

เรียนลัด วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยแอนซิส



ปราโมทย์ เดชะอำไพ
เสกฐาวรธ สุกจิตภวัตสกุล

**เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
ด้วยแอนซิส**

**Finite Element Method
Crash Course with ANSYS**

**เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
ด้วยแอนซิส**

**Finite Element Method
Crash Course with ANSYS**

**ปราโมทย์ เดชะอำไพ
เสกฐวรรธ สุจริตภวัตสกุล**

2569

179.-

ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

เรียนลัทธิไฟฟ้าในอณูโลกด้วยแอนซิส/ ปราโมทย์ เฑาะอำไพ และ เสฏฐวรรธ สุจริตกวีตสกล

1. ไฟฟ้าในอณูโลก. 2. แอนซิส (โปรแกรมคอมพิวเตอร์).

ลิขสิทธิ์ของ นายปราโมทย์ เฑาะอำไพ และ นายเสฏฐวรรธ สุจริตกวีตสกล

สงวนลิขสิทธิ์ทุกประการ

ห้ามคัดลอก เก็บในระบบข้อมูล หรือส่งต่อไม่ว่าในรูปแบบใดหรือด้วยวิธีการใด ๆ

ไม่ว่าจะเป็นอิเล็กทรอนิกส์ เครื่องกล การถ่ายสำเนา การบันทึกเสียง หรือวิธีอื่นใด

โดยไม่ได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากผู้เขียน

ฉบับอิเล็กทรอนิกส์ (e-Book Edition) พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2569

จัดพิมพ์โดย

ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

สำนักงานหลักสูตรวิศวกรรมนานาชาติ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

จัดจำหน่ายโดย

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433

<http://www.chulabook.com>

และเครือข่าย ฯ

พิสูจน์อักษร : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

ออกแบบปก : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เฑาะอำไพ

ออกแบบรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์จักร

คำนำ

หนังสือ “เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยแอนซิส” ได้แต่งขึ้นเพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถใช้ซอฟต์แวร์แอนซิสได้โดยง่ายในระยะเวลาอันสั้น เนื้อหา รวม 12 บทครอบคลุมการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านโครงสร้าง ของแข็ง ความร้อน ไปจนถึงการไหล เนื้อหาในแต่ละบทประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และสมการที่เกี่ยวข้อง วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิเคราะห์งานนั้น ๆ ตัวอย่างพื้นฐานเพื่อการศึกษาพร้อมคำอธิบายขั้นตอนการใช้ซอฟต์แวร์แอนซิสโดยละเอียด และตัวอย่างงานในทางปฏิบัติเพื่อแสดงถึงการนำไปประยุกต์ใช้ได้จริง

เนื่องจากซอฟต์แวร์แอนซิสเวอร์ชันนักศึกษา (student version) สามารถดาวน์โหลด (download) จากเว็บไซต์ (website) โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ผู้ศึกษาจึงนำมาทดลองใช้งานได้ ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์งานจริง อันจะช่วยยกระดับการศึกษาและศักยภาพการออกแบบงานทางวิศวกรรมให้แก่ประเทศไทยของเรา

ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอัมพร พงษ์ขจร ผู้จัดพิมพ์เนื้อหาด้านทฤษฎีและจัดรูปเล่ม ผู้เขียนขอขอบคุณบริษัท ANSYS, Inc., USA ที่มอบซอฟต์แวร์แอนซิสเพื่อใช้ในการแต่งหนังสือเล่มนี้

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

เสกฐาวรธ สุจิตภวัตสกุล

สารบัญ

คำนำ

บทที่ 1	ความรู้เบื้องต้น	1
1.1	การแก้ปัญหาทางวิศวกรรม	1
1.1.1	องค์ประกอบของปัญหา	2
1.1.2	วิธีการแก้เพื่อหาผลลัพธ์	3
1.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	4
1.2.1	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร	4
1.2.2	ขั้นตอนในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	5
1.3	ซอฟต์แวร์แอนซิส	7
1.3.1	โต๊ะช่างแอนซิส	8
1.3.2	หน้าจอและแถบเครื่องมือ	8
1.3.3	ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์	10
1.4	ประโยชน์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	12
บทที่ 2	การวิเคราะห์วัสดุท่อน	13
2.1	สมการพื้นฐาน	13
2.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	13
2.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	14
2.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	15
2.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	15
2.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	15
2.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	17
2.3.1	ปัญหาโครงสร้าง 1 มิติ	17
2.3.2	ปัญหาโครงสร้าง 2 วัสดุท่อน	28

2.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	38
2.4.1 ปัญหาโครงสร้าง 21 วัสดุท่อน	38
บทที่ 3 การวิเคราะห์คานและโครงสร้าง	41
3.1 สมการพื้นฐาน	42
3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	42
3.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	42
3.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	43
3.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	43
3.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์	44
3.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	45
3.3.1 ปัญหาโครงสร้าง 2 คาน	45
3.3.2 ปัญหาโครงสร้าง 21 คาน	55
3.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	56
3.4.1 ปัญหาโครงสร้างรถแข่งใน 3 มิติ	56
บทที่ 4 การวิเคราะห์ความยืดหยุ่นใน 2 มิติ	61
4.1 สมการพื้นฐาน	61
4.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	61
4.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	62
4.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	63
4.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	63
4.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์	63
4.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	66
4.3.1 ปัญหาแผ่นบางมีรูกลมตรงกลาง	66
4.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	78
4.4.1 ปัญหาความแข็งแรงของล้อพื้นเพื่อง	78

บทที่ 5 การวิเคราะห์แผ่นบาง	81
5.1 สมการพื้นฐาน	81
5.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	81
5.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	83
5.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	83
5.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	83
5.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์	84
5.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	85
5.3.1 ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง	85
5.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	95
5.4.1 ปัญหาความแข็งแรงเหล็กลากชั้นวางของ	95
บทที่ 6 การวิเคราะห์ความยืดหยุ่นใน 3 มิติ	99
6.1 สมการพื้นฐาน	100
6.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	100
6.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	100
6.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	101
6.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	101
6.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์	102
6.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	105
6.3.1 ปัญหาชิ้นงาน 3 มิติ	105
6.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	115
6.4.1 ปัญหาความแข็งแรงของชิ้นส่วนในปีกเครื่องบิน	115
บทที่ 7 การวิเคราะห์พลศาสตร์โครงสร้าง	117
7.1 สมการพื้นฐาน	118
7.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	118
7.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	121

7.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	123
7.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	123
7.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	123
7.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	125
7.3.1	ปัญหาการสั่นของแผ่นบาง	125
7.4	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	133
7.4.1	ปัญหาความถี่ของการสั่นในโครงสร้างรถยนต์	133
บทที่ 8	การวิเคราะห์ความเสียหาย	137
8.1	การโก่งงอ	138
8.1.1	ความรู้พื้นฐาน	138
8.1.2	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	140
8.1.3	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน	150
8.2	ความล้าและการประเมินอายุ	153
8.2.1	ความรู้พื้นฐาน	153
8.2.2	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	155
8.2.3	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน	165
บทที่ 9	การวิเคราะห์ปัญหาความร้อน	169
9.1	สมการพื้นฐาน	170
9.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	170
9.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	171
9.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	172
9.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	172
9.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	173
9.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	176
9.3.1	ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมกำหนดอุณหภูมิที่ขอบทั้งสี่	176

9.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	184
9.4.1 ปัญหาการระบายความร้อนใน 3 มิติ	184
บทที่ 10 การวิเคราะห์ความเค้นจากอุณหภูมิ	189
10.1 สมการพื้นฐาน	190
10.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	190
10.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	191
10.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	192
10.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	192
10.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์	193
10.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	194
10.3.1 ปัญหาความเค้นจากอุณหภูมิในแผ่นบาง	194
10.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	207
10.4.1 ความเค้นเนื่องจากความร้อนในลูกสูบสันดาปภายใน	207
บทที่ 11 การวิเคราะห์การไหลแบบไม่อัดตัว	211
11.1 สมการพื้นฐาน	212
11.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	212
11.1.2 แนวคิดในการแก้ปัญหา	213
11.2 วิธีไฟไนต์วอลุ่ม	214
11.2.1 สมการไฟไนต์วอลุ่ม	215
11.2.2 วิธี SIMPLE	215
11.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	217
11.3.1 ปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม	217
11.3.2 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกในช่องแคบ	226
11.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	230
11.4.1 ปัญหาการไหลของน้ำในระบบท่อ	230

บทที่ 12 การวิเคราะห์การไหลแบบอัดตัวได้	235
12.1 สมการพื้นฐาน	236
12.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	236
12.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	237
12.2 วิถีไฟในตัวอวลุม	238
12.2.1 สมการไฟในตัวอวลุม	238
12.2.2 กระบวนการคำนวณ	240
12.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	242
12.3.1 ปัญหาการไหลผ่านพื้นเอียง	242
12.3.2 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก	254
12.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	258
12.4.1 ปัญหาการไหลผ่านกระสวยอวกาศ	258
บรรณานุกรม	263
ดัชนี	267
ประวัติผู้แต่ง	277

บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้น

1.1 การแก้ปัญหาทางวิศวกรรม

เทคโนโลยีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ซอฟต์แวร์ทำให้การแก้ปัญหาทางวิศวกรรมสะดวกและรวดเร็วขึ้นมาก ผู้ออกแบบในปัจจุบันสามารถใช้ซอฟต์แวร์นำมาสู่ชิ้นงานที่มีความแข็งแรง ใช้เนื้อวัสดุน้อย ลดค่าใช้จ่าย และที่สำคัญคือใช้เวลาสั้นในการออกแบบ สามารถแข่งขันได้ หลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูกไปโดยสิ้นเชิง

ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ช่วยในการออกแบบงานทางวิศวกรรม (Computer-Aided Engineering, CAE) ได้เข้ามามีบทบาทในภาคอุตสาหกรรมเป็นอย่างมาก ทำให้สถาบันการศึกษาจำเป็นต้องสอนองค์ความรู้ที่บรรจุในซอฟต์แวร์เหล่านี้ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถใช้ซอฟต์แวร์เหล่านี้ได้อย่างเหมาะสมถูกต้อง

ซอฟต์แวร์เหล่านี้ตั้งอยู่บนทฤษฎีของความเป็นจริง เช่น มวลต้องไม่มีการสูญหาย (conservation of mass) โมเมนตัมและพลังงานต้องเกิดการอนุรักษ์ (conservation of momentums and energy) แรงต้องอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium of forces) หรือกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ที่ว่าแรงเท่ากับมวล (mass) คูณกับความเร่ง (acceleration) ต้องเป็นจริงอยู่เสมอ

ทฤษฎีของความเป็นจริงดังกล่าวข้างต้นปรากฏอยู่ในตำราเรียนทางสายวิศวกรรมต่าง ๆ เช่น วิชาพลศาสตร์ของไหล (fluid dynamics) วิชาการถ่ายเทความร้อน (heat transfer) ด้วยการนำ (conduction) การพา (convection) และการแผ่รังสี (radiation) วิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) เพื่อหาความเค้น (stress) และการสั่นสะเทือน (vibration) ส่งผลทำให้การออกแบบงานต่าง ๆ เป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ

หากเปิดตำราเรียนในศาสตร์ต่าง ๆ ข้างต้น เราจะพบว่าทฤษฎีของความเป็นจริงเหล่านี้ล้วนเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) เมื่อเราแก้สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ได้ เราก็จะได้ผลลัพธ์ที่แสดงถึงปรากฏการณ์ซึ่งเกิดขึ้นในงานเหล่านั้น ความเข้าใจในคณิตศาสตร์จึงเป็นบันไดขั้นแรกและเป็นสาเหตุสำคัญทำให้แคลคูลัส (calculus) และสมการเชิงอนุพันธ์ กลายเป็นวิชาบังคับในการศึกษาขั้นพื้นฐาน

1.1.1 องค์ประกอบของปัญหา

ผลลัพธ์ (solution) หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนั้น ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลัก 3 ประการ คือ

(ก) สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ซึ่งบ่งบอกความเป็นจริงของปัญหานั้น ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการทราบปรากฏการณ์การไหลวนของอากาศเย็นภายในห้องปรับอากาศ เราจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแทนความเป็นจริงที่ว่า มวลของอากาศ โมเมนตัมของการไหล และพลังงาน ณ ตำแหน่งใด ๆ ต้องเกิดการอนุรักษ์ (conserved) เสมอ สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ปรากฏอยู่ในบทแรก ๆ ของตำราของไหล (fluid textbooks) ที่ใช้เรียนกันในระดับอุดมศึกษา ซึ่งประกอบไปด้วยพจน์อนุพันธ์ (partial derivative terms) แสดงโดยใช้สัญลักษณ์กรีก (Greek symbol) คล้ายเลขหกหันหัวกลับทาง

(ข) เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ผลลัพธ์ของปัญหาจะแตกต่างออกไปหากเงื่อนไขขอบเขตเปลี่ยนแปลงไป ดังเช่นในตัวอย่างของห้องปรับอากาศข้างต้น หากเราเปลี่ยนความเร็วของพัดลมเพื่อทำให้อากาศเย็นพุ่งออกมาจากเครื่องด้วยความเร็วสูงขึ้น ลักษณะการหมุนวนของอากาศเย็นภายในห้องก็จะแตกต่างไปจากเดิม ลมเย็นจะกระทบตัวเราด้วยความเร็วสูงขึ้นทำให้เรารู้สึกเย็นขึ้น

(ค) รูปร่าง (*geometry*) ของปัญหา หากเราเพิ่มโตะทำงานหรือตู้ใส่เอกสารลงในห้องปรับอากาศเดียวกันนี้ เนื้อที่ของการไหลก็จะลดน้อยลงทำให้รูปแบบของการไหลวนในห้องเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมอีกเช่นกัน

องค์ประกอบทั้ง 3 นี้ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ในทุก ๆ งานทางวิศวกรรม ยกตัวอย่างเช่น โครงสะพานเหล็กทางรถไฟจะเกิดความเค้น ตามตำแหน่งต่าง ๆ แตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับน้ำหนักของขบวนรถไฟซึ่งก็คือเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ความเค้นนี้ยังเปลี่ยนแปลงออกไปหากโครงสร้างนี้ใช้คานขนาดแตกต่างกันหรือออกแบบให้มีรูปร่างที่ต่างออกไปจากเดิม ซึ่งก็คือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของปัญหานั้นเอง

1.1.2 วิธีการแก้เพื่อหาผลลัพธ์

กระบวนการหาผลลัพธ์หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นมี 2 วิธีหลัก ดังนี้

(ก) วิธีเชิงวิเคราะห์ (*analytical method*) เป็นวิธีที่เราคุ้นเคยในช่วงของการเรียนระดับอุดมศึกษา กล่าวคือเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลเฉลยแม่นยำ (exact solution) วิธีเชิงวิเคราะห์นี้มีขีดจำกัด สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้สำหรับปัญหาที่มีรูปทรงง่าย ๆ เท่านั้น เช่น ท่อนโลหะยาวเรียว 1 ท่อน หรือแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 แผ่น ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ง่าย ๆ เช่นกัน โดยเฉพาะเมื่อสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) จะทำให้การแก้เพื่อหาผลลัพธ์นั้นเป็นไปได้และเกิดความสะดวกมากยิ่งขึ้น

หากปัญหามีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น โลหะแผ่นบางมีขอบโค้งและเจาะรูภายใน หรือเป็นโครงสร้างผนังตัวรถยนต์ซึ่งโค้งเว้าใน 3 มิติ กระบวนการหาผลลัพธ์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ข้างต้นนี้ไม่อาจนำมาใช้เพื่อหาผลลัพธ์ให้ได้ ดังนั้นในอดีต ผู้ออกแบบจึงมักใช้ประสบการณ์ที่สั่งสมมา หรือไม่ก็ลองผิดลองถูกบ้างซึ่งตั้งอยู่บนประสบการณ์ที่มีอยู่นั้น

(ข) วิธีเชิงตัวเลข (*numerical method*) เป็นวิธีที่เริ่มใช้กันมากขึ้นโดยเฉพาะเมื่อคอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น วิธีเชิงตัวเลขนี้ประกอบไปด้วยระดับพื้นฐานและระดับสูง แนวคิดที่สำคัญในวิธีเชิงตัวเลขก็คือการเปลี่ยนสมการทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์ที่ดูแปลกตา ไม่ว่าจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ การหาค่าอนุพันธ์ การหาค่าอินทิเกรต ฯลฯ ไปเป็นสมการทางพีชคณิตอันประกอบด้วยกระบวนการ

บวก ลบ คูณ และหารตัวเลขด้วยกันเท่านั้น แล้วประดิษฐ์โปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานแทนการกดเครื่องคิดเลขด้วยมือ

วิธีเชิงตัวเลขระดับพื้นฐาน (fundamentals) ประกอบไปด้วยหัวข้อของการหาราก (root) ของสมการเดียวและระบบสมการขนาดใหญ่ทั้งแบบเชิงเส้น (linear) และแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) การประดิษฐ์ฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) การหาค่าอนุพันธ์ (differentiation) การอินทิเกรต (integration) การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) รวมถึงวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง (finite difference method) ผู้ที่เข้าใจวิธีเชิงตัวเลขเบื้องต้นนี้จะพบว่าผลลัพธ์ของบางปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถหาได้อย่างง่ายดายขึ้นมาก

วิธีเชิงตัวเลขระดับสูง (advanced) เพื่อใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมในปัจจุบันประกอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) วิธีทั้งสองนี้ได้รับการยอมรับว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ ก่อให้เกิดซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ (commercial software) จำหน่ายกันในราคาสูง ซอฟต์แวร์เหล่านี้ตั้งอยู่บนศาสตร์ที่จำเพาะของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งตั้งอยู่บนองค์ความรู้ของวิธีเชิงตัวเลขระดับพื้นฐานอีกต่อหนึ่ง

ดังนั้นโดยสรุปก็คือ ผู้ที่ใช้ซอฟต์แวร์ในระดับสูงเช่นนี้ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมจึงควรมีความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข อย่างน้อยก็ควรทราบคร่าว ๆ ว่าผลลัพธ์ที่ปรากฏเป็นโทนสีต่างกันบนหน้าจอคอมพิวเตอร์นั้นเกิดขึ้นมาได้อย่างไร จึงสามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้มีความเที่ยงตรงและถูกต้อง

1.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ส่วนใหญ่ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาผลลัพธ์ เราจึงมาทำความเข้าใจวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนในหัวข้อย่อนี้

1.2.1 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นกระบวนการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณ (approximate solution) สำหรับปัญหาที่ประกอบไปด้วย 3 องค์ประกอบหลัก คือ สมการเชิงอนุพันธ์ เงื่อนไขขอบเขต และรูปร่างของปัญหาได้โดยคร่าว ๆ เนื่องจากปัญหาทาง

วิทยาศาสตร์ รวมทั้งศาสตร์อื่น ๆ มักถูกรอบคลุม (governed) ด้วยองค์ประกอบทั้งสามนี้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกประยุกต์นำไปใช้แก้ปัญหาได้หลากหลาย ทำให้นิยมใช้กันโดยแพร่หลาย ก่อให้เกิดซอฟต์แวร์ตามขึ้นมาเป็นจำนวนมากเช่นกัน

ซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมัยแรก เช่น NASTRAN (NAsa STRuctural ANalysis program) ซึ่งเน้นทางด้านกลศาสตร์ของแข็งเพียงอย่างเดียว ได้ถูกผลักดันโดยองค์การอวกาศนาซาด้วยการให้ทุนเพื่อประดิษฐ์ซอฟต์แวร์นี้ในปี พ.ศ. 2508 จำนวน 3 ล้านดอลลาร์ต่อลาร์สหรัฐ หากคิดเป็นราคาในปัจจุบันจะตกประมาณ 30 ล้านดอลลาร์ต่อลาร์สหรัฐหรือพันกว่าล้านบาทไทย เพียงไม่กี่ปีหลังจากซอฟต์แวร์ NASTRAN ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้น ซอฟต์แวร์แอนซิส (Ansys, ANalysis SYStem) จึงได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นตามมาเพื่อใช้ในเชิงพาณิชย์ ซอฟต์แวร์ทั้งสองได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่องเพื่อแก้ปัญหาศาสตร์ทางด้านอื่น ๆ และเป็นที่นิยมใช้กันจนถึงปัจจุบันนี้

ตลอดช่วงเวลาที่ผ่านมามหาวิทยาลัยต่าง ๆ ได้เปิดการเรียนการสอนวิชาทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์นี้กันอย่างกว้างขวาง ก่อให้เกิดตำรา (textbooks) ของวิธีนี้ในสาขาแตกต่างกันเป็นจำนวนมากหลายร้อยเล่ม ในขณะเดียวกันก็มีนักวิจัยเป็นจำนวนมากได้ศึกษาค้นคว้าทำให้วิธีนี้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น เกิดความเที่ยงตรงของผลลัพธ์มากขึ้นและใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง

แนวคิดหลักของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งโดเมน (domain) ของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ (element) ย่อย ๆ จากนั้นจึงสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับเอลิเมนต์เหล่านี้ ก่อนนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของทุกเอลิเมนต์มารวมกันเข้าเพื่อก่อให้เกิดระบบสมการขนาดใหญ่ แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงบนระบบสมการใหญ่นี้เพื่อแก้หาผลลัพธ์

กระบวนการโดยรวมข้างต้นนี้มีรูปแบบที่ชัดเจนและครอบคลุม 3 องค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหาทั่วไปเพื่อหาผลลัพธ์ เราจะมาศึกษาขั้นตอนโดยละเอียดมากยิ่งขึ้นในหัวข้อย่อยต่อไปนี้

1.2.2 ขั้นตอนในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

กระบวนการแก้ปัญหาภายในซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นตอนนี้เริ่มจากการสร้างโดเมนรูปร่างของปัญหา ซึ่งอาจประกอบด้วยพื้นผิว ขอบตรง ขอบโค้ง ฯลฯ ซอฟต์แวร์ส่วนใหญ่จึงมีวิธีการสร้างรูปทรงทางเรขาคณิตที่มักมี ขั้นตอนเฉพาะในตัวเอง ผู้เริ่มต้นจึงต้องฝึกฝนจนเกิดความเคยชิน จากนั้นซอฟต์แวร์จะแบ่ง โดเมนรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ เอลิเมนต์เหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะหาค่าของตัวไม่รู้ค่า (unknown)

ขั้นตอนที่ 2 เอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่เกิดขึ้นอาจเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าหากเป็น ปัญหาใน 2 มิติ เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมอาจประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มุมทั้งสาม หรือ 6 จุดต่อ คือที่มุมทั้งสามและที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามด้วย จำนวนจุดต่อเหล่านี้มีผลโดยตรงสู่ ลักษณะการกระจายของผลลัพธ์บนเอลิเมนต์นั้น ๆ ที่เราเรียกว่าฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ มีฟังก์ชันการประมาณภายใน เอลิเมนต์ที่ซับซ้อนกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ ดังนั้น จึงให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง มากกว่า แต่ในทางตรงกันข้ามก็จะใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นเพราะจำนวนจุดต่อบ่งบอก จำนวนตัวไม่รู้ค่าของปัญหานั้นมีมากขึ้น ในทำนองเดียวกัน โดเมนของปัญหาใน 3 มิติ อาจถูก แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ทรงตันย่อย ๆ เช่น รูปทรงลูกบาศก์คล้ายลูกเต๋าแต่ละด้านนั้นไม่ขนาน กัน เอลิเมนต์แบบ 3 มิตินี้ อาจประกอบไปด้วย 8 จุดต่อที่มุมทั้งแปด หรือ 20 จุดต่อหากมีจุดต่อ ที่กึ่งกลางของสันขอบด้วย

ขั้นตอนที่ 3 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ขั้นตอน นี้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และศึกษากันโดยละเอียดในการเรียนวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นเป็นสมการทางพีชคณิต (algebraic equations) ซึ่งประกอบด้วย กระบวนการทำบวก ลบ คูณ และหารตัวเลขเป็นจำนวนมาก จึงสามารถนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เหล่านี้ยังขึ้นอยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ที่ เลือกใช้ซึ่งมีฟังก์ชันการประมาณภายในที่แตกต่างกัน

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากทุกเอลิเมนต์มารวมกันขึ้นเป็นระบบสมการ ทางพีชคณิต (system of algebraic equations) ขนาดใหญ่ การรวมสมการจากเอลิเมนต์ย่อย เข้าด้วยกันต้องทำอย่างเหมาะสม เปรียบเสมือนการประกอบตัวต่อ (jigsaw puzzle) ขึ้นเป็น รูปภาพใหญ่ ตัวต่อแต่ละตัวจำเป็นต้องอยู่ในตำแหน่งที่ถูกต้อง จึงจะนำมาสู่ภาพใหญ่ที่ถูกต้อง สมบูรณ์ขึ้นมาได้

ขั้นตอนที่ 5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเข้ากับระบบสมการทางพีชคณิตขนาดใหญ่แล้ว จึงแก้เพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ขั้นตอนนี้อาจใช้เวลาในการคำนวณมาก โดยเฉพาะหากเป็นปัญหามีขนาดใหญ่ซึ่งอาจประกอบไปด้วยหลายแสนหรือหลายล้านสมการ หรือเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นซึ่งระบบสมการทางพีชคณิตขนาดใหญ่เช่นนี้ ต้องถูกแก้ซ้ำแล้วซ้ำอีกหลายครั้ง

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อได้ผลลัพธ์ที่จุดต่อจากขั้นตอนที่ 5 แล้ว ค่าอื่น ๆ ที่มีความสำคัญเช่นกัน จึงสามารถหาตามมาได้ ทำให้การแก้ปัญหานั้นเสร็จสิ้นโดยสมบูรณ์ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อได้ค่าการเสียรูป (displacements) ตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้างแล้ว ก็สามารถคำนวณหาค่าความเครียด (strains) และค่าความเค้น (stresses) ที่เกิดขึ้นตามมาได้ ตามลำดับ

จากขั้นตอนทั้ง 6 ดังอธิบายข้างต้นนี้จะเห็นได้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีกระบวนการที่เป็นขั้นตอนอย่างชัดเจน ให้ผลลัพธ์โดยสมบูรณ์ และสามารถประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาโดยทั่วไปได้ โดยองค์ประกอบที่สำคัญของปัญหาคือสมการเชิงอนุพันธ์ เงื่อนไขขอบเขต และรูปร่างของปัญหา ได้ถูกจัดการดูแลโดยครบถ้วนในขั้นตอนที่ 3, 5 และ 1 ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตามลำดับ

1.3 ซอฟต์แวร์แอนซิส

แอนซิส (Ansys) แรกเริ่มเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม ถูกประดิษฐ์ขึ้นโดยจอห์น สแวนสัน (John Swanson) ในปี พ.ศ. 2512 สมัยเป็นวิศวกรในบริษัทอิเล็กทรอนิกส์เวสติงเฮาส์ (Westinghouse Electric Corp.) เพื่อใช้วิเคราะห์งานในโรงงานปฏิกรณ์นิวเคลียร์ หลังจากได้เห็นโอกาสในประโยชน์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงได้ก่อตั้งบริษัทขึ้นเอง ผู้เขียนยังจำได้ว่าผู้ก่อตั้งผู้นี้เคยมานำเสนอซอฟต์แวร์แอนซิสในนาซา วิศวกรเข้าชมจะได้รับถ้วยกาแฟมีตรา Ansys เป็นของกำนัล ในปัจจุบัน ซอฟต์แวร์แอนซิสได้ถูกเผยแพร่จนเป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางทั่วโลก ทั้งนี้เพราะใช้งานได้ง่ายเมื่อเปรียบเทียบกับซอฟต์แวร์อื่น ๆ มีศักยภาพครอบคลุมการแก้ปัญหาในหลากหลายสาขา อีกทั้งยังเหมาะสมสำหรับผู้เริ่มศึกษา โดยเฉพาะนิสิตนักศึกษาผู้เรียนรู้ทฤษฎีเป็นส่วนใหญ่ในชั้นเรียน ทำให้เห็นผลลัพธ์ที่มีความหมายทางกายภาพแสดงเป็นโทนสีได้โดยตรงอย่างรวดเร็วบนหน้าจอคอมพิวเตอร์

1.3.1 โต๊ะช่างแอนซิส

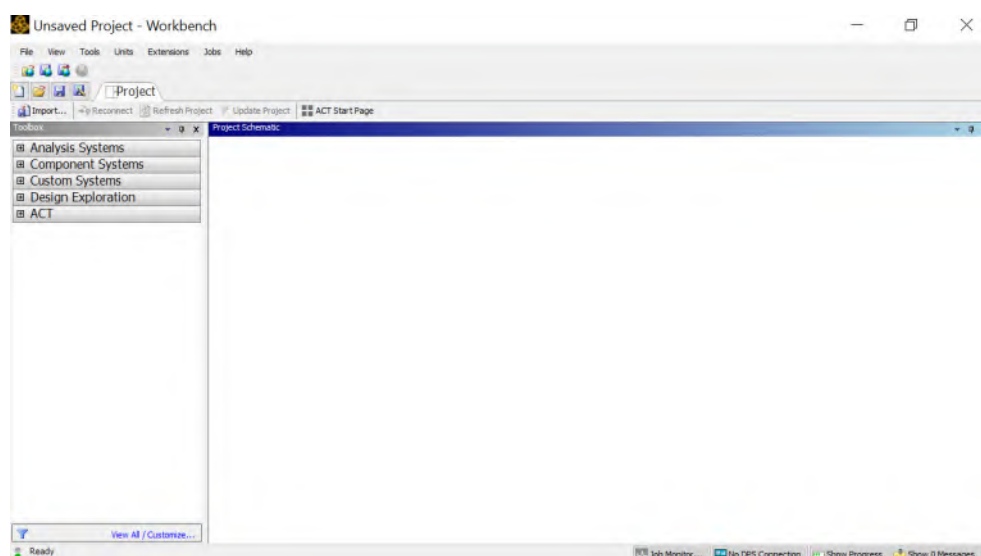
ผู้ใช้แอนซิสในอดีตต้องพิมพ์คำสั่งเป็นตัวอักษรผ่านแป้นพิมพ์ (keyboard) บนปฏิบัติการ DOS (Disk Operating System) เพื่อสร้างเส้นตรง เส้นโค้ง พื้นผิว การสั่งให้ตีเมช (meshing) การระบุชนิดของเอลิเมนต์ที่ต้องการใช้ การสั่งให้แก้ปัญหเพื่อหาผลลัพธ์ รวมถึงการพล็อตผลลัพธ์ที่ได้ ต่อมาหลังจากเกิดปฏิบัติการวินโดวส์ (Windows) การทำงานก็ง่ายขึ้นมากด้วยการใช้เมาส์ (mouse) เข้าช่วย

แอนซิสได้ปรับปรุงซอฟต์แวร์ทำให้การใช้งานนั้นง่ายขึ้นตามลำดับ โดยล่าสุดได้แนะนำโต๊ะช่าง (workbench) หรือโต๊ะทำงานของช่างขึ้น คำว่าโต๊ะช่างในที่นี้เปรียบเสมือนโต๊ะทำงานเพื่อทำให้ผู้ใช้เกิดปฏิสัมพันธ์กับซอฟต์แวร์ได้โดยตรงผ่านกราฟิก (Graphical User Interface, GUI) ส่งผลให้การแก้ปัญหасะดวกและรวดเร็วขึ้นไปอีกมาก

อนึ่ง ผู้ใช้โต๊ะช่างแอนซิสในระยะแรกอาจต้องใช้เวลาช่วงหนึ่งเพื่อปรับตัวอยู่บ้าง แต่เมื่อคุ้นเคยแล้วก็จะพบว่าโต๊ะช่างนี้มีประโยชน์ สามารถปรับเปลี่ยนเงื่อนไขต่าง ๆ ได้โดยง่าย นำมาสู่ผลลัพธ์ได้ในเวลาอันสั้น

1.3.2 หน้าจอและแถบเครื่องมือ

เมื่อเปิดโต๊ะช่างแอนซิสขึ้น หน้าจอประกอบไปด้วยแถบเครื่องมือในแนวนอน คล้ายกับซอฟต์แวร์วินโดวส์ทั่วไป รวมทั้งกรอบเล็กทางด้านซ้ายและกรอบใหญ่ทางด้านขวาของจอ ดังแสดงในรูป

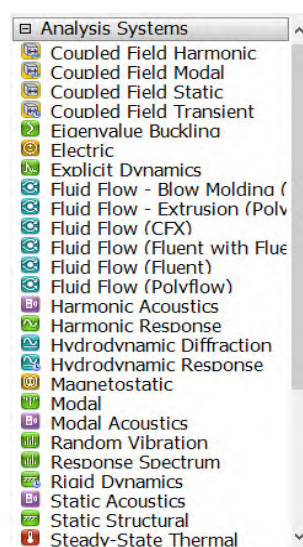


แถบเครื่องมือในแนวนอนด้านบน ประกอบไปด้วยคำสั่ง

- File การเปิดไฟล์ใหม่ ไฟล์เก่าที่มีอยู่แล้ว การบันทึกไฟล์ ฯลฯ
- View การจัดรูปแบบหน้าต่าง กล่องเครื่องมือ ตามความถนัดของผู้ใช้
- Tools บรรจุตัวเลือกต่าง เช่น เปลี่ยนพื้นหลังให้เป็นสีขาว นำตราโลโก (logo) ซอฟต์แวร์ออก ฯลฯ
- Units กำหนดหน่วยที่ต้องการใช้ อาจเป็นระบบอังกฤษ (English) หรือระบบสากล (System International)
- Help ขอข้อมูลและความช่วยเหลือจากโต๊ะช่างแอนซิส

กรอบใหญ่ด้านซ้ายเป็นกรอบกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ประกอบไปด้วยเครื่องมือหลากหลายชนิดเพื่อช่วยในการวิเคราะห์ปัญหา เช่น ระบบการวิเคราะห์ (Analysis Systems) ระบบย่อย (Component Systems) ระบบจำเพาะ (Custom Systems) ที่สามารถวิเคราะห์งานในหลายสาขา (disciplines) ไปพร้อมกัน และการขยายผลของการออกแบบ (Design Exploration)

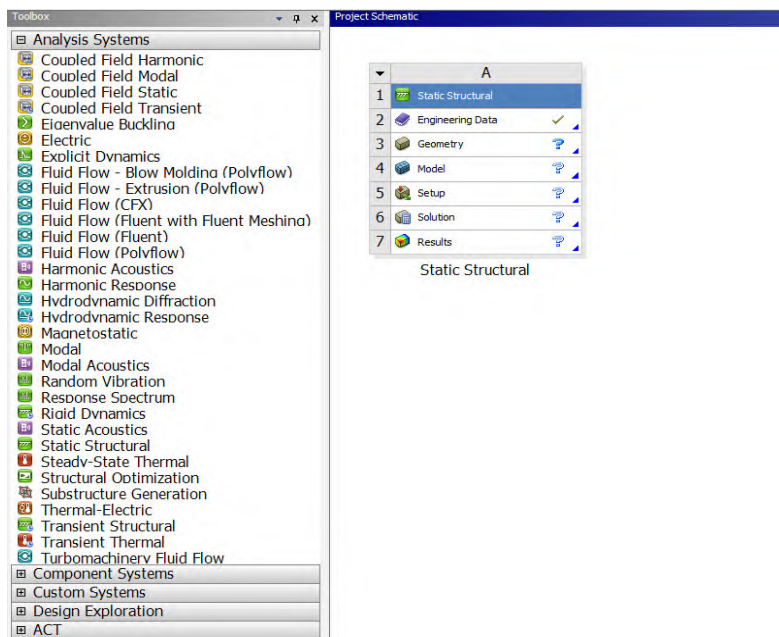
สำหรับผู้เริ่มใช้ซอฟต์แวร์แอนซิส ระบบเบื้องต้นคือระบบการวิเคราะห์ซึ่งประกอบไปด้วยการวิเคราะห์ปัญหาในหลายสาขา เช่น ปัญหาการไหล (Fluid Flow) ปัญหาโครงสร้างแบบสถิต (Static Structural) และแบบพลศาสตร์ (Transient Structural) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายใต้สภาวะอยู่ตัว (Steady-State Thermal) และสภาวะไม่อยู่ตัว (Transient Thermal) ฯลฯ ดังแสดงในรูป



กรอบใหญ่ทางด้านขวาเป็นกรอบการดำเนินงานของโปรเจกต์ที่ดำเนินการอยู่นั้น กรอบทางด้านขวานี้มีพื้นที่ค่อนข้างมากเพราะต้องแสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในแต่ละขั้นตอน นับตั้งแต่ การสร้างโมเดล การแสดงเมช การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต รวมไปถึงการแสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

1.3.3 ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์

เมื่อเราต้องการวิเคราะห์ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาทางด้านโครงสร้างแบบสถิต เราก็คลิกสองครั้ง (double-click) ที่ **Static Structural** กล่องขั้นตอนการดำเนินงานก็จะปรากฏขึ้นทางด้านขวามือ ดังแสดงในรูป



ภายในกล่องขั้นตอนการดำเนินงานนี้ ประกอบไปด้วย

1. **Static Structural** แสดงถึงหมวดของปัญหาโครงสร้างแบบสถิต
2. **Engineering Data** เป็นขั้นตอนการกำหนดข้อมูลวัสดุ ผู้ใช้สามารถกำหนดค่าวัสดุเอง หรือใช้ฐานข้อมูลวัสดุที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์แล้ว
3. **Geometry** เป็นขั้นตอนการสร้างรูปร่างของปัญหา ขั้นตอนนี้มักใช้เวลานาน หากปัญหามีรูปร่างที่ซับซ้อน

- 4. Model** เป็นขั้นตอนของการตีเมช แอนซิสสามารถสร้างเมชได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้คำสั่งง่าย ๆ
- 5. Setup** เป็นขั้นตอนของการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต เช่น การกำหนดโหลดจากแรงที่มากระทำ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจับยึด ฯลฯ
- 6. Solution** เป็นขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ ซอฟต์แวร์แอนซิสดำเนินการนี้ให้โดยสะดวก
- 7. Results** เป็นขั้นตอนของการแสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น ผลลัพธ์สามารถพล็อตได้ในหลายรูปแบบ เช่น แลปส์ เวกเตอร์ การเสียรูป ฯลฯ

เมื่อผู้วิเคราะห์ดำเนินการที่ละขั้นตอนได้อย่างถูกต้อง เครื่องหมายจะถูกปรากฏขึ้นทางด้านขวาของขั้นตอนนั้น การวิเคราะห์จะสำเร็จลุล่วงเมื่อเครื่องหมายถูกนี้ปรากฏอยู่ในทุกขั้นตอน โด๊สช่างแอนซิสแสดงเครื่องหมายหลากหลายแบบซึ่งอาจปรากฏอยู่ในทุกขั้นตอนขณะดำเนินการ เครื่องหมายเหล่านี้มีความหมายดังต่อไปนี้

-  หมายถึงยังไม่ได้ทำอะไรในขั้นตอนนี้เลย
-  หมายถึงต้องแก้ไขข้อมูลในขั้นตอนนี้ให้เป็นข้อมูลล่าสุดก่อน
-  หมายถึงขั้นตอนนี้ยังไม่ได้ดำเนินการหรือบางอย่างยังไม่สมบูรณ์
-  หมายถึงต้องแก้ไขข้อมูลเพราะข้อมูลก่อนหน้านี้ได้เปลี่ยนแปลงไป
-  หมายถึงข้อมูลทุกอย่างเรียบร้อยดีแล้ว
-  หมายถึงขั้นตอนนี้ได้ถูกให้หยุดลง ให้แก้ไขแล้วทำใหม่
-  หมายถึงกระบวนการภายในขั้นตอนนี้กำลังดำเนินการอยู่

ในบทต่อ ๆ ไป เราจะดำเนินการตามขั้นตอนดังอธิบายข้างต้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาในหลากหลายสาขา เริ่มตั้งแต่โครงสร้างซึ่งประกอบไปด้วยวัสดุท่อน วัสดุคาน วัสดุแผ่น วัสดุทึบตันในสามมิติ การวิเคราะห์พลศาสตร์ปัญหาโครงสร้าง ปัญหาการถ่ายเทความร้อน ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป รวมทั้งการไหลแบบไม่อัดตัวและแบบอัดตัวได้ เราจะพบว่าหากเราดำเนินการวิเคราะห์อย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยเหมาะสม โด๊สช่างแอนซิสจะแสดงเครื่องหมายถูก (✓) ในแต่ละขั้นตอน แต่หากแอนซิสแสดงเครื่องหมายอื่นใน

ขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่ง เราก็สามารถกลับไปแก้ไขข้อผิดพลาดในขั้นตอนนั้นให้ถูกต้องเสียก่อน ทำให้กระบวนการแก้ปัญหาโดยรวมเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.4 ประโยชน์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำไปใช้วิเคราะห์งานหลากหลายชนิดเป็นจำนวนมาก ในปัจจุบัน จนกลายเป็นเครื่องมือที่ได้รับการยอมรับกันทั่วโลก ส่งผลให้เกิดซอฟต์แวร์ที่จำหน่ายกันในราคาสูง งานต่าง ๆ ที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถวิเคราะห์ได้ประกอบไปด้วย

- (ก) การวิเคราะห์ความแข็งแรงของโครงสร้างรถยนต์ เครื่องบิน รถไฟ เรือ อาคารสูง สะพาน ลงไปถึงชิ้นงานขนาดเล็ก เช่น ชิ้นส่วนยานยนต์ มอเตอร์ แก๊ส ขวดน้ำ และภาชนะต่าง ๆ
- (ข) การวิเคราะห์การสั่นไหวของเสาไฟฟ้าแรงสูงและป้ายทางด่วนจากแรงลม การยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ขณะเกิดการชน ความเค้นจากอุณหภูมิสูงของกังหันใบพัดเทอร์ไบน์
- (ค) การวิเคราะห์การไหลของอากาศผ่านบ้านและอาคารในเมืองขนาดใหญ่ การหมุนวนของอากาศภายในอาคารเพื่อการประหยัดพลังงาน การทำนายสถานะอากาศ การเคลื่อนตัวของอากาศเย็นผ่านทวีป ทิศทางการไหลท่วมของน้ำเมื่อเกิดอุทกภัย
- (ง) การวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับเสาส่งสัญญาณทางอากาศ ทรานซิสเตอร์ มอเตอร์ สายไฟฟ้าแรงสูง
- (จ) การวิเคราะห์การไหลในเส้นเลือดตามร่างกายและหัวใจ ไปจนถึงอุปกรณ์ทางการแพทย์ กระดูกข้อต่อเทียม เท้าเทียม รากฟันเทียม
- (ฉ) และงานอื่น ๆ ที่ไม่สามารถทดลองได้เพราะอาจเป็นอันตรายต่อมนุษย์หรือมีค่าใช้จ่ายสูง เช่น อานุภาพการระเบิดของจีปนาอูธ การไหลของแก๊สที่เป็นพิษต่อมนุษย์ในโรงงานอุตสาหกรรม

ประโยชน์ต่าง ๆ ดังตัวอย่างข้างต้นนี้เองทำให้สถาบันการศึกษาจำนวนมากบรรจุวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิชาที่นิสิตนักศึกษาในหลายสาขาต้องเรียนรู้กัน ก่อให้เกิดความเข้าใจในทฤษฎีที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ เพื่อทำให้ใช้ซอฟต์แวร์ได้อย่างถูกต้องจึงมีความมั่นใจในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

บทที่ 2

การวิเคราะห์วัสดุท่อน

การวิเคราะห์วัสดุท่อนจัดเป็นพื้นฐานเบื้องต้นในการศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะมีจำนวนตัวไม่รู้ค่า (unknown) น้อย ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้คือค่าของการเสียรูป (displacement) ซึ่งมีความหมายทางกายภาพที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ วัสดุท่อน (truss, rod) รับแรงดึงหรือแรงกดในแนวแกนได้เพียงอย่างเดียว ทำให้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสปริง (spring) ได้โดยตรง

2.1 สมการพื้นฐาน

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์

วัสดุท่อนยาวเรียว วางตัวอยู่ในแนวแกน x อาจถูกยึดที่ปลายข้างหนึ่งและมีแรงดึงหรือแรงกดที่ปลายอีกข้างหนึ่ง จะเกิดการยืดหรือหดตัวขึ้นจนอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium) ความสมดุลนี้เกิดขึ้นทุกตำแหน่งตลอดความยาวของวัสดุท่อนยาวเรียว นั้น สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงถึงความสมดุลนี้หากไม่คำนึงถึงแรงจากน้ำหนักของตัววัสดุท่อน (body force) เอง คือ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$

โดย σ_x แทนค่าความเค้น (stress) ที่เกิดขึ้นในท่อนวัสดุยาวเรียว

2.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์มีเพียงหนึ่งสมการ จึงคาดคะเนได้ว่าตัวไม่รู้ค่าต้องมีเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น ค่าความเค้นข้างต้นนี้แปรผันไปกับค่าความเครียด (strain) ตามกฎของฮุก (Hooke's law) คือ

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

โดย E แทนค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) หรือเรียกกันทั่วไปว่าเป็นโมดูลัสของยัง (Young's modulus) ส่วน ε_x คือค่าความเครียดซึ่งหากการเสียรูปนั้นมีค่าน้อย (small deformation) ค่าความเครียดนี้คือ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

โดย $u = u(x)$ แทนค่าการเสียรูปซึ่งแปรผันไปกับระยะ x ตามแนวแกนของวัสดุท่อนนั้น ดังนั้น หากเราทราบผลลัพธ์ของการเสียรูป เราจึงหาค่าความเค้นได้โดยตรงจาก

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

ซึ่งทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาวัสดุท่อนนี้ในกรณีที่ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นนั้นคงตัว (constant) คือ

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

ในเชิงของการวิเคราะห์ หากปัญหาประกอบไปด้วยวัสดุเพียงท่อนเดียว เราสามารถอินทิเกรต (integrate) สมการเชิงอนุพันธ์นี้สองครั้ง แล้วจะพบว่าการเสียรูปนั้นแปรผันเชิงเส้นตรง (linear) ไปกับแกน x ในขณะที่ค่าความเค้นนั้นคงที่ตลอดความยาวของวัสดุท่อน แต่หากปัญหานั้นประกอบไปด้วยหลายวัสดุท่อนหลายท่อนต่อเข้าด้วยกัน หรือต่อเข้าอย่างระเกะระกะในสองหรือสามมิติ การหาผลลัพธ์ในเชิงของการวิเคราะห์นั้นทำได้ยาก วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงเข้ามามีบทบาท ดังอธิบายในหัวข้อย่อยต่อไป

2.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals, MWR) แนวคิดของวิธีนี้คือการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการทางพีชคณิต (algebraic equations) อันประกอบด้วยการทำวก ลบ คูณ และหารตัวเลข เพื่อก่อให้เกิดความผิดพลาด (error) จากผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) น้อยที่สุด รายละเอียดขั้นตอนของวิธีนี้สามารถศึกษาได้จากหนังสือ “ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม” ซึ่งแต่งโดยผู้เขียนเช่นกัน

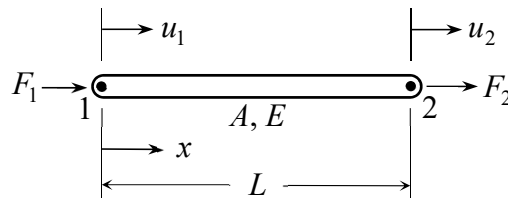
สมการทางพีชคณิตที่เกิดขึ้นมักเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ (matrix) เพื่อสะดวกแก่การนำไปประดิษฐ์ต่อขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง ในกรณีของวัสดุท่อนนี้ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้น คือ

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

โดย $[K]$ เรียกว่าเมทริกซ์ความแข็งแรงเกร็ง (stiffness matrix); $\{u\}$ เป็นเมทริกซ์แนวตั้ง (column matrix) หรือมักเรียกกันว่าเป็นเวกเตอร์ (vector) ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (node); และ $\{F\}$ เป็นเมทริกซ์แนวตั้งหรือเวกเตอร์ที่บรรจุค่าของแรงที่จุดต่อ ขนาดและรายละเอียดภายในเมทริกซ์เหล่านี้ขึ้นอยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ที่เลือกใช้ ดังที่จะอธิบายในหัวข้อย่อต่อไปนี้

2.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์

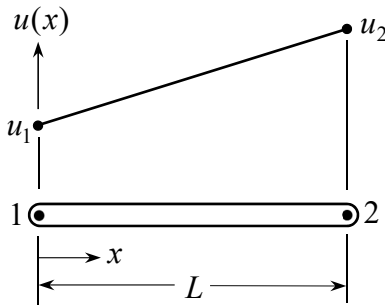
เอลิเมนต์วัสดุท่อน (truss element) พื้นฐานที่ง่ายแก่การศึกษานี้วางตัวอยู่ในแนวแกน x ประกอบด้วย 2 จุดต่อที่ปลาย ดังแสดงในรูป



โดย A แทนพื้นที่หน้าตัด (cross-sectional area), E แทนค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุท่อน, L แทนความยาวของท่อน, u_1 และ u_2 แทนค่าการเคลื่อนตัวของจุดต่อ 1 และ 2, F_1 และ F_2 แทนแรงกระทำที่จุดต่อ 1 และ 2 ตามลำดับ

ลักษณะการกระจายของการเสียรูปถูกสมมุติให้แปรผันเชิงเส้นตรงไปในแนวแกน x ดังแสดงในรูป การแปรผันนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบได้ดังนี้

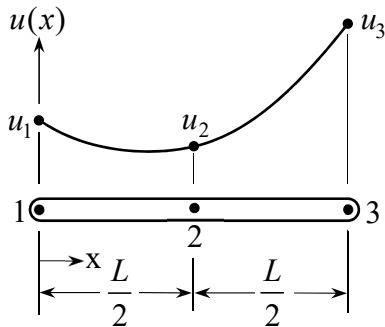
$$\begin{aligned} u(x) &= N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= \underset{(1 \times 2)}{\begin{bmatrix} N(x) \end{bmatrix}} \underset{(2 \times 1)}{\{u\}} \end{aligned}$$



โดย $N_1(x)$ และ $N_2(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) ซึ่งในกรณีนี้ คือ

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{และ} \quad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

อนึ่ง เอลิเมนต์วัสดุท่อนอาจมีจำนวนจุดต่อมากกว่า 2 จุดต่อก็ได้ เช่น เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูป ในกรณีนี้ ลักษณะการกระจายคือ



$$\begin{aligned} u(x) &= N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 \\ &= \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= \underset{(1 \times 3)}{\begin{bmatrix} N(x) \end{bmatrix}} \underset{(3 \times 1)}{\{u\}} \end{aligned}$$

โดย $N_1(x)$, $N_2(x)$ และ $N_3(x)$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายใน ซึ่งคือ

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad ; \quad N_2(x) = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad ; \quad N_3(x) = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

ลักษณะการกระจายของเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อซึ่งมีความซับซ้อนมากขึ้นกว่าเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ ช่วยทำให้ผลลัพธ์มีความเที่ยงตรงมากขึ้น แต่จะใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นตามไปด้วย เพราะเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อนี้มีจำนวนตัวไม่รู้ค่าที่มากขึ้น

เมื่อเราใช้เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้น คือ

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

หากปัญหานั้นประกอบไปด้วยเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อนี้รวม 10 เอลิเมนต์ซึ่งอาจมีพื้นที่หน้าตัด A , โมดูลัสความยืดหยุ่น E และความยาว L แตกต่างกันไป เราก็ต้องสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ข้างต้นนี้จำนวน 10 ชุด จากนั้นจึงนำสมการทั้ง 10 ชุดนี้มาประกอบกันเข้าให้ถูกต้องตามรูปแบบการเรียงตัวของเอลิเมนต์เหล่านี้ในโมเดลของปัญหา ก่อให้เกิดระบบสมการพีชคณิตขนาดใหญ่ แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการพีชคณิตนี้ ก่อนแก้เพื่อหาค่าการเคลื่อนตัว ณ จุดต่อต่าง ๆ

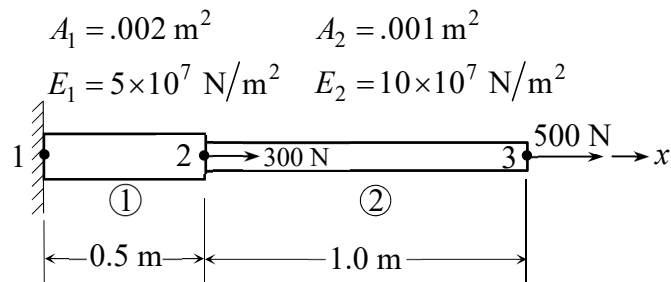
หากเอลิเมนต์เหล่านี้วางตัวต่อกันใน 2 หรือ 3 มิติ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ข้างต้นต้องถูกแปลง (transformation) เพราะแต่ละจุดต่อสามารถเคลื่อนตัวไปในแนวแกน y และ z ได้ด้วย ทำให้เมทริกซ์ความแข็งแกร่ง $[K]$ นั้นมีขนาดใหญ่ขึ้น ส่งผลกระทบโดยตรงสู่ระบบสมการรวมทางพีชคณิตที่ต้องมีขนาดใหญ่ขึ้นเช่นกัน ปริมาณหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ไปในการคำนวณก็จะมากขึ้นตามไปด้วย

อุปสรรคเหล่านี้สามารถแก้ไขได้โดยง่ายด้วยการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งสามารถรองรับรูปแบบของปัญหาได้หลากหลาย ในหัวข้อถัดไป เราจะศึกษาการใช้ซอฟต์แวร์แอนซิสเพื่อแก้ไขปัญหาย่างง่ายก่อน เราจะพบว่าซอฟต์แวร์เดียวกันนี้สามารถแก้ปัญหารูปร่างซับซ้อนได้โดยสะดวก ทั้งนี้ก็เพราะว่ากระบวนการภายในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ดำเนินไปอย่างเป็นขั้นเป็นตอน รูปร่างของปัญหาอาจเปลี่ยนไปได้หลากหลาย แต่โปรแกรมภายในที่ใช้ในการคำนวณยังคงเหมือนเดิม

2.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้

2.3.1 ปัญหาโครงสร้าง 1 มิติ

โลหะ 2 ท่อนยาว 0.5 และ 1.0 m ยึดต่อกันในแนวแกน x ดังแสดงในรูป มีพื้นที่หน้าตัด .002 และ .001 m^2 ทำด้วยวัสดุซึ่งมีค่าโมดูลัสของยังเท่ากับ 5×10^7 และ 10×10^7 N/ m^2 ตามลำดับ ด้านซ้ายของโมเดลยึดติดกับผนัง ในขณะที่จุดต่อตรงกลางและด้านขวาถูกแรงดึง 300 และ 500 N ไปในแนวแกน x กำหนดให้ใช้เพียง 2 เอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อและความเค้นที่เกิดขึ้นในแต่ละเอลิเมนต์



(ก) เปิดโต๊ะช่างแอนซิสและตั้งค่าเบื้องต้น

- เปิด **Ansys Workbench** แล้วเลือกเมนู **Units** ที่แถบด้านบนเป็น **Metric (kg,m,s,°C,A,N,V)**
- ในหน้าต่าง **Analysis Systems** คลิกสองครั้งที่ปุ่ม **Static Structural** กล่องเล็ก ๆ จะปรากฏขึ้นในหน้าต่าง **Project Schematic**
- พิมพ์ชื่อโปรเจกต์ว่า **1D Truss Problem** แทนชื่อ **Static Structural** ในกรอบสีฟ้า แล้วกดปุ่ม **Enter**
- คลิกขวาที่แถบ **Engineering Data** แล้วเลือก **Edit...** หน้าต่าง **A2: Engineering Data** จะปรากฏขึ้น จากนั้นคลิกสองครั้งที่ **Click here to add a new material** แล้วพิมพ์ชื่อวัสดุสำหรับเอลิเมนต์หมายเลข 1 เช่น **Material 1** แล้วกดปุ่ม **Enter**
- คลิก **Isotropic Elasticity** อยู่ใต้ **Linear Elastic** ค้างไว้แล้วลากมาที่ **Property** ในหน้าต่างกลางล่าง กรอกค่า **Young's Modulus** เป็น **5e7** แล้วกด **Enter** และกรอกค่า **Poisson's Ratio** เป็น **0.3** แล้วกด **Enter**

