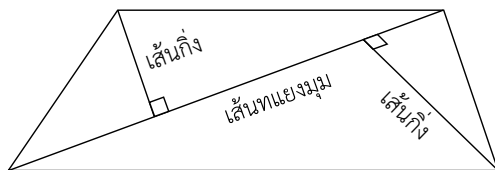
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ผืนผ้าเอียง ๆ) = ฐาน $\times$ สูง



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2} \times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน $\times$ สูง



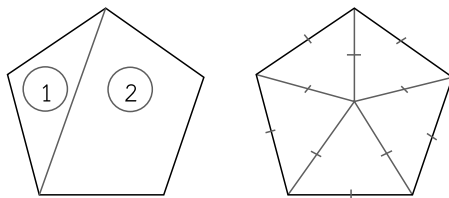
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปวาว = $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม



$$\text{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าหรือสี่เหลี่ยมใด ๆ} = \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของเส้นทแยงมุม} \times \text{ผลบวกเส้นกึ่ง}$$

พื้นที่รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

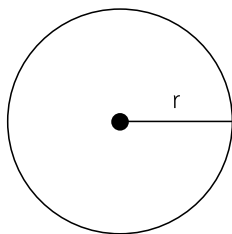
เช่น 5 เหลี่ยมด้านเท่า ทำได้ 2 วิธี



วิธีที่ 1 แบ่งรูปออกเป็น 2 ส่วนจะได้รูปสามเหลี่ยม 1 รูป และสี่เหลี่ยม 1 รูป

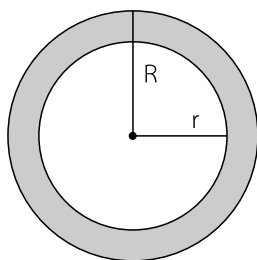
วิธีที่ 2 ใช้สูตร จำนวนเหลี่ยม $\times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{ด้าน} \times \text{ด้าน}$

พื้นที่รูปวงกลม



$$\text{พื้นที่รูปวงกลม 1 วง} = \pi r^2 \text{ โดย } \pi \approx \frac{22}{7} \approx 3.14$$

$$\text{เส้นรอบรูปวงกลม} = 2\pi r$$



$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่รูปวงกลม 2 วง ที่มีรัศมีต่างกันจากจุดคงที่หรือวงแหวน} &= \pi R^2 - \pi r^2 \\
 &= \pi(R^2 - r^2) \\
 &= \pi(R - r)(R + r)
 \end{aligned}$$

ปริมาตรของรูปทรง 3 มิติ

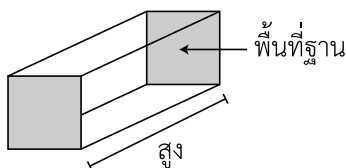
รูปทรงสามมิติ คือ ส่วนที่สามารถมองเห็นได้ทั้งส่วนที่เป็น ความกว้าง ความยาว และความสูง
ปริมาตร คือ ปริมาณที่วัดเพื่อแสดงบริเวณความจุภายในรูปทรงสามมิติ

ปริมาตรของปริซึม

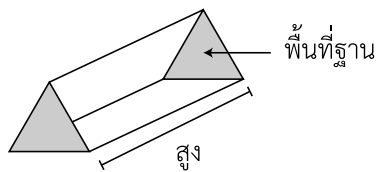
ปริซึม คือ รูปทรงสามมิติที่มีหน้าตัดหัวท้ายชนิดต่าง ๆ ที่เหมือนกันทุกประการ และลากเส้นเชื่อมจุดยอดเดียวกันเป็นเส้นขนาน

$$\text{ปริมาตรปริซึมฐานรูปทรงต่าง ๆ} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$$

ในที่นี้ให้เปลี่ยนสูตร พื้นที่ฐานตามรูปทรง 2 มิติต่าง ๆ จากเรื่องพื้นที่ข้างต้น เช่น

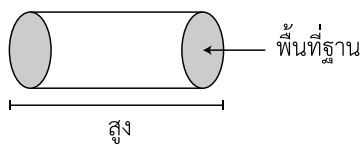


$$\text{ปริมาตรปริซึมฐานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} = [\text{กว้าง} \times \text{ยาว}] \times \text{สูง}$$



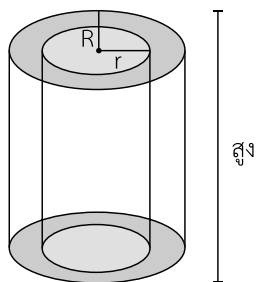
$$\text{ปริมาตรปริซึมฐานรูปสามเหลี่ยม} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} = \left[\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \right] \times \text{สูง}$$

ปริมาตรทรงกระบอก



$$\text{ปริมาตรทรงกระบอก} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} = \pi r^2 \times \text{สูง} = \pi r^2 h$$

ปริมาตรปริซึมฐานรูปวงกลม 2 วง หรือปริมาตรทรงกระบอกกลวง



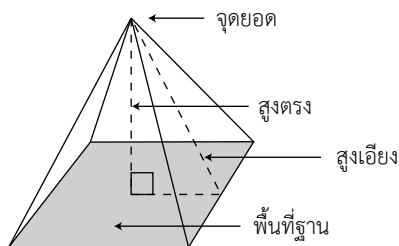
$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรทรงกระบอกกลวง} &= \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= (\pi R^2 - \pi r^2) \times \text{สูง} \\ &= \pi(R^2 - r^2)h \end{aligned}$$

ปริมาตรพีระมิด

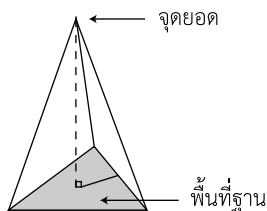
พีระมิด คือ รูปทรงสามมิติที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ ที่มียอดแหลมโดยลากจากจุดมุมของฐานไปยังจุดเดียวกัน

$$\text{ปริมาตรพีระมิดฐานรูปทรงต่าง ๆ} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$$

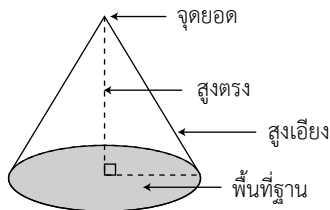
ในที่นี้ให้เปลี่ยนสูตร พื้นที่ฐานตามรูปทรง 2 มิติต่าง ๆ จากเรื่องพื้นที่ข้างต้น เช่น



$$\text{ปริมาตรพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{3} \times [\text{กว้าง} \times \text{ยาว}] \times \text{สูง}$$



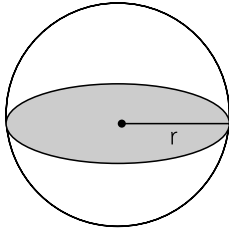
$$\text{ปริมาตรพีระมิดฐานสามเหลี่ยม} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \right] \times \text{สูง}$$



$$\text{ปริมาตรกรวยกลม} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times \text{สูง}$$

ปริมาตรทรงกลม

ทรงกลม คือ รูปทรงสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดคงที่เป็นระยะทางเท่ากัน



$$\text{ปริมาตรทรงกลม} = \frac{4}{3} \times \pi r^3$$

พื้นที่ผิวของรูปทรงต่าง ๆ

ปริซึม

$$\text{พื้นที่ผิวทั้งหมด} = \text{พื้นที่ผิวข้าง} + 2\text{พื้นที่ฐาน (หน้าตัดหัวและท้าย)}$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้าง} = \text{ความยาวรอบฐาน} \times \text{สูง}$$

ทรงกระบอก

$$\text{พื้นที่ผิวทั้งหมด} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้าง หรือพื้นที่ผิวโค้งของทรงกระบอก} = 2\pi rh$$

พีระมิด

$$\text{พื้นที่ผิวทั้งหมด} = \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ฐาน}$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้าง} = \frac{1}{2} \times \text{ผลบวกความยาวรอบฐาน} \times \text{สูงเอียง (l)}$$

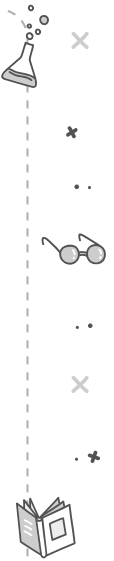
ทรงกรวย

$$\text{พื้นที่ผิวทั้งหมด} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้าง หรือพื้นที่ผิวโค้งของกรวย} = \pi rl$$

ทรงกลม

$$\text{พื้นที่ผิวทั้งหมด} = 4\pi r^2$$



บทที่ 12 สถิติ



ข้อมูล คือ ข้อเท็จจริงในสิ่งที่เราสนใจ โดยข้อมูลแบ่งได้ 2 ประเภท ได้แก่ ข้อมูลเชิงคุณภาพ และข้อมูลเชิงปริมาณ

ข้อมูลเชิงคุณภาพ	ข้อมูลเชิงปริมาณ
♥ ข้อมูลที่บ่งบอกลักษณะ คุณสมบัติ แต่วัดเป็นตัวเลขไม่ได้	♥ ข้อมูลที่บ่งบอกจำนวน และแสดงถึงปริมาณได้อย่างชัดเจน
♥ เช่น เพศ อาชีพ การศึกษา ฯลฯ	♥ เช่น อายุ น้ำหนัก ความสูง ฯลฯ

การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

โดยทั่วไปจะแบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่ ข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่และข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

ข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่	ข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่
♥ การนับข้อมูลดิบสามารถนับจำนวน ความถี่ได้ทันที	♥ การนำข้อมูลดิบมาทำเป็นรูปช่วงอันตรภาคชั้น

ข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่ มีส่วนประกอบ ดังนี้

1. พิสัย

$$\text{พิสัย} = \text{ข้อมูลที่มีค่าสูงสุด} - \text{ข้อมูลที่มีค่าต่ำสุด}$$

2. ความกว้างอันตรภาคชั้น

$$\text{ความกว้างอันตรภาคชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{จำนวนชั้นที่ต้องการ}}$$

3. ความถี่ เกิดจากการนับข้อมูลที่อยู่ในช่วงความกว้างอันตรภาคชั้นที่หาได้
4. ความถี่สะสม เกิดจากผลรวมของความถี่ในอันตรภาคชั้นแรกรวมกันไปเรื่อย ๆ จนถึงอันตรภาคชั้นสุดท้าย
5. ขอบล่าง

$$\text{ขอบล่าง} = (\text{ค่าต่ำสุดในอันตรภาคชั้นนั้น} + \text{ค่าสูงสุดในอันตรภาคชั้นต่ำกว่า 1 ชั้น}) \div 2$$

6. ขอบบน

$$\text{ขอบบน} = (\text{ค่าสูงสุดในอันตรภาคชั้นนั้น} + \text{ค่าต่ำสุดในอันตรภาคชั้นสูงกว่า 1 ชั้น}) \div 2$$

7. จุดกึ่งกลางชั้น

$$\text{จุดกึ่งกลางชั้น} = (\text{ขอบล่างของอันตรภาคชั้นนั้น} + \text{ขอบบนของอันตรภาคชั้นนั้น}) \div 2$$

8. ความถี่สัมพัทธ์

$$\text{ความถี่สัมพัทธ์} = \text{ความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้น} \div \text{จำนวนความถี่ทั้งหมด}$$

9. ความถี่สะสมสัมพัทธ์

$$\text{ความถี่สะสมสัมพัทธ์} = \text{ความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นนั้น} \div \text{จำนวนความถี่ทั้งหมด}$$

10. ร้อยละความถี่สัมพัทธ์

$$\text{ร้อยละความถี่สัมพัทธ์} = \text{ความถี่สัมพัทธ์} \times 100$$

11. ร้อยละความถี่สะสมสัมพัทธ์

$$\text{ร้อยละความถี่สะสมสัมพัทธ์} = \text{ความถี่สะสมสัมพัทธ์} \times 100$$



✕

✕

..



..

✕

. *



..

✕

. *