



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความน่าจะเป็นและสถิติ สำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า



มานพ วงศ์สายสุวรรณ
พงศธร เศรษฐจิตร
เทียนชัย ประดิศถายน
ลัญญกร วุฒิสีทธิกุลกิจ

คณะแพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ศูนย์วิจัยทางการแพทย์

ศูนย์วิจัยทางการแพทย์



ความน่าจะเป็นและสถิติ สำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า

หนังสือความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับวิศวกรรมไฟฟ้าเล่มนี้
เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นตำราประกอบการเรียนการสอนวิชา
ความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับนิสิตและนักศึกษาภาควิชา
วิศวกรรมไฟฟ้าและสาขาอื่นที่เกี่ยวข้อง โดยเนื้อหาในหนังสือ
เล่มนี้แบ่งออกเป็น 7 บทคือ บทที่ 1 อธิบายทฤษฎีความน่าจะเป็น
บทที่ 2 นำเสนอการนิยามตัวแปรสุ่มแบบวิฤตและแบบต่อเนื่อง
พร้อมยกตัวอย่างตัวแปรสุ่มที่สำคัญ บทที่ 3 บรรยายถึง
การคำนวณหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ค่าคาดหวัง และ
ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ บทที่ 4 ขยายการบรรยายให้
ครอบคลุมถึงตัวแปรสุ่มหลายตัว บทที่ 5 เป็นบทแรกที่กล่าว
ถึงสถิติศาสตร์ในเรื่องของการชักตัวอย่าง บทที่ 6 กล่าวถึง
การประมาณค่าพารามิเตอร์ และบทที่ 7 เป็นเรื่องของการ
ทดสอบสมมติฐาน สำหรับการเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียน
ได้เน้นวิธีการอธิบายเนื้อหาที่ทำให้ผู้อ่านสามารถเข้าใจได้ด้วย
ตนเอง นอกจากนี้ยังได้รวบรวมโจทย์แบบฝึกหัดไว้อย่าง
มากมายโดยทุกบทจะมีโจทย์ตัวอย่างและแบบฝึกหัดท้ายบท
พร้อมเฉลยทุกข้อ เพื่อให้ผู้อ่านสามารถเข้าใจถึงตัวทฤษฎีบท
ได้อย่างลึกซึ้งยิ่งขึ้น ดังนั้น หนังสือเล่มนี้จึงเหมาะสำหรับใช้
เป็นตำราประกอบการเรียนการสอนวิชาความน่าจะเป็นและ
สถิติสำหรับนิสิต นักศึกษาระดับปริญญาตรีทางด้านวิศวกรรม
ไฟฟ้าตลอดจนผู้ที่สนใจได้เป็นอย่างดี



จัดพิมพ์โดย

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร. 0-2218-3269 โทรสาร 0-2218-3266

e-mail: cupress@chula.ac.th

www.chulapress.com *Knowledge to All*

สรรคุณคำวิชาการ สู้สังคม

ประวัติผู้แต่ง



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ

การศึกษา

วศ.บ. (ไฟฟ้า) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2531

M. Eng. Tokyo Institute of Technology 2534

D. Eng. Tokyo Institute of Technology 2538

ตำแหน่งงานในปัจจุบัน

อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานวิจัย

รางวัลที่ 1 สาขาวิทยาการด้านการแพทย์และสาธารณสุข สภาวิจัยแห่งชาติ 2544

(ร่วมกับนายแพทย์ทนายท ดิสุตจิต และผู้ช่วยศาสตราจารย์เจตกุล โสภานิตย์)



ดร.พงศธร เศรษฐธีร

การศึกษา

วศ.บ. และ วศ.ม. (ไฟฟ้า) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2541 และ 2544

Ph.D. (Telecommunications) University of Manchester 2550

ตำแหน่งงานในปัจจุบัน

อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยมหิดล

งานวิจัย

การพัฒนาซอฟต์แวร์สำหรับการวางแผนความถี่บนระบบสื่อสารไร้สาย



รองศาสตราจารย์ ดร.เทียนชัย ประดิศถยาน

การศึกษา

วศ.บ. เกียรตินิยม (ไฟฟ้า) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2508

Ph.D. (Control system) Glasgow University 2514

ประสบการณ์

อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2509 - 2549

ปัจจุบัน ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์และที่ปรึกษาอาวุโส

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร



รองศาสตราจารย์ ดร.ลัญจกร วุฒิสถิธิกุลกิจ

การศึกษา

วศ.บ. ไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2533

M.Sc. (Telecommunications) University of Essex 2535

Ph.D. (Electronics systems) University of Essex 2540

ตำแหน่งงานในปัจจุบัน

อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานวิจัย

โครงข่ายมัลติเพิล็กซ์เชิงความยาวคลื่น ระบบสื่อสารไร้สาย



ความน่าจะเป็นและสถิติ สำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า

วันที่ 8 มกราคม 2552

ความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า

มานพ วงศ์สายสุวรรณ

พงศธร เศรษฐจิตร

เทียนชัย ประดิศถายน

ลัญฉกร วุฒิสัทติกุลกิจ



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2552

มานพ วงศ์สายสุวรรณ และคณะ

ความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า / มานพ วงศ์สายสุวรรณ และคณะ

1. _____

2. _____

000

ISBN xxx-xxx-xx-xxxx-x

สพจ. 1234



สรรคุณคำวิชาการ ผู้สังคัม
www.ChulaPress.com
Knowledge to All

ลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน.....เล่ม พ.ศ. 2552

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้นต้องได้รับ

อนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้จัดทำนาย ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระแก้ว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881 โทรสาร 0-2254-9495

ม.เนรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5300-1 โทรสาร 0-2160-5304

CALL CENTER โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

เครือข่าย ศูนย์หนังสือ ม.แม่ฟ้าหลวง จ.เชียงราย โทร. 0-5391-7020-4 โทรสาร 0-5391-7025

ศูนย์หนังสือทะเลแก้ว ม.ราชภัฏพิบูลสงคราม จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-7010 โทรสาร 0-5521-6388

ศูนย์หนังสือ ม.วลัยลักษณ์ จ.นครศรีธรรมราช โทร. 0-7567-3648-51 โทรสาร 0-7567-3652

ศูนย์หนังสือตรัง จ.ตรัง โทร. 0-7521-8115 โทรสาร 0-7521-8115

ร้านหนังสือดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) रामคำแหง 43/1 โทร. 0-2538-2573 โทรสาร 0-2539-7091

ร้านค้า, หนังสือเข้าชั้นเรียน ติดต่อทีมขายส่ง สยามสแควร์ ชั้น 14 โทร. 0-2218-9889-90 โทรสาร 0-2254-9495

กองบรรณาธิการ : จุฑามาศ ตั้งจิตพิชัย พิสูจน์อักษร : สำเนา บัวแย้ม

ออกแบบปก : วรวิทย์ อิศรางกูร ณ อยุธยาออกแบบรูปเล่ม : รศ. ดร.ลัญจกร วุฒิสัทติกุลกิจ

พิมพ์ที่

โทร. ...

คำนำ

หนังสือ **ความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า** เล่มนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นตำราประกอบการเรียนการสอน วิชา 2102203 ความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า สำหรับนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 2 ของภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และวิชา วศฟพ 200 ความน่าจะเป็นและตัวแปรสุ่ม สำหรับนักศึกษาปริญญาตรีชั้นปีที่ 2 ของภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและภาควิชาวิศวกรรมการแพทย์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้แบ่งออกเป็น 7 บทดังนี้ บทที่ 1 อธิบายทฤษฎีความน่าจะเป็น บทที่ 2 นำเสนอการนิยามตัวแปรสุ่มทั้งที่เป็นแบบวิฤตและแบบต่อเนื่อง พร้อมยกตัวอย่างตัวแปรสุ่มที่สำคัญ บทที่ 3 บรรยายถึงการคำนวณหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ค่าคาดหวัง และฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ บทที่ 4 ขยายการบรรยายให้ครอบคลุมถึงตัวแปรสุ่มหลายตัว บทที่ 5 เป็นบทแรกที่กล่าวถึงสถิติศาสตร์ในเรื่องของการชักตัวอย่าง บทที่ 6 กล่าวถึงการประมาณค่าพารามิเตอร์ และบทที่ 7 เป็นเรื่องของการทดสอบสมมติฐาน ดังนั้น หนังสือเล่มนี้จึงเหมาะสำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน นิสิต นักศึกษา ระดับปริญญาตรีทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้าได้เป็นอย่างดี

ในการจัดทำต้นฉบับหนังสือ ผู้เขียนขอขอบคุณหน่วยงาน 2 แห่ง ได้แก่ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดลที่ได้อำนวยความสะดวกในด้านสถานที่ทำงาน ผู้เขียนขอขอบคุณเป็นพิเศษต่ออาจารย์ผู้ทรงคุณวุฒิท่านต่อไปนี้คือ ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เดชนครินทร์ ราชบัณฑิต และอาจารย์สุวิทย์ นาคพิระยุทธ ผู้ที่ได้คอยสั่งสอนถ่ายทอดความรู้ประสบการณ์และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ตลอดเวลาที่ผ่านมา นอกจากนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.รัชชะ จุลธชาติ และอาจารย์ ดร.พรชัย ชันยากร ที่ได้มีส่วนช่วยในการให้ความรู้และแลกเปลี่ยนข้อคิดเห็นทางวิชาการได้อย่างละเอียดชัดเจนและเป็นประโยชน์อย่างมากต่อเนื้อหาในแต่ละส่วน ขอแสดงความขอบคุณต่อ นายอมรเมธ ทิพย์เสถียร และนายณรรค์ วัฒนมงคล สองบุคคลสำคัญที่มีบทบาทในการพิมพ์เนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับสถิติ

ขอแสดงความขอบคุณต่อผู้ช่วยศาสตราจารย์มานิต รุจิวิโรดม กรรมการผู้อำนวยการ
สำนักพิมพ์ และรองศาสตราจารย์ศีกเดช กันตามระ รองผู้อำนวยการสำนักพิมพ์ ที่ให้ความ
อนุเคราะห์จัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ ในส่วนของการตรวจพิสูจน์อักษรที่ละเอียดรอบคอบนี้ได้รับการ
ช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากคุณจุฑามาศ ตั้งจิตพิชัย คุณกรรณะ กองศักดิ์ คุณทัศนีย์ ผิวขำ คุณวาสนา
ชำเซ็น และคุณเรวดี แก้วแสงแจ่ม บุคลากรคุณภาพของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณคณะวิศวกรรมศาสตร์ที่ให้การสนับสนุนผ่านโครงการสนับสนุน
การเขียนตำราหรือหนังสือคณาจารย์ (เล่มที่ 14) คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วันที่ 5 ธันวาคม 2551

สารบัญ

หน้า

คำนำ

บทที่ 1	ทฤษฎีความน่าจะเป็น	1
1.1	การทดลองแบบสุ่ม และปริภูมิตัวอย่าง	1
1.2	เหตุการณ์	5
1.3	การดำเนินการเกี่ยวกับเซต	7
1.4	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	8
1.5	การนับจำนวนจุดตัวอย่างหรือผลลัพธ์	14
1.6	ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข	18
	แบบฝึกหัดท้ายบท	28
บทที่ 2	ตัวแปรสุ่ม	65
2.1	การนิยามตัวแปรสุ่ม	65
2.2	ตัวแปรสุ่มวิยุต	68
2.3	ตัวอย่างของตัวแปรสุ่มวิยุต	71
2.3.1	ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี	71
2.3.2	ตัวแปรสุ่มทวินาม	72
2.3.3	ตัวแปรสุ่มเรขาคณิต	76
2.3.4	ตัวแปรสุ่มปัวส์ซอง	78
2.4	ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง	82
2.5	ตัวอย่างของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง	85
2.5.1	ตัวแปรสุ่มเอกกรุป	85
2.5.2	ตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง	87

2.5.3 ตัวแปรสุ่มเกมมา	88
2.5.4 ตัวแปรสุ่มปกติ	88
แบบฝึกหัดท้ายบท	90
บทที่ 3 ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าคาดหวัง และฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์.....	119
3.1 ค่าเฉลี่ยทางสถิติของตัวแปรสุ่ม	119
3.2 ตัวอย่างการหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มวิยุต.....	120
3.2.1 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี	120
3.2.2 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มทวินาม	120
3.2.3 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มเรคาณิต.....	121
3.2.4 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มปัวส์ซง	122
3.3 ตัวอย่างการหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง	122
3.3.1 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มเอกรูป	122
3.3.2 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง.....	123
3.3.3 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มเกมมา	123
3.3.4 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มปกติ	123
3.4 ค่าคาดหวังของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม	124
3.5 ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม.....	125
3.5.1 ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง.....	126
3.5.2 ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง	129
3.6 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์.....	131
3.7 การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์กับตัวแปรสุ่ม	133
3.7.1 การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์กับตัวแปรสุ่มวิยุต	133
3.7.2 การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์กับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง.....	137
แบบฝึกหัดท้ายบท	143
บทที่ 4 ตัวแปรสุ่มหลายตัว	155
4.1 บทนำ	155

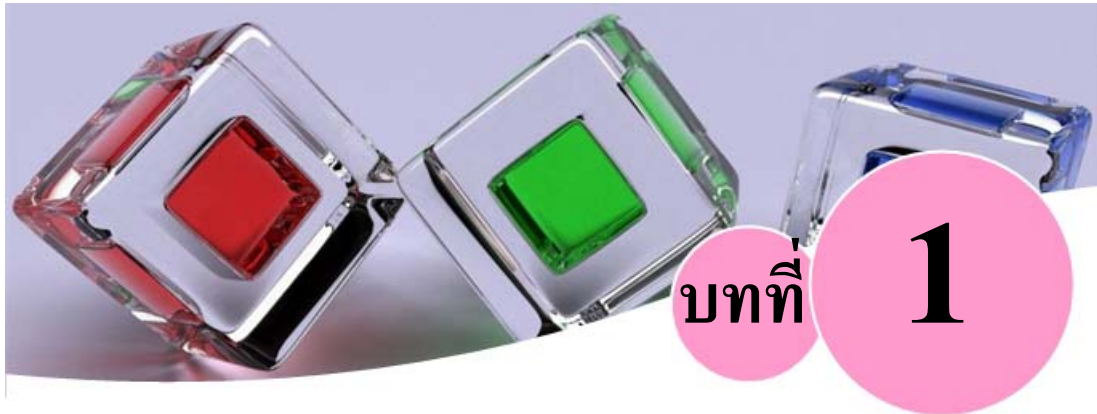
4.2	ตัวแปรคู่สองตัว.....	156
4.3	ตัวแปรคู่วิฤตสองตัว	159
4.3.1	ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นร่วม.....	159
4.3.2	ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นขอบ.....	161
4.3.3	ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม	162
4.3.4	ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมขอบ.....	164
4.4	ตัวแปรคู่ต่อเนื่องสองตัว	165
4.4.1	ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม	165
4.4.2	ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นขอบ.....	166
4.4.3	ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมร่วม	168
4.4.4	ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมขอบ	170
4.5	ความเป็นอิสระต่อกันของตัวแปรคู่สองตัว	172
4.6	ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข.....	174
4.7	ฟังก์ชันของตัวแปรคู่สองตัว	178
4.8	ตัวแปรคู่หลายตัว.....	181
4.9	ค่าคาดหวังของฟังก์ชันของตัวแปรคู่หลายตัว.....	183
4.10	การใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์กับตัวแปรคู่หลายตัว	186
	แบบฝึกหัดท้ายบท	189

บทที่ 5 การชักตัวอย่าง.....203

5.1	บทนำ	203
5.2	การชักตัวอย่างแบบสุ่ม.....	205
5.3	ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง ความแปรปรวนของตัวอย่าง และค่าสถิติอื่น ๆ	207
5.3.1	ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง.....	207
5.3.2	ความแปรปรวนของตัวอย่าง	209
5.3.3	ค่าสถิติอื่น ๆ.....	211
5.4	การแจกแจงของตัวอย่าง.....	212

5.4.1 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง.....	213
5.4.2 การแจกแจงของความแปรปรวนของตัวอย่าง.....	214
5.5 การแจกแจง t	216
5.6 การแจกแจง F	219
5.7 การชักตัวอย่างจากประชากรจำนวนจำกัด.....	223
แบบฝึกหัดท้ายบท.....	226
บทที่ 6 การประมาณค่าพารามิเตอร์.....	231
6.1 บทนำ.....	231
6.2 การประมาณค่าแบบจุด.....	232
6.2.1 คุณสมบัติของตัวประมาณค่าแบบจุด.....	234
6.2.2 ตัวประมาณค่าแบบวิธีของโมเมนต์.....	238
6.2.3 ตัวประมาณค่าแบบความควรจะเป็นสูงสุด.....	242
6.2.4 การวิเคราะห์ประสิทธิภาพตัวประมาณค่า.....	247
6.3 การประมาณค่าแบบช่วง.....	254
6.3.1 ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย.....	254
6.3.2 ช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของค่าเฉลี่ย.....	258
6.3.3 ช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน.....	262
6.3.4 ช่วงความเชื่อมั่นของอัตราส่วนของความแปรปรวน.....	263
6.3.5 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม.....	264
6.3.6 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ของการแจกแจงเลขชี้กำลัง.....	266
6.4 ตัวประมาณค่าแบบเบย์.....	267
แบบฝึกหัดท้ายบท.....	276
บทที่ 7 การทดสอบสมมติฐาน.....	283
7.1 บทนำ.....	283
7.2 ชนิดของความผิดพลาด.....	286
7.3 การทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรปกติ.....	288

7.3.1 การทดสอบค่าเฉลี่ยกรณีรู้ค่าความแปรปรวนของประชากร.....	288
7.3.2 การทดสอบค่าเฉลี่ยกรณีไม่รู้ค่าความแปรปรวนของประชากร	292
7.4 การทดสอบเกี่ยวกับผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรปกติ.....	294
7.4.1 กรณีที่ทราบค่าความแปรปรวน	294
7.4.2 กรณีที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน	295
7.5 การทดสอบเกี่ยวกับความแปรปรวนของประชากรปกติ.....	297
7.5.1 การทดสอบความแปรปรวนว่าเท่ากับค่าที่ระบุหรือไม่	297
7.5.2 การทดสอบว่าประชากรสองกลุ่มมีค่าความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่....	298
7.6 การทดสอบเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม.....	300
7.7 การทดสอบเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวส์ซอง.....	302
7.8 การทดสอบความสอดคล้องกันได้ดีของการแจกแจง.....	303
7.8.1 การทดสอบไคสแควร์.....	305
แบบฝึกหัดท้ายบท.....	310
ภาคผนวก	311
บรรณานุกรม	319



ทฤษฎีความน่าจะเป็น

1.1 การทดลองแบบสุ่ม และปริภูมิตัวอย่าง

การทดลองแบบสุ่ม (random experiment) หมายถึงการทดลองซึ่งให้ผลลัพธ์ที่มีความไม่แน่นอน มีโอกาสเดาผลล่วงหน้าได้ สามารถเปลี่ยนแปลงแตกต่างกันไปในแต่ละครั้ง ถึงแม้จะเป็นการทดลองซ้ำภายใต้สภาพแวดล้อมเดิมก็ตาม ตัวอย่างของการทดลองแบบสุ่มที่มีความเรียบง่าย ไม่ซับซ้อน ได้แก่ การโยนเหรียญหัวก้อย และการทอดลูกเต๋า เป็นต้น การทดลองทั้งสองแบบนี้จัดว่าเป็นการทดลองแบบสุ่มได้ เนื่องจากเราไม่สามารถคาดเดาผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นได้ล่วงหน้าอย่างถูกต้องแน่นอน อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปเราสามารถระบุและทราบรูปแบบของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองเหล่านี้ได้อย่างครบถ้วน ในกรณีของการโยนเหรียญหัวก้อยมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 รูปแบบ คือ เหรียญออกหัว หรือเหรียญออกก้อย และในกรณีของการทอดลูกเต๋ามีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 6 รูปแบบ คือ ด้านของลูกเต๋าแต่ละแต้มตั้งแต่ 1 ถึง 6 เราเรียกเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองว่า **ปริภูมิตัวอย่าง (sample space)** ในเชิงคณิตศาสตร์จะใช้สัญลักษณ์ S เพื่อแทนเซตดังกล่าว ยกตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญมีปริภูมิตัวอย่างเท่ากับ

$$S = \{H, T\}$$

โดย H หมายถึงผลการโยนเหรียญออกหัว และ T หมายถึงผลการโยนเหรียญออกก้อย

สำหรับกรณีการทอดลูกเต๋ามีปริภูมิตัวอย่างเท่ากับ

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

โดยหมายเลขแต่ละตัวที่เป็นสมาชิกในเซตแทนค่าของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋า

พิจารณาการทดลองแบบสุ่มที่กำหนดให้มีการเลือกหยิบไพ่หนึ่งใบอย่างสุ่มจากไพ่อำหรับหนึ่งที่มีทั้งหมด 52 ใบ การระบุถึงปริภูมิตัวอย่างของการทดลองนี้จะกระทำได้อีกต่อเมื่อมีการกำหนดชัดเจนลงไปว่าผลลัพธ์ที่สนใจคืออะไร เช่น หากสนใจว่าไพ่ที่หยิบได้เป็นไพ่นาฬิกาใบใด ปริภูมิตัวอย่างก็จะมีทั้งหมด 13 รูปแบบ คือ

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$$

แต่หากสนใจว่าไพ่ที่หยิบได้เป็นไพ่ที่มีดอกอะไร ปริภูมิตัวอย่างก็จะเป็นเซตที่มีสมาชิกเพียง 4 ตัว คือ

$$S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$$

โดยสมาชิกในเซตแต่ละตัวหมายถึง ดอกจิก ข้าวหลามตัด โพแดง และโพดำ ตามลำดับ

ฉะนั้น จะเห็นว่าการกล่าวถึงการทดลองแบบสุ่มหนึ่งนั้น นอกจากจะต้องอธิบายถึงขั้นตอนการทดลองแล้ว ยังต้องระบุด้วยว่าผลลัพธ์หรือสิ่งที่สนใจจะทำการวัดหรือพิจารณาประกอบด้วยค่าใดบ้าง จึงจะได้ความหมายครบสมบูรณ์

ตัวอย่าง 1.1

จงเขียนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองแบบสุ่มต่อไปนี้

(ก) หยิบลูกบอล 1 ลูก ออกจากกล่องที่บรรจุลูกบอล 10 ลูก ซึ่งมีหมายเลขกำกับตั้งแต่ 0 ถึง 9

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

(ข) หยิบลูกบอล 2 ลูก ออกจากกล่องที่ประกอบด้วยลูกบอลสีดำ 2 ลูก และสีขาว 10 ลูก

$$S = \{BB, BW, WB, WW\} \text{ หรือ } \{\text{ดำ-ดำ, ดำ-ขาว, ขาว-ดำ, ขาว-ขาว}\}$$

(ค) โยนเหรียญติดต่อกัน 3 ครั้ง และบันทึกลำดับการเกิดของหน้าเหรียญ

เราสามารถเขียนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองดังกล่าวได้หลายลักษณะดังนี้

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

$$S = \{\text{hhh, hkh, hhh, hkk, khh, khk, kkh, kkk}\}$$

หรือ

$$S = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

(ง) โยนเหรียญติดต่อกัน 3 ครั้ง และจดบันทึกจำนวนเหรียญที่ออกหัว

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

(จ) ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน และบันทึกรายละเอียดของหน้าที่ออก

$$\begin{aligned} S = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \} \end{aligned}$$

(ฉ) ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน และบันทึกผลรวมของแต้มที่ออก

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

สังเกตว่าตัวอย่างข้อ 1.1 (ค) และ (ง) มีขั้นตอนการทดลองเหมือนกันคือโยนเหรียญติดต่อกัน 3 ครั้ง หากแต่สิ่งที่ประสพจะวัดหรือพิจารณามีความแตกต่างกัน จึงมีผลทำให้ปริภูมิตัวอย่างของการทดลองที่ได้แตกต่างกัน หรือในตัวอย่าง 1.1 (จ) และ (ฉ) ก็เช่นเดียวกันมีขั้นตอนการทดลองเหมือนกันคือทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน หากแต่ค่าของผลลัพธ์ที่ต้องการวัดแตกต่างกัน ส่งผลให้ปริภูมิตัวอย่างที่ได้จึงแตกต่างกันด้วย

ให้สังเกตต่อด้วยว่าผลลัพธ์แต่ละรูปแบบที่เกิดขึ้นจากการทดลองภายในปริภูมิตัวอย่างจะไม่เกิดขึ้นพร้อมกันในเวลาเดียวกัน (mutually exclusive) โดยจะเรียกรูปแบบของผลลัพธ์แต่ละแบบเหล่านี้ว่า **จุดตัวอย่าง (sample point)** หรือโดยทั่วไปมักจะเรียกว่า **ผลลัพธ์ (outcome)** เฉย ๆ ก็ได้ เช่น ในกรณีการทอดลูกเต๋า 2 ลูกตามตัวอย่าง 1.1 (จ) มีจุดตัวอย่างหรือผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 36 แบบ หรือการทอดลูกเต๋า 2 ลูกตามตัวอย่าง 1.1 (ฉ) มีจุดตัวอย่างหรือผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 11 แบบ เพื่อความสะดวกในการอธิบายเชิงคณิตศาสตร์จะขออนุญาตให้เขียนผลลัพธ์

หรือจุดตัวอย่างที่ได้จากการทดลองในรูปของสัญลักษณ์ ζ โดยที่ ζ เป็นสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างที่พิจารณา

ปริภูมิตัวอย่างสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กลุ่มใหญ่ คือ ปริภูมิตัวอย่างจำกัด (finite sample space) และปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัด (infinite sample space) ปริภูมิตัวอย่างจำกัด หมายถึง ปริภูมิตัวอย่างที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด และปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัด หมายถึง ปริภูมิตัวอย่างที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด ตัวอย่างการทดลองแบบสุ่มทั้งหมดที่ได้กล่าวมาในข้างต้นล้วนแล้วแต่จัดเป็นปริภูมิตัวอย่างจำกัดทั้งสิ้น ในกรณีปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัดสามารถแบ่งออกเป็นสองประเภทย่อยได้ด้วย โดยพิจารณาจากว่าสมาชิกลำดับได้ (countable) หรือนับไม่ได้ (uncountable) ตัวอย่างต่อไปนี้จะนำเสนอตัวอย่างปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัดทั้งที่นับได้และนับไม่ได้เปรียบเทียบกัน

หมายเหตุ ปริภูมิตัวอย่างจำกัดและปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัดประเภทนับได้มีคุณลักษณะร่วมกันคือ ทั้งคู่สามารถนับได้ จึงมักถูกจัดรวมกันว่าเป็น ปริภูมิตัวอย่างประเภทวิฤต (discrete sample space) ในขณะที่ปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัดประเภทนับไม่ได้ถูกเรียกว่าเป็น ปริภูมิตัวอย่างประเภทต่อเนื่อง (continuous sample space)

ตัวอย่าง 1.2

จงเขียนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองแบบสุ่มต่อไปนี้

(ก) โยนเหรียญ 1 เหรียญจนกว่าเหรียญจะออกหัว และบันทึกจำนวนครั้งการโยน

$$S = \{1, 2, 3, \dots\}$$

จะเห็นว่าจำนวนครั้งในการโยนเหรียญให้ออกหัวนั้นมีความเป็นไปได้มากมาย เช่น เหรียญออกหัวตั้งแต่การโยนครั้งแรก ผลลัพธ์หรือจุดตัวอย่างจะมีค่าเท่ากับ 1 หรือเหรียญออกหัวในการโยนครั้งที่สองและผลลัพธ์หรือจุดตัวอย่างที่ได้คือ 2 ในบางกรณีอาจต้องมีการโยนเหรียญมากเป็นหลายร้อยหลายพันครั้งกว่าจะได้ผลการโยนเป็นหัวตามต้องการ แน่นอนว่าในสถานการณ์เช่นนี้ผลลัพธ์จะมีค่ามากขึ้นเป็นหลักร้อยและหลักพันด้วย ในกรณีสุดโต่งการโยนเหรียญได้ผลเป็นก้อยไปโดยตลอด ผลลัพธ์ก็จะเป็นค่าที่เข้าสู่อนันต์ ปริภูมิตัวอย่างดังกล่าวนี้จัดเป็นปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัด อย่างไรก็ตาม ตัวเลขที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัดนี้สามารถนับได้

(ข) เลือกตัวเลขค่าหนึ่งอย่างสุ่มที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

$$S = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$$

ปริภูมิตัวอย่างนี้จัดเป็นปริภูมิตัวอย่างไม่จำกัด หากแต่ต่างจากข้อ (ก) ตรงที่ตัวเลขที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่างนี้ไม่สามารถนับได้

1.2 เหตุการณ์

ในการทดลองแบบสุ่มเรามักจะให้ความสนใจกับการเกิดขึ้นของเหตุการณ์บางอย่างมากกว่าจะสนใจสมาชิกที่มีอยู่ในปริภูมิตัวอย่างทั้งหมด ดังนั้น ในทฤษฎีความน่าจะเป็นจึงได้มีการนิยามคำว่า **เหตุการณ์ (event)** ขึ้นว่าเป็นเซตย่อย (subset) ของปริภูมิตัวอย่าง S ยกตัวอย่างเช่น การทดลองทอดลูกเต๋า 2 ลูก และบันทึกรายละเอียดของหน้าที่ออกของลูกเต๋าทิ้งสองลูก เป็นปริภูมิตัวอย่างที่มีผลลัพธ์ที่แตกต่างกันทั้งหมด 36 รูปแบบ ตัวอย่างของเหตุการณ์แบบหนึ่งที่เราสนใจคือ เหตุการณ์ที่ผลบวกตัวเลขของลูกเต๋าทิ้งสองลูกมีค่าเท่ากับ 4 ซึ่งเหตุการณ์ที่พิจารณานี้สามารถเขียนเป็นเซตได้เท่ากับ $A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ จะเห็นว่าเหตุการณ์ประกอบขึ้นจากกลุ่มของผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขบางอย่างตามที่กำหนด ในบางกรณีหากเงื่อนไขที่กำหนดมีข้อจำกัดมากอาจทำให้ไม่มีผลลัพธ์ใดในปริภูมิตัวอย่างที่ให้ผลสอดคล้องหรือเป็นจริงตามเงื่อนไขของเหตุการณ์ได้ ผลที่เกิดขึ้นก็จะได้เหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์เซตว่าง $\emptyset$ หรือเรากล่าวว่าเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้ (impossible event หรือ null event) ในทางกลับกันหากเงื่อนไขของเหตุการณ์กำหนดอย่างกว้าง ๆ ผลลัพธ์ทั้งหมดที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่างสามารถเป็นจริงตามเงื่อนไข เหตุการณ์ดังกล่าวก็จะให้ผลเป็นเซตที่มีขนาดเท่ากับปริภูมิตัวอย่าง S ดังนั้น เราจึงกล่าวว่าเหตุการณ์แบบนี้เกิดขึ้นเสมอและแน่นอน (sure event หรือ certain event)

ตัวอย่าง 1.3

พิจารณาปริภูมิตัวอย่างจำกัดที่อยู่ในตัวอย่าง 1.1 แต่ละข้อย่อย และให้เขียนเหตุการณ์ตามเงื่อนไขที่ระบุต่อไปนี้

(ก) เหตุการณ์ที่ผลการหยิบได้ลูกบอลที่มีหมายเลขเป็นจำนวนเฉพาะ