แคลคูลัส 1
CALCULUS I

ชัยรัตน์ มดนาค

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House
www.nupress.grad.nu.ac.th

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร 99 หมู่ 9 อาคารมหาธรรมราชา ชั้น 1 มหาวิทยาลัยนเรศวร
ตำบลท่าโพธิ์ อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833-8836 E-mail : nuph@nu.ac.th
www.nupress.grad.nu.ac.th **สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร** **@nupress**

สงวนลิขสิทธิ์ ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร ห้ามทำซ้ำ ดัดแปลง เผยแพร่ต่อสาธารณชนไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ ไม่ว่าในรูปแบบใด ๆ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร เท่านั้น

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ
National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

ชัยรัตน์ มดนาค.

แคลคูลัส 1 = Calculus I.-- พิษณุโลก : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2567.
642 หน้า.
1. แคลคูลัส I. ชื่อเรื่อง.

515
ISBN 978-616-426-345-1
ISBN (e-book) 978-616-426-346-8
สพน. 137
ราคา **400** บาท

พิมพ์ครั้งแรก เมษายน พ.ศ. 2567

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

วางจำหน่ายที่
1. **ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 โทร. 0 2218 9812
2. **ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์**
ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0 2579 0113
3. **ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์**
ถนนพระจันทร์ แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0 2613 3899
4. **สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร**
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร อาคารมหาธรรมราชา จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833-8836

ประธานกองบรรณาธิการ รองศาสตราจารย์ ดร.กรองกาญจน์ ชูทิพย์ คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
กองบรรณาธิการ รองศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ แย้มเม่น • รองศาสตราจารย์สุทัศน์ เยี่ยมวัฒนา • รองศาสตราจารย์ ดร.ศักดา สมกุล • รองศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี • ศาสตราจารย์ ดร. พญ.สุธาทิพย์ พงษ์เจริญ • ศาสตราจารย์ ดร. ภญ.กรกนก อิงคนินันท์ • รองศาสตราจารย์ ดร.นิทรา กิจธีระวุฒิวงษ์ • ศาสตราจารย์ ดร.สุทิสา ถาน้อย • รองศาสตราจารย์ ดร.กิตติมา ชาญวิชัย • รองศาสตราจารย์ ดร.รุจโรจน์ แก้วอุไร • รองศาสตราจารย์ นาวาโท ดร.วัฒนชัย หมั่นยิ่ง • รองศาสตราจารย์ ดร.วัชรพล พุทธรักษา • รองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พันธ์ กิจสนาโยธิน • ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยุวยงค์ จันทรวิจิตร • ผู้ช่วยศาสตราจารย์จรรยารักษ์ สุวพันธ์ • พัชรี ท้วมใจดี • นวิพรรณ ตันติพลาผล
ประสานงาน ภัคคีณี เทิดสิทธิกุล
ฝ่ายขาย/การเงิน พิมพาภรณ์ ดวงสาโรจน์ • วสันต์ มาสวัสดิ์
ออกแบบปก สัญญา จันทา
ออกแบบรูปเล่ม สรญา แสงเย็นพันธ์
พิมพ์ที่ ห้างหุ้นส่วนจำกัด พี.ดีจิตอล การพิมพ์ 194/15 ถนนพญาลิไท ตำบล ในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก

pubat สำนักพิมพ์นี้เป็นสมาชิกสมาคมผู้จัดพิมพ์และผู้จำหน่ายหนังสือแห่งประเทศไทย https://pubat.or.th

พิมพ์บน Double A กระดาษคุณภาพ เพื่อผลงานคุณภาพ

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
โทร. 0 5596 8836 Email : nuph@nu.ac.th

@nupress สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

คำนำ

เนื้อหาหลักที่สำคัญในแคลคูลัส 1 คือ การแนะนำสู่โลกพื้นฐานของแคลคูลัส ซึ่งประกอบไปด้วยการแนะนำหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การหาลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ และการให้ความรู้พื้นฐานเรื่องของฟังก์ชัน สมบัติของฟังก์ชัน การดำเนินการต่าง ๆ ต่อฟังก์ชัน เช่น การหาลิมิต การหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์ เมื่อทำความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันเป็นอย่างดีแล้ว เนื้อหาในแคลคูลัส 1 ยังคงนำเสนอการประยุกต์ของตัวดำเนินการต่าง ๆ กับฟังก์ชัน เช่น การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง การหาปริมาตรที่เกี่ยวเนื่องกับฟังก์ชัน การประยุกต์อนุพันธ์ในเรื่องอัตราสัมพัทธ์และการหาอัตราการเพิ่มลดในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง ดังนั้น แคลคูลัส 1 คือพื้นฐานที่สำคัญต่อผู้ที่สนใจในแคลคูลัส และเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่ต้องใช้แคลคูลัสพื้นฐานในการศึกษาต่อยอดในศาสตร์ชั้นสูงหรือในงานที่เกี่ยวข้อง

สารบัญ

1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และลิมิตของฟังก์ชัน 1
(Mathematical Induction and Limits of Functions)

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)..... 2
ลิมิตของฟังก์ชัน (Limits of functions) 16
ลิมิตทางเดียว (One-sided limits)..... 56
ความต่อเนื่อง (Continuity)..... 68
ลิมิตอนันต์ (Infinite limits) 97
ลิมิตที่อนันต์ (Limits at infinity) 106
บทสรุป..... 128
แบบฝึกหัด..... 129

2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 133
(Derivative of Functions)

บทนิยามของอนุพันธ์ (Definition of the derivative) 134
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (The Derivative of functions)..... 137
อนุพันธ์อันดับสูง (Higher derivatives) 151
อนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit differentiation)..... 154
อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย (Derivative of transcendental functions) 159
อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม (Derivative of logarithm functions)..... 166
อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Derivative of trigonometric functions) 179
อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Derivative of inverse trigonometric functions)..... 191
ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic functions)..... 209
บทสรุป..... 219
แบบฝึกหัด..... 219

3 การประยุกต์อนุพันธ์ 223
(Applications of Derivative)

ปัญหาอัตราสัมพัทธ์ (Related – rate problems) 224
ปัญหาค่าสุดขีด (Extremum problems) 234
การประยุกต์อนุพันธ์สำหรับการวาดกราฟ (Graph sketching using the derivative) 241
การประมาณค่าเชิงเส้นและผลต่างเชิงอนุพันธ์ (Linear approximation and differentials) 285
กฎโลปิตาล (L'Hôpital's Rule) 294
การประยุกต์อื่น ๆ (Other applications) 307
บทสรุป 310
แบบฝึกหัด 311

4 ปริพันธ์ 315
(Integrals)

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (The fundamental theorems of calculus) 316
ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (Indefinite integrals) 326
กฎการแทนค่า (The substitution rule) 328
ปริพันธ์จำกัดเขต (Definite integrals) 333
ปริพันธ์ของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Integration of even and odd functions) 364
การหาปริพันธ์สำหรับฟังก์ชันต่าง ๆ (Integrals of other functions) 366
ปริพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Integrals of exponential functions) 370
ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integrals of trigonometric functions) 379
ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse trigonometric functions) 392
ปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Integration of hyperbolic functions) 404
บทสรุป 418
แบบฝึกหัด 419

5 **เทคนิคการหาปริพันธ์ 425**
(Techniques of Integration)

การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกส่วน (Integration by parts) 426

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบแน่นอน (Trigonometric integrals) 435

การหาปริพันธ์โดยการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric substitution) 450

การหาปริพันธ์โดยใช้เศษส่วนย่อย (Integration of rational functions by partial fractions) 462

บทสรุป 503

แบบฝึกหัด 504

6 **การประยุกต์ปริพันธ์ 507**
(Applications of Integration)

พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Areas of a region between curves) 508

ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุน (Volume of a solid of revolution) 525

วิธีแบบจาน (Method of disks) 525

วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (Method of cylindrical shells) 542

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper integrals) 587

บทสรุป 608

แบบฝึกหัด 609

ตารางสมบัติตรีโกณมิติผกผัน 614

บรรณานุกรม 616

เฉลยแบบฝึกหัด

เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 1 618
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 2 618
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 3 621
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 4 623
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 5 625
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 6 627

ดัชนี 629

01

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และลิมิตของฟังก์ชัน

Mathematical Induction and Limits of Functions

สำหรับบทนี้จะเป็นการแนะนำการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์พื้นฐานที่เรียกว่า การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และการหาลิมิตของฟังก์ชันต่าง ๆ หลักการประมาณค่าของฟังก์ชันโดยการสร้างตารางและนำไปสู่บทนิยามของลิมิต การแก้ปัญหาของลิมิต และการใช้บทนิยามของลิมิตเพื่อสังเกตพฤติกรรมของฟังก์ชัน ตลอดทั้งบทจะมีตัวอย่างที่หลากหลาย ตั้งแต่ระดับง่ายและระดับที่ต้องใช้เวลาเพื่อความเข้าใจ

ก่อนที่จะเริ่มในเนื้อหาหลักของวิชาแคลคูลัส 1 ในส่วนนี้จะพิจารณาพื้นฐานต่าง ๆ ของหลักคณิตศาสตร์ก่อน โดยแยกเป็นส่วน ๆ ดังต่อไปนี้

1.1 การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

การพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์นั้น คือ กระบวนการวิธีทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ สูตร ทฤษฎีบท การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ หรืออนุกรมของจำนวนนับธรรมชาติที่รวมศูนย์ด้วย

หลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์นั้น คล้าย ๆ กับการเล่นโดมิโน กล่าวคือ สมมติว่าตั้งแท่งโดมิโนเรียงกัน โดยเว้นระยะห่างให้แท่งที่เรียงถัดกันสามารถล้มแท่งถัดไปได้ ถ้าแท่งก่อนหน้าถูกผลัก ซึ่งตามกฎนี้ จะเห็นว่า ถ้าแท่งแรกถูกผลักให้ล้ม แท่งที่สองก็จะล้มตาม และทำให้แท่งที่สามล้มตามไปด้วย และท้ายสุดแล้ว ทุกแท่งที่ถูกวางเรียงกันก็จะล้มทั้งหมด ในการที่จะมั่นใจได้ว่า ทุกแท่งล้มแน่นอน ตามหลักการแล้วจะต้องทราบว่า

ขั้นที่ 1 แท่งแรกของโดมิโนต้องล้ม

ขั้นที่ 2 แท่งก่อนหน้าล้ม แท่งถัดไปต้องล้มตาม

หลักการนี้ คือแนวคิดพื้นฐานของหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ที่นับได้ นั่นคือ เป็นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ใต้พื้นฐานของจำนวนนับนั่นเอง

บทนิยาม 1.1 เซต S เรียกว่าเป็น เซตอุปนัย (inductive set) ถ้า $1 \in S$ และ $x+1 \in S$ เมื่อไหร่ก็ตามที่ $x \in S$

สมมติว่า ต้องการหาผลรวมของจำนวนเต็มบวก $1,2,3,4,\ldots,n$ นั่นคือ สำหรับ $n=3$ ได้ผลบวกเป็น $1+2+3$ และเมื่อ $n=4$ ได้ผลบวกเป็น $1+2+3+4$ เรื่อยไป และเนื่องจาก

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

02

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
Derivative of Functions

เนื้อหาในบทนี้จะประกอบไปด้วยบทนิยามการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้กฎต่าง ๆ ตัวอย่างของบทนี้จะเริ่มจากการใช้กฎพื้นฐานของอนุพันธ์ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การประยุกต์ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์สำหรับช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันบางประเภท โดยจะมีการเสริมความรู้พื้นฐานและสมบัติของฟังก์ชันแต่ละประเภทก่อนที่จะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ๆ อีกด้วย

เนื้อหาหลัก ๆ สำหรับบทนี้ จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ อนุพันธ์คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของบางสิ่งบางอย่าง หลักการของอนุพันธ์นำไปสู่การประยุกต์ในปัญหาต่าง ๆ มากมาย เช่น ความชันของเส้นสัมผัสของกราฟ ณ จุดที่พิจารณา ปัญหาความเร็วความเร่งของเครื่องจักรกล ปัญหาการหาค่าสูงสุดต่ำสุด และ ปัญหาการหาพื้นที่ เป็นต้น ก่อนที่จะไปสู่ปัญหาประยุกต์ต่าง ๆ การเรียนรู้พื้นฐานที่สำคัญของอนุพันธ์เป็นสิ่งจำเป็น

2.1 บทนิยามของอนุพันธ์ (Definition of the derivative)

เริ่มต้นด้วยการแนะนำบทนิยามของการหาอนุพันธ์ ดังนี้

บทนิยาม 2.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด $x=a$ คือ

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ถ้าลิมิตสามารถหาค่าได้ จะกล่าวว่า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x=a$

ในบางครั้งสามารถใช้รูปแบบ

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

บทนิยาม 2.2 สมมติให้ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x=a$ เส้นสัมผัสของกราฟ $y=f(x)$ ที่จุด $P=(a,f(a))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P ด้วยความชัน $f'(a)$ ซึ่งมีสมการเป็น

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

03

การประยุกต์อนุพันธ์
Applications of Derivative

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะเป็นการประยุกต์อนุพันธ์สำหรับปัญหาในชีวิตจริง การใช้อนุพันธ์ตรวจสอบพฤติกรรมของฟังก์ชัน และนำไปสู่การประยุกต์อนุพันธ์ในการวาดกราฟของฟังก์ชันประเภทต่าง ๆ อีกทั้งอนุพันธ์ยังมีความเกี่ยวข้องกับการหาลิมิตของฟังก์ชันและการประมาณค่าของฟังก์ชันอีกด้วย โดยอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีความเชื่อมโยงกับเนื้อหาทางพีชคณิตในหลายด้าน เช่น ความชันและการเปลี่ยนแปลง และสามารถนำไปประยุกต์ในหลาย ๆ ศาสตร์

อนุพันธ์แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของบางสิ่งบางอย่างที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของสิ่งที่เกี่ยวข้อง เช่น การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของน้ำในสระในแต่ละช่วงเวลา ความเร็วของรถยนต์ในขณะขับขี่ การเปลี่ยนแปลงประชากรของสัตว์ป่าในแต่ละปี และยังมีปัญหาอื่น ๆ อีกมากมายที่ไม่ได้กล่าวถึง และไม่สามารถนำเสนอทุกปัญหาในหนังสือเล่มนี้ได้ โดยจะกล่าวถึงเฉพาะปัญหาต่าง ๆ ต่อไปนี้

3.1 ปัญหาอัตราสัมพัทธ์ (Related – rate problems)

ปัญหาอัตราสัมพัทธ์เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับผลกระทบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่ง ที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่น ๆ ซึ่งในการแก้ปัญหาอัตราสัมพัทธ์นั้น ส่วนใหญ่แล้วจะใช้แนวคิดของกฎลูกโซ่ หรือ อนุพันธ์โดยปริยาย

ตัวอย่าง 3.1

สูบแก๊สเข้าไปในบอลลูนรูปทรงกลมลูกหนึ่งด้วยอัตรา 5 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีในขณะที่รัศมียาว 10 เมตร

วิธีทำ กำหนดให้ V เป็นปริมาตรของบอลลูน ณ เวลา t ใด ๆ และ r เป็นรัศมีของบอลลูน ณ เวลา t ใด ๆ เช่นกัน ดังนั้น ปริมาตรของบอลลูน หาได้จาก

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

สิ่งที่ทราบจากโจทย์ก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตร นั่นคือได้ $\frac{dV}{dt} = 5$ และตำแหน่งที่ต้องการวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี อยู่ที่เมื่อ $r = 10$

โดยหาอนุพันธ์เทียบ t ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}(r^3)\end{aligned}$$

04

ปริพันธ์
Integrals

อนุพันธ์และปริพันธ์มีความสัมพันธ์กัน และอธิบายได้โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในลำดับถัดไป ดังนั้นเมื่อเข้าใจในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแล้ว การเข้าใจหลักการในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันคงจะไม่ใช่เรื่องยากมากนัก สำหรับบทนี้จะแนะนำพื้นฐานการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ คล้ายกับการหาอนุพันธ์ โดยจะเริ่มจากนิยามของการหาปริพันธ์ การใช้กฎต่าง ๆ ของปริพันธ์ การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันประเภทต่าง ๆ และเทคนิคเบื้องต้นของการหาปริพันธ์ ตัวอย่างมีความหลากหลายและง่ายต่อการเข้าใจ

ปริพันธ์สามารถประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่ หาปริมาตร และอื่น ๆ อีกหลายด้าน โดยปริพันธ์จะแบ่งออกเป็นสองส่วนที่สำคัญคือ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integrals) และปริพันธ์จำกัดเขต (definite integrals) โดยจะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และปฏิยานุพันธ์ก่อน

4.1 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (The fundamental theorems of calculus)

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และปฏิยานุพันธ์ โดยแบ่งออกเป็นสองส่วนดังรายละเอียดที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

F เรียกว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ถ้า $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$

ตัวอย่าง 4.1

a) $F(x)=e^x$ คือ ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=e^x$ เนื่องจากว่า $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

b) $F(x)=\frac{x^3}{3}$ คือ ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x^2$ เนื่องจากว่า

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3})=3\cdot\frac{x^2}{3}=x^2$$

c) สำหรับ $x>0$, $F(x)=\ln x$ คือปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\frac{1}{x}$ เนื่องจากว่า

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

d) $F(x)=\sin x$ คือปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\cos x$ เนื่องจากว่า

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

05

เทคนิคการหาปริพันธ์

Techniques of Integration

เนื้อหาในบทนี้เป็นบทเสริมเพิ่มเติมเรื่องการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน บางครั้งการใช้สูตรพื้นฐานในการหาปริพันธ์อาจไม่เพียงพอต่อการแก้ปัญหา โดยเนื้อหาในบทนี้จะแนะนำวิธีต่าง ๆ ที่จะเป็นเครื่องมือช่วยพิจารณาในการแก้ปัญหาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันประเภทต่าง ๆ ตัวอย่างมีความหลากหลายและครอบคลุมเกือบทุกประเภทของฟังก์ชัน โดยแต่ละตัวอย่างจะแสดงวิธีทำอย่างละเอียดทุกขั้นตอนเพื่อง่ายต่อการเข้าใจ

เนื้อหาในบทที่ผ่านมาได้กล่าวถึงปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ และสูตรพื้นฐานของปริพันธ์ สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคในการหาปริพันธ์ในกรณีที่สูตรพื้นฐานไม่สามารถหาได้

5.1 การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกส่วน (Integration by parts)

วิธีนี้เป็นวิธีที่จะเปลี่ยนโจทย์ให้อยู่ในรูป $\int udv$ และใช้สูตร

$$\int udv = uv - \int vdu$$

ตัวอย่าง 5.1

จงหา $\int x\sin xdx$

วิธีทำ พิจารณากำหนดให้ $u = x$ และ $dv = \sin xdx$ ดังนั้น

$$\frac{du}{dx} = 1 \text{ และ } \int dv = \int \sin xdx$$

หรือ $du = dx$ และ $v = -\cos x$ โดยการแทนสูตรได้ว่า

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= \int udv = uv - \int vdu \\ &= x\cdot(-\cos x) + \int \cos xdx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2

จงหา $\int x\cos(4x)dx$

วิธีทำ โดยวิธีแยกส่วนให้ $u = x$ และ $dv = \cos(4x)dx$

ดังนั้น $\frac{du}{dx} = 1$ และ $\int dv = \int \cos(4x)dx$

06

การประยุกต์ปริพันธ์

Applications of Integration

บทสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้เป็นการใช้ความรู้เรื่องการหาปริพันธ์ประยุกต์กับปัญหาต่าง ๆ เช่น การหาพื้นที่ระหว่างกราฟ การหาปริมาตรของทรงตัน เป็นต้น โดยปัญหาประยุกต์แต่ละปัญหาจะแสดงแนวคิดในการได้มาของสูตรอย่างละเอียด อีกทั้งความหลากหลายของตัวอย่างและการแสดงเพิ่มเติมโดยรูปภาพ จะทำให้ผู้อ่านมีความเข้าใจมากขึ้น

เนื้อหาในบทนี้จะเป็นการประยุกต์ใช้ปริพันธ์สำหรับปัญหาต่าง ๆ โดยแยกพิจารณาเป็นรายหัวข้อ ดังนี้

6.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Areas of a region between curves)

จากเรื่องปริพันธ์ $\int_a^b f(x)dx$ แสดงถึงการหาพื้นที่ระหว่างกราฟของฟังก์ชัน f และแกน x ระหว่าง $x=a$ และ $x=b$ หรือถ้าฟังก์ชันมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ในช่วงโดเมนที่กำหนดให้ จะกล่าวว่าปริพันธ์จำกัดเขตหรือการหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน สังเกตจากตัวอย่างดังต่อไปนี้

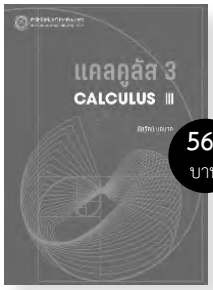
ตัวอย่าง 6.1

จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+2$ จาก $x=1$ ถึง $x=2$

วิธีทำ จากเรื่องปริพันธ์ได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟ (เหนือแกน x) ของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+2$ จาก $x=1$ ถึง $x=2$ หาได้จาก

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 f(x)dx \\ &= \int_1^2 (x^2+2)dx \\ &= \frac{x^3}{3}+2x\Big|_1^2 \\ &= (\frac{2^3}{3}+2\cdot 2)-(\frac{1^3}{3}+2\cdot 1) \\ &= \frac{13}{3} \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกหัด



แคลคูลัส 3 Calculus III

ผู้แต่ง : รศ. ดร.ชัยรัตน์ มดนาค

แคลคูลัส 3 (Calculus III) เป็นเนื้อหาขั้นตอนสุดท้ายของแคลคูลัส หนังสือ เล่มนี้แบ่งเป็นสองส่วน ในส่วนแรกเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งและอันดับสูง การใช้ผลการแปลงลาปลาซและลาปลาซผกผันสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับส่วนที่สองเป็นการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรและแคลคูลัสของเวกเตอร์ เช่น ปริพันธ์ตามผิวและทฤษฎีบทของเกาส์และสโตกส์ เป็นต้น ทฤษฎีบทและตัวอย่างในหนังสือเล่มนี้ มีความละเอียดสูงและชัดเจน ซึ่งเหมาะสมกับผู้ที่มีความสนใจแคลคูลัสในทุกระดับ ทุกอาชีพ โดยเฉพาะผู้ที่ต้องการคำปรึกษา ทางด้านแคลคูลัสสามารถศึกษาและเข้าใจได้ด้วยตนเอง

ทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัด

ผู้แต่ง : รศ. ดร.กิจติ รอดเทศ

“ทฤษฎีตัวแทน มีประโยชน์ในวงกว้างทั้งทางด้านคณิตศาสตร์และทางด้านวิทยาศาสตร์แขนงต่าง ๆ ตำราเล่มนี้มุ่งหวังอธิบายทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัดโดยใช้ความรู้พื้นฐานทางพีชคณิต เชิงเส้นและทฤษฎีกรุปเบื้องต้นอีกทั้งมุ่งเน้นให้เห็นถึงแรงจูงใจ ในการนิยามสิ่งต่างๆอย่างเป็นธรรมชาติ และบทประยุกต์ทางทฤษฎีกรุปที่โดดเด่น”

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์
ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

ผู้แต่ง : รศ. ดร.รัชฎา วิริยะพงศ์

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) คือ ตัวแทนสถานการณ์ หรือโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่ต้องการหา คำตอบซึ่งเขียนในรูปแบบสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันหรือสมการทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจในสถานการณ์หรือปัญหานั้น ๆ ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ มากขึ้น และเพื่อทำนายพฤติกรรมหรือกลไกทางพลศาสตร์ ของสถานการณ์นั้น ๆ โดยในหนังสือเล่มนี้จะเน้นที่ตัวแบบ เชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

หนังสือเล่มนี้เหมาะสำหรับผู้ที่เริ่มต้นศึกษาและสนใจ ในเรื่องการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์และการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแก้ไขปัญหาและพยากรณ์พฤติกรรมของระบบในสถานการณ์จริงต่าง ๆ ซึ่งสามารถใช้ในการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรี หรือปริญญาโท และเป็นแนวทางในการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์ประยุกต์

NUPH online store
www.nupress.grad.nu.ac.th
0 5596 8833-8836 สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร nuph@nu.ac.th

หนังสือแนะนำ

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป
Generalized Matrix Functions

ผู้แต่ง : รศ. ดร.กิจติ รอดเทศ

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปเป็นฟังก์ชันค่าจำนวนเชิงซ้อนบนปริภูมิเมทริกซ์จัตุรัส (ภาคขยายของฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์) ซึ่งถูกนิยามไว้ในปีคริสต์ศักราช 1918 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียนามว่า อิสไซ ชูร์ หลังจากนั้นฟังก์ชันนี้ได้ถูกศึกษาอย่างกว้างขวาง ทั้งทางทฤษฎีและทางการประยุกต์ หนังสือเล่มนี้ มุ่งเน้นอธิบายถึงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป โดยแสดงให้เห็นถึงเทคนิคการพิสูจน์ที่น่าสนใจ รวมถึงการนำสมบัติที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในพีชคณิตเชิงหลายเส้น ทฤษฎีเมทริกซ์ ทฤษฎีการไม่แปรผัน และทฤษฎีกราฟ อีกทั้งได้เสนอข้อความ คาดการณ์ และปัญหาปลายเปิดที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปไว้อย่างหลากหลาย เพื่อให้ผู้อ่านนำไปวิจัยต่อยอดต่อไป

คณิตศาสตร์ประกันชีวิตเบื้องต้น

ผู้แต่ง : รศ. ดร.ชัยรัตน์ มดนาค

คณิตศาสตร์และสถิติเป็นหัวใจหลักของอุตสาหกรรมประกันภัย การทำประกันเป็นข้อตกลงระหว่าง “ผู้เอาประกัน” กับ “ผู้ให้ประกัน” โดยมี “กรมธรรม์” เป็นพันธสัญญาที่ระบุว่าผู้เอาประกันต้องจ่ายเบี้ยประกันเท่าใด และจะได้รับผลประโยชน์ใดบ้าง ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ ที่ระบุจะไม่สามารถแก้ไขได้หลังจากเซ็นสัญญาร่วมกันแล้ว สิ่งสำคัญที่สุดในกรมธรรม์ คือ เบี้ยประกัน เรียกเก็บและเงินผลประโยชน์ ซึ่งจะต้องมีการคำนวณ อย่างรอบคอบโดยใช้หลักสถิติและคณิตศาสตร์ที่สำคัญหนังสือเล่มนี้รวบรวมหลักคณิตศาสตร์และสถิติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการต่อยอด องค์ความรู้ให้กับผู้อ่าน โดยหลักประกันภัยในการประกันชีวิตเพียงอย่างเดียว

ทฤษฎีสนามควอนตัม
Quantum Field Theory พิมพ์ครั้งที่ 2

ผู้แต่ง : รศ. ดร.พิเชฐ วณิชชาพงศ์เจริญ

ทฤษฎีสนามควอนตัม คือ กรอบของทฤษฎีที่อธิบายสนามที่มีสมบัติทางควอนตัม โดยที่สนามคือฟังก์ชันของตำแหน่งในกาลอวกาศ หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่ออธิบายหลักการ แนวคิด และการคำนวณในทฤษฎีสนามควอนตัม โดยเน้นอภิปรายประเด็นของการนำทฤษฎีสนามควอนตัมไปอธิบายหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับฟิสิกส์อนุภาค โดยมีประเด็นหลัก ได้แก่ ความรู้เบื้องต้นที่เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาทฤษฎีสนามควอนตัม การวิเคราะห์สนามอิสระ การวิเคราะห์ทฤษฎีสนามสเกลาร์ที่มีอันตรกิริยาในตัว การวิเคราะห์พลศาสตร์ไฟฟ้าเชิงควอนตัมรวมทั้งตัวอย่างทิศทางการพัฒนาของเนื้อหาที่นอกเหนือจากที่อภิปรายในส่วนหลัก หนังสือเล่มนี้เหมาะสำหรับผู้สอนระดับบัณฑิตศึกษา หรือการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เนื่องจากอธิบายแนวคิด การวิเคราะห์และวิธีการคำนวณโดยละเอียด รวมทั้ง มีการวิจารณ์ประเด็นที่สำคัญและสรุปท้ายบท เพื่อให้ผู้อ่านตรวจสอบความเข้าใจ และทราบความเชื่อมโยงเบื้องต้นกับเนื้อหาอื่น นอกจากนี้ หนังสือเล่มนี้ยังมีโจทย์ปัญหาและเฉลยเพื่อให้ผู้อ่านได้เสริมความเข้าใจในเนื้อหา

0 5596 8833-8836 สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร nuph@nu.ac.th
NUPH online store
www.nupress.grad.nu.ac.th

สำนักพิมพ์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

สั่งซื้อหนังสือออนไลน์

จัดส่งถึงบ้านสะดวกรวดเร็ว

สั่งซื้อทันที

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่
ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

nuph@nu.ac.th
สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
0 5596 8833-8836
nu_publishing

NUPH
online store
www.nupress.grad.nu.ac.th