



หนังสือชุดเทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์



เวกเตอร์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ประกอบด้วย

- ⊗ ความหมายของเวกเตอร์ เวกเตอร์ที่เท่ากัน และเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน
- ⊗ การบวกเวกเตอร์
- ⊗ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- ⊗ การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต
- ⊗ เวกเตอร์ในระบบ 2 มิติ
- ⊗ เวกเตอร์ในระบบ 3 มิติ
- ⊗ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ในระบบ 3 มิติ
- ⊗ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ในระบบ 3 มิติ
- ⊗ แบบทดสอบเวกเตอร์

กวีญา นาอวประทีป

วศ.บ.เกียรตินิยม (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย), M.S., M.A. (University of Michigan, USA)

เทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์ : เวกเตอร์

เขียนโดย กวียา เนาวประทีป

ISBN (E-book) 2025-1024-0053-2

จำหน่ายอีบุ๊ก พฤศจิกายน 2568

ราคา 79 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป

ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

จัดทำโดย

พจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เลขที่ 45 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์

แขวงบางยี่ขัน เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

โทรศัพท์ : 0-2433-7755-7 โทรสาร : 0-2433-7703

จัดจำหน่ายในรูปแบบสิ่งพิมพ์อิเล็กทรอนิกส์โดย

บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด

85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน กรุงเทพฯ 10170

โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เป้าหมายของการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้นมุ่งพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม ทั้งยังสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

และเพื่อให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จและบรรลุเป้าหมายในการเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้เขียนจึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : เวกเตอร์** เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักเทคนิคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้เก่งได้ด้วยตนเอง ด้วยการนำไปอ่านและฝึกทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่มีอยู่อย่างหลากหลาย เฉพาะเรื่องที่ตนสนใจหรือที่ยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และยังสามารถนำไปใช้เสริมกับการเรียนกวดวิชาตามสถาบันต่างๆ อีกทั้งครู-อาจารย์ผู้สอนก็สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้ด้วย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอนได้ตามสมควร หากมีข้อบกพร่องหรือผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ด้วยความปรารถนาดี

กวิยา นาวประทีป

kawiya@physicscenter.com

คำนำสำนักพิมพ์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า การเรียนการสอนในปัจจุบัน กระทรวงศึกษาธิการ ได้ประกาศใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มีความเหมาะสมชัดเจนทั้งเป้าหมายของหลักสูตรในการมุ่งพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติ โดยได้มีการกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดในรายวิชาไว้อย่างชัดเจน เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในแต่ละระดับชั้น

สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการเรียนการสอนในกลุ่ม **สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** ซึ่งได้มีการกำหนดเป้าหมายสำคัญของการพัฒนาคุณภาพผู้เรียนให้สามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิตและใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ดังนั้นทางสำนักพิมพ์ฯ จึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์** เฉพาะเรื่องขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหลักคณิตศาสตร์บางเรื่องได้เลือกนำไปใช้ศึกษาด้วยตนเองให้เข้าใจได้อย่างถ่องแท้ เพราะมีการสรุปหลักในแต่ละเรื่อง มีแบบฝึกหัด และแบบทดสอบที่หลากหลายไว้ให้ลองทำพร้อมมีเฉลยแยกเล่มไว้ให้ตรวจสอบความถูกต้องได้ด้วยตนเอง

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

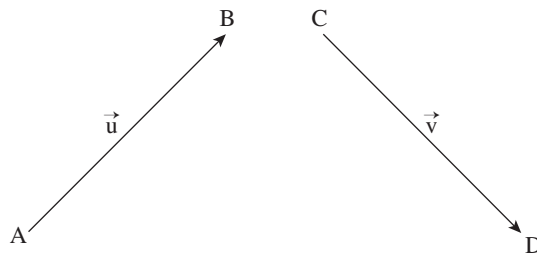
สารบัญ

1. ความหมายของเวกเตอร์ เวกเตอร์ที่เท่ากัน และเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน	7
2. การบวกเวกเตอร์	12
3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	16
4. การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต	22
5. เวกเตอร์ในระบบ 2 มิติ	32
6. เวกเตอร์ในระบบ 3 มิติ	48
7. ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ในระบบ 3 มิติ	61
8. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ในระบบ 3 มิติ	72
แบบทดสอบเวกเตอร์	80

เวกเตอร์

1. ความหมายของเวกเตอร์ เวกเตอร์ที่เท่ากัน และเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน

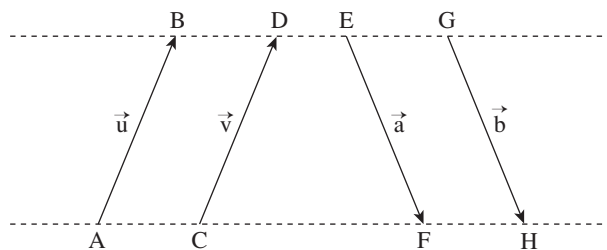
เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง เราเขียนส่วนของเส้นตรงแทนขนาดเวกเตอร์ และหัวลูกศรแทนทิศทาง



$\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์จาก A ไป B หรือ $\vec{u}$ มีขนาด $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{u}|$

$\overrightarrow{CD}$ เป็นเวกเตอร์จาก C ไป D หรือ $\vec{v}$ มีขนาด $|\overrightarrow{CD}| = |\vec{v}|$

● เวกเตอร์ที่เท่ากัน



$\vec{u} = \vec{v}$ เมื่อ 1. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

2. $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

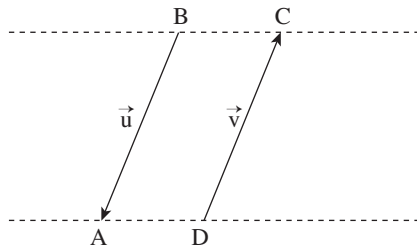
จากรูป $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ หรือ $\vec{u} = \vec{v}$
 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ หรือ $\vec{a} = \vec{b}$



บทนิยาม

$\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u} = \vec{v}$

● เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน



- $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นนิเสธกัน เมื่อ
1. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$
 2. $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

นั่นคือ $\vec{u} = -\vec{v}$ หรือ $\vec{v} = -\vec{u}$ และ $\vec{u}$ กับ $-\vec{u}$ เป็นนิเสธกัน

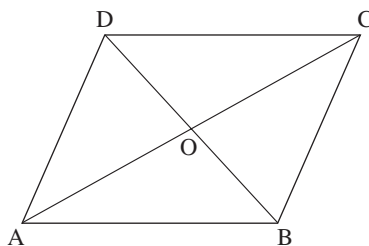


บทนิยาม

นิเสธของ $\vec{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\vec{u}$

แบบฝึกหัดที่ 1

1.

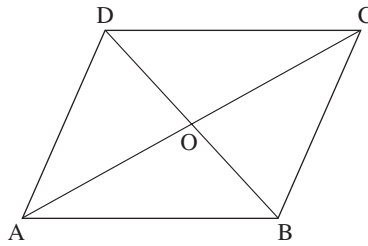


จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ให้นักเรียนเขียนเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ต่อไปนี้

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\overrightarrow{AB} =$ _____ | 5) $\overrightarrow{BA} =$ _____ |
| 2) $\overrightarrow{AD} =$ _____ | 6) $\overrightarrow{CB} =$ _____ |
| 3) $\overrightarrow{AO} =$ _____ | 7) $\overrightarrow{OA} =$ _____ |
| 4) $\overrightarrow{BO} =$ _____ | 8) $\overrightarrow{OB} =$ _____ |

2.



จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
ให้นักเรียนเขียนนิเสธของเวกเตอร์ต่อไปนี้

- 1) $\overrightarrow{AB}$ คือ _____
- 2) $\overrightarrow{BC}$ คือ _____
- 3) $\overrightarrow{AO}$ คือ _____
- 4) $\overrightarrow{BO}$ คือ _____
- 5) $\overrightarrow{BA}$ คือ _____
- 6) $\overrightarrow{DA}$ คือ _____
- 7) $\overrightarrow{OA}$ คือ _____
- 8) $\overrightarrow{OB}$ คือ _____

3. จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้ (การกำหนดทิศทางจะกำหนดโดยบอกค่าของมุมที่วัดจากทิศเหนือตามเข็มนาฬิกาไปยังทิศที่ต้องการ ค่าของมุมจะอยู่ระหว่าง 0° ถึง 360° ถ้าค่าของมุมต่ำกว่า 100° จะเขียนศูนย์นำทุกครั้ง) ระบบที่ใช้เรียกว่า (Three figure system)

- 1) 120 เมตร ไปทางทิศเหนือ

- 2) 100 เมตร ในทิศ 150°

3) 75 กิโลเมตร ในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

4) 150 กิโลเมตร ในทิศตะวันตกเฉียงใต้

5) 50 เมตร ในทิศ 060 องศา

4. ถ้า $\vec{n}$ แทนการเดินทาง 500 เมตร ในทิศ 045° จงอธิบายถึงการเดินทางที่แทนด้วย $-\vec{n}$

5. หน้อยเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร ดังนั้นหน้อยจะอยู่ห่างจากจุดตั้งต้นเท่าใด และอยู่ในทิศทางใดของจุดตั้งต้น

6. ชายคนหนึ่งออกเดินทางไปทางทิศ 030° เป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร แล้วออกเดินทางต่อไปในทิศ 150° เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร เขาจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดตั้งต้น

7. อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าเขาพายเรือข้ามฝั่งแม่น้ำโดยพายไปในทางทิศเหนือขณะที่น้ำไหลไปทางทิศตะวันออกด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ 6 กิโลเมตร เรือของเขาจะแล่นไปในทิศทางใดด้วยอัตราเร็วเท่าใด และเมื่อพายเรือไปได้เป็นเวลา 10 นาที เขาจะไปได้ไกลเท่าใด

(กำหนด $\tan 36^\circ 52' = 0.75$)

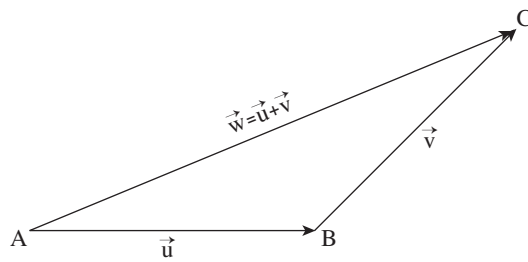
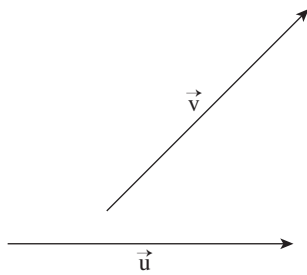
2. การบวกเวกเตอร์



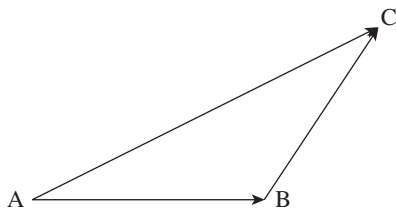
บทนิยาม

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดให้ สามารถหา $\vec{u} + \vec{v}$ ได้ดังนี้

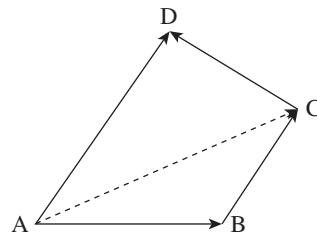
1. เลือกจุด A จุดใดจุดหนึ่งเป็นจุดเริ่มต้น
2. หาจุด B ที่ทำให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
3. หาจุด C ที่ทำให้ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$
4. จะได้ $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ ซึ่งนิยามว่า เป็นผลบวกของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนได้ด้วย
สัญลักษณ์ $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ หรือ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



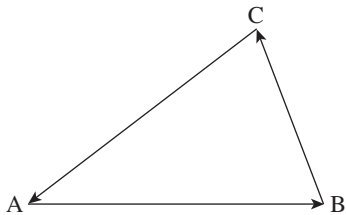
ตัวอย่างเช่น



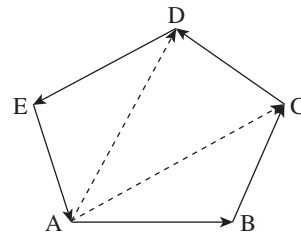
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

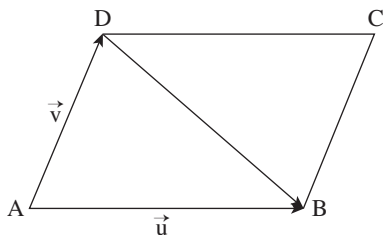
● การลบเวกเตอร์

สำหรับการลบเวกเตอร์ เรานิยามด้วยการบวกเวกเตอร์กับนิเสธของเวกเตอร์ตัวลบ



บทนิยาม

กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ ผลลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u} - \vec{v}$ โดยที่ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

กำหนดให้ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\vec{v} + \vec{u} \\ &= \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\vec{u} + \vec{v} \\ &= \vec{v} + (-\vec{u}) = \vec{v} - \vec{u}\end{aligned}$$

จะเห็นว่าเวกเตอร์ที่เป็นผลลบ จะมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด เป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ทั้งสองที่กำหนดให้

● เวกเตอร์ศูนย์ (Zero vector)

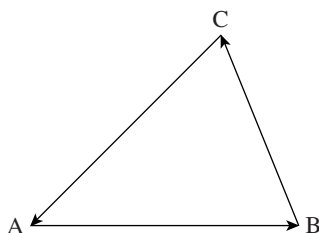


บทนิยาม

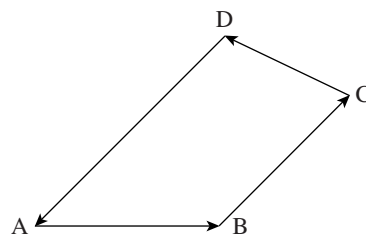
เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{0}$

นั่นคือ เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

ตัวอย่างเช่น $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{CC} = \vec{0}$



จากรูป $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$



จากรูป $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$