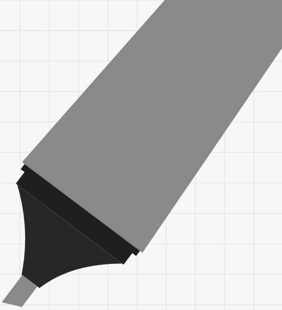
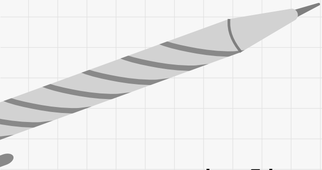
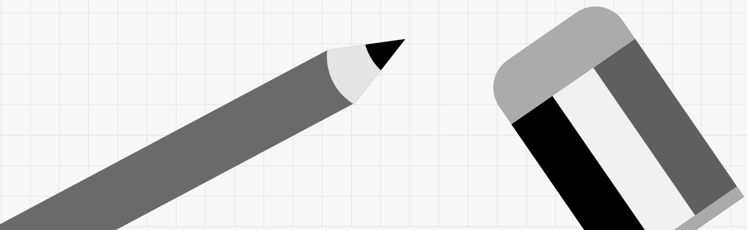


สารบัญ





คำนำ

ไม่ว่าจะทำโพลล์กี่ยุคกี่สมัย คณิตศาสตร์ก็ต้องติดอันดับวิชาที่เป็นยาขมสำหรับนักเรียนส่วนใหญ่อยู่เสมอ ผมเคยวิเคราะห์ของผมเองว่า อะไรคือปัจจัยที่ทำให้นักเรียนไม่ชอบวิชาสักวิชาหนึ่ง แล้วก็พบว่ามีอยู่ 3 ข้อ คือ ยาก ไม่สนุก และไม่รู้ว่าจะเรียนไปทำไม

ข้อแรก ยาก ลองนึกภาพว่าถ้ามีวิชาที่ไม่สนุกสุดๆ และไม่มีประโยชน์สุดๆ แต่ง่ายมาก นักเรียนก็อาจจะพอทนไหว คิดเสียว่าเป็นคาบว่าง อาจจะหาอะไรมาทำแก้เบื่อ หรือทำงานวิชาอื่นไป สุดท้ายสอบชิลๆ ได้เกรด 4 แฮปปี้จะตาย ถึงไม่สนุก ไม่มีประโยชน์ แต่ถ้าง่ายก็จะไม่มีปัญหา

ข้อสอง ไม่สนุก ผมมีเพื่อนที่ชอบเล่นเกม บางเกมนี่อย่างยากเลยนะ คิดซับซ้อนมาก ต้องเลือกตัวละคร วางแผนโห คือยากสุดๆ แถมยังเล่นแล้วไม่ได้มีประโยชน์อะไรขนาดนั้นด้วย แต่พอเกมสนุก ทุกอย่างก็จบ ยากแค่ไหนก็ยอม แถมไม่ต้องคุยกันว่าจะทำไปทำไมด้วย

ส่วนข้อสาม ไม่รู้ว่าจะเรียนไปทำไม อันนี้เศร้าสุด เอาตัวผมเองเป็นตัวอย่างก็ได้ ผมเป็นคนไม่ชอบเรียนภาษาอังกฤษมาตั้งแต่ไหนแต่ไรแล้ว คือสำหรับผมวิชานี้ยากและ

ไม่สนุก แต่ผมอยากสื่อสาร อยากดูหนังฝรั่ง ฟังเพลงฝรั่ง อยากอ่านหนังสือภาษาอังกฤษรู้เรื่อง ถึงยากและไม่สนุก ก็ต้องยอมกัดฟัน เรียนเพราะรู้ว่ามีประโยชน์ต่อตัวเองในอนาคต

ใน 3 ข้อนี้ ถ้าเราตัดข้อใดข้อหนึ่งไปได้ เราก็จะรู้สึกว่าควรตั้งใจเรียนวิชานั้นขึ้นมา ปัญหาของคณิตศาสตร์คือนักเรียนส่วนใหญ่รู้สึกว่าวิชานี้มีครบทั้ง 3 ข้อ คือยากก็ยาก สนุกก็ไม่สนุก แถมยังมีแต่อะไรก็ไม่รู้ ตัวแปรแก้สมการถอดสแควร์รูทที่ไม่เห็นว่าจะได้เอาไปใช้ตอนไหน

สำหรับข้อแรกผมคงไม่สู้ เพราะต้องยอมรับว่าคณิตศาสตร์นั้นยากจริงๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับคนที่ไม่มีหัวทางนี้ เอาจริงๆ คนมักจะคิดว่าคณิตศาสตร์นั้นง่ายสำหรับคนที่เก่งคณิตศาสตร์ แต่สำหรับผม คณิตศาสตร์ยากเสมอเหมือนที่ศาสตร์อีกมากมายในโลกนี้ยาก

ต่อมาคือข้อสอง เรื่องความสนุกผมว่าเราเถียงกันได้ ความสนุกหรือไม่สนุกนั้นอยู่ที่วิธีเล่า สำหรับผมวิชาประวัติศาสตร์ในห้องเรียนนั้นไม่สนุก แต่ดูยูทูบบางช่องที่เขาเล่าผมว่าก็สนุกดี

ส่วนข้อสุดท้ายนั้นผมเห็นต่างแบบหลังชนฝา เพราะคณิตศาสตร์ก็เหมือนอีกหลายๆ วิชาที่มีสอนกันอยู่ในหลัก

สูตร นั่นคือคนที่ได้ใช้ก็จะได้ใช้ ส่วนคนที่ไม่ได้ใช้ก็จะไม่ได้ใช้ แน่นอนว่าถ้าคุณเรียนต่อในสายวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ คอมพิวเตอร์ หรือเศรษฐศาสตร์ ยังไงคุณก็ต้องใช้คณิตศาสตร์ ใช้มากใช้น้อยใช้ลึกใช้ตื้นก็แล้วแต่สาขา

ปัญหาคือ หลายคนไม่ทันได้ตั้งใจเรียนคณิตศาสตร์ หรือเรียนแค่พอผ่าน สอบเสร็จแล้วก็คืนครู เพราะคิดว่าตัวเองคงไม่ได้ใช้ต่อในอนาคต จนกระทั่งถึงวันที่ต้องใช้ขึ้นมา ผมก็มักจะได้ยินหลายคนบ่นทำนองว่า ไม่เห็นมีใครบอกเลยว่าจะใช้เยอะขนาดนี้ หรือถ้ารู้ก่อนว่าจะใช้เยอะขนาดนี้ตอนนั้นจะได้ตั้งใจเรียน

แล้วใครคือคนผิดในเรื่องนี้ ครูผู้สอนที่ไม่ยอมบอกหรืออธิบายให้เห็นภาพว่าความรู้เหล่านี้จะถูกนำไปใช้ต่อยอดที่ไหนอย่างไรหรือเปล่า แม้ส่วนตัวผมจะเห็นด้วยว่าก็จริงอยู่บางส่วน ครูหลายๆ ท่านสร้างภาพว่าคณิตศาสตร์เป็นของนามธรรม อยู่ในโลกของตัวเลขและตัวแปร จับต้องไม่ได้ แต่ก็ไม่อยากให้โทษไปที่ตัวผู้สอนในระดับปัจเจกไปเสียทั้งหมด เพราะต้องไม่ลืมว่าสุดท้ายผู้สอนก็มีหน้าที่หนึ่งที่สำคัญคือการสอนให้นักเรียนทำข้อสอบมาตรฐานให้ได้ ซึ่งข้อสอบวัดแค่ว่า เราทำได้หรือทำไม่ได้ เข้าใจหรือไม่เข้าใจ ไม่ได้วัดว่าเรื่องพวกนี้จะถูกเอาไปใช้ตอนไหน มีประโยชน์อย่างไร และด้วยเวลาที่จำกัด จึงอาจจะทำให้เรื่องเล่าเกี่ยวกับประโยชน์

และการนำไปใช้ของคณิตศาสตร์ถูกละเลยไปจากห้องเรียน หรือหากคุณครูมีเวลาพอจะเล่า นักเรียนหลายคนก็อาจจะไม่ได้สนใจจะฟังมากนัก เพราะเห็นว่าเป็นสิ่งที่ไม่ออกสอบ

เพจ “คณิตศาสตร์อย่างที่ควรจะเป็น” ก็เกิดขึ้นมาด้วยสาเหตุนี้ ใครที่ตามเพจจะทราบดีว่าผมไม่ได้ตั้งใจทำเพจสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากผมเห็นว่ามีคนจำนวนมากทำสิ่งนี้ได้ดีอยู่แล้ว แต่สิ่งที่ผมตั้งใจจะทำคือ การหาที่ทางให้แก่วิชานี้ในโลกความเป็นจริง ชี้ชวนให้ผู้อ่านเห็นคณิตศาสตร์ที่ซ่อนตัวอยู่อย่างแนบเนียนรอบตัวเรา ผ่านเรื่องเล่าและบทความต่างๆ โดยตั้งใจจะสื่อสารกับบุคคลทั่วไปที่ผ่านไปผ่านมา จนกระทั่งทำเพจได้สักพักจึงพบว่า หนึ่งในกลุ่มผู้อ่านหลักของเพจคือ ครูในโรงเรียนที่เอาเรื่องที่ผมเล่าในเพจไปเป็นส่วนหนึ่งของการสอนหรือเล่าให้นักเรียนฟังประกอบกับเนื้อหาตามหลักสูตรที่เป็นส่วนหลัก ผมจึงตั้งใจเขียนหนังสือเล่มนี้ขึ้นมา เพื่อรวบรวมเรื่องเล่าในเพจมาจัดเป็นหมวดหมู่ตามเนื้อหาการเรียนในหลักสูตรคณิตศาสตร์เพิ่มเติมของระดับชั้นมัธยมปลาย พร้อมทั้งยังเพิ่มเติมเรื่องเล่าอีกจำนวนมากที่ไม่เคยเล่าในเพจมาก่อนลงไป และเพิ่มความสมบูรณ์ของเนื้อหาแต่ละบทให้มากขึ้นด้วย

หนังสือเล่มนี้จึงไม่เหมาะสำหรับการอ่านเพื่อทำความเข้าใจเนื้อหาโดยเฉพาะอย่างยิ่งเพื่อเตรียมสอบ เพราะใน

แต่ละบทผมคาดหวังว่าผู้อ่านจะมีความรู้เรื่องนั้นมาก่อน เพื่อที่จะได้กระโดดไปเริ่มที่เรื่องเล่าเกี่ยวกับการนำหัวข้อนั้นๆ ไปใช้แก้ปัญหาในโลกความเป็นจริงมากกว่า ด้วยความหวังเล็กๆ ที่จะบรรเทาเหตุผลข้อที่สองและสาม คือทำให้สนุกขึ้น มีประโยชน์มากขึ้น และลดความเป็นยาขมของคณิตศาสตร์ลงไปได้บ้าง หรืออย่างน้อยที่สุดถ้าคณิตศาสตร์ยังขมอยู่ ก็อยากให้เป็นความขมอย่างเข้าใจ ขมอย่างรู้ว่ามันเป็นยาขม อย่างรู้ว่าวิชานี้มีประโยชน์อย่างไรบ้าง เท่านั้นผมก็แสนจะยินดี

พรรษ วติวุฒิพงศ์

2 จำนวนจริง

ผมเคยอ่านกระทู้พันทิปกระทู้หนึ่งที่ตั้งคำถามว่า *“เรียนคณิตศาสตร์ ซื้อปลาต้องไปนั่งถอดรูทไหมคะ”* แน่นอนว่ากระทู้นี้โดนจวกเละทั้งจากคอมเมนต์ในกระทู้และจากคนที่แชร์กระทู้นี้ไปบนโซเชียลมีเดียอื่นๆ แต่ผมว่าคำถามนี้น่าสนใจนะ น่าสนใจกว่าที่จะมองเป็นแค่ดราม่าหนึ่งในโลกออนไลน์ที่ผ่านมาแล้วก็ผ่านไป สรุปแล้วซื้อปลาต้องไปนั่งถอดรูทไหม

ปลา สามเหลี่ยม และกระดาษ A4

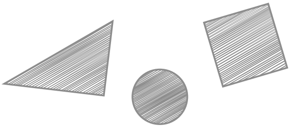
ก่อนจะไปถึงตรงนั้นเราต้องมาพูดถึงเรื่องพื้นฐานที่สุดของคณิตศาสตร์ก่อนคือเรื่องจำนวน ความจริงแล้วเราเรียนเรื่องจำนวนกันมาตั้งแต่เด็ก เพราะจำนวนน่าจะเป็นคณิตศาสตร์ที่ใกล้ตัวและอธิบายได้อย่างตรงไปตรงมาที่สุดว่าเรียนไปทำอะไร

จำนวนเกิดขึ้นมาตั้งแต่ยุคโบราณเมื่อมนุษย์พยายามจะนับสิ่งต่างๆ รอบตัว ต่อมาก็เริ่มมีการใช้จำนวนติดลบแทนการเป็นหนี้ และใช้เศษส่วนกับทศนิยมเพื่อใช้บอกถึงจำนวนที่เกิดจากการแบ่ง เช่น แทนที่จะพูดถึงเนื้อหมู 1 ชิ้น เราก็อาจจะพูดถึงเนื้อหมูครึ่งชิ้นได้ จำนวนเต็มและเศษส่วนกับทศนิยมที่เรารู้จักกันดีนั้นเรียกรวมว่า “จำนวนตรรกยะ” ซึ่งถึงตรงนี้ยังไม่มีสแควร์รูทเข้ามาเกี่ยวข้องเลยด้วยซ้ำ ดังนั้นถ้าจะถามว่าซื้อปลาต้องไปนั่งถอดรูทไหม เอาตรงๆ ก็คือไม่ต้องนะ ตลอดชีวิตที่ผมซื้อปลามาก็ยังไม่มีครั้งไหนที่ต้องถอดรูท และจริงๆ โลกนี้ไม่ต้องมีการถอดรูทเลยก็ได้ถ้ามนุษยชาติหยุดการพัฒนาไว้แค่ที่การซื้อปลา

ไม่รู้ว่าเป็นโชคดีหรือโชคร้ายที่มนุษยชาติไม่ยอมหยุดการพัฒนาไว้แค่นั้น การมาถึงของจำนวนจริงนั้นเกิดขึ้นเมื่อประมาณ 2,500 กว่าปีก่อน เพราะผู้คนเริ่มสนใจความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม จากคำถามง่ายๆ ที่ว่า ถ้ามีสามเหลี่ยมมุมฉากที่ด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย ด้านตรงข้ามมุมฉากจะยาวเท่าไร ถ้าให้ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมที่ว่านั้นเป็น x พีทาโกรัส (Pythagoras) พบว่า x^2 จะต้องมีค่าเท่ากับ 2 และเรียกเลขตัวนั้นว่า $\sqrt{2}$ หรือสแควร์รูทสอง

การมาของสแควร์รูทสองนี้เปลี่ยนความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของพีทาโกรัสไปอย่างสิ้นเชิง เพราะที่ผ่านมาเขาเข้าใจว่า จำนวนหรือปริมาณทุกอย่างในโลกนั้นเขียนได้ในรูปของเศษส่วนของจำนวนเต็มหรือจำนวนตรรกยะเท่านั้น เนื่องจากเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2 สักตัวเดียว และเพื่อที่จะศึกษารูปสามเหลี่ยมได้นั้น เราจำเป็นต้องยอมรับว่ามีจำนวนอีกกลุ่มหนึ่งที่อยู่นอกเหนือความรับรู้เดิมเรียกว่า “จำนวนอตรรกยะ”

นอกจาก $\sqrt{2}$ เรายังพบว่า π คืออัตราส่วนระหว่างความยาวเส้นรอบวงกับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนั้นก็เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มไม่ได้ ไม่เพียงเท่านี้ นักคณิตศาสตร์ยังพิสูจน์ได้อีกว่าจำนวนอตรรกยะนั้นแทรกตัวอยู่ระหว่างทุกๆ จำนวนตรรกยะแต่ละคู่อีกเยอะแยะไปหมด กลายเป็นว่า ระบบจำนวนตรรกยะที่เราเคยคิดว่าครบถ้วนนั้นมีรูพรุนๆ อีกมากมายให้จำนวนอตรรกยะไปแทรกตัวอยู่ ดังนั้น การสร้างระบบจำนวนจริงที่รวมจำนวนตรรกยะและอตรรกยะเข้าด้วยกันจึงไม่ใช่แค่การยอมรับการมีอยู่ของจำนวนอย่าง $\sqrt{2}$ หรือ π แต่ยังทำให้เส้นจำนวนของเรานั้นครบถ้วนสมบูรณ์ขึ้นด้วย



นอกจากสามเหลี่ยมแล้ว ในกรณีของสี่เหลี่ยม ถ้าเราหยิบกระดาษ A4 ซึ่งน่าจะเป็นขนาดมาตรฐานสุดแล้วสำหรับงานเอกสารในโลกนี้ขึ้นมาลองวัดความยาวดูจะพบว่า กระดาษ A4 นั้นขนาดประมาณ 21×29.7 เซนติเมตร คำถามคือทำไมต้องเป็นเลขนี้ ทำไมไม่ทำให้เลขสวยๆ อุตส่าห์เป็นกระดาษมาตรฐาน ทำไมต้อง .7 ทำไมไม่เป็น 21×30 หรือ 20×30 ไปเลย พักความสงสัยนั้นไว้แล้วลองตัดกระดาษ A4 ออกเป็น 2 แผ่นขนาดเท่าๆ กันดู เราจะได้กระดาษ A5 ขนาด 14.8×21 เซนติเมตร ซึ่งก็เป็นเลขที่ไม่สวยอยู่ดี แต่ถ้าเราลองเอาความยาวมาหารด้วยความกว้างจะพบว่า ขนาดออกมาเท่ากันทั้งกระดาษ A4 และ A5 นั่นคือ $\frac{297}{210}$ ได้ประมาณ 1.41 และ $\frac{210}{148}$ ก็ได้ประมาณ 1.41 ซึ่งใกล้เคียงกับค่า $\sqrt{2}$ มากๆ

นี่ไม่ใช่เรื่องบังเอิญ แต่กระดาษชุด A ทุกชุดเป็นแบบนี้หมด ถ้าลองเอาความยาวไปหารด้วยความกว้างจะได้ค่าประมาณ 1.41 เท่ากันหมดเลย แบบนี้เราจะเรียกว่าเป็นกระดาษที่ “คล้ายกัน” ก็คือเป็นการย่อขยายของกันและกันนั่นเอง ถ้าเราสมมติให้กระดาษ A4 สักแผ่นมีความกว้างเท่ากับ a และความยาวเท่ากับ b แปลว่าถ้าเราตัดครึ่งให้เป็น A5 กระดาษแผ่นนี้จะกว้างเท่ากับ $b/2$ และยาวเท่ากับ a ทีนี้ถ้าเราอยากให้อัตราส่วนกว้างต่อยาวของกระดาษแผ่นนี้เท่ากันจะได้ว่า

$$\frac{a}{b} = \frac{b/2}{a}$$

เมื่อแก้สมการจะได้ว่า $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ นั่นคือขนาดกระดาษ A4 ที่เราวัดได้ 21×29.7 เซนติเมตรนั้น ความจริงคือ $21 \times 21\sqrt{2}$ เซนติเมตรนั่นเอง และนี่เป็นลักษณะพิเศษของกระดาษชุด A ที่ถูกออกแบบมา คือตัดครึ่งแล้วยังคงอัตราส่วนเดิมไว้ได้อยู่ คุณสมบัตินี้พิเศษจริงๆ เพราะไม่ใช่กระดาษทุกขนาดที่ตัดครึ่งแล้วยังรักษาอัตราส่วนแบบนี้ไว้ได้

การจัดรูปและข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์

ถัดจากการทบทวนเรื่องการมีอยู่ของจำนวนจริงที่นักเรียนน่าจะเคยได้เรียนมาบ้างแล้วตั้งแต่ก่อนมัธยมปลาย เนื้อหาก็พาผู้เรียนทบทวนเรื่องพหุนาม เศษส่วนของพหุนาม อสมการ และค่าสัมบูรณ์ ซึ่งใจความสำคัญของสิ่งเหล่านี้คือการจัดรูป เป็นหนึ่งในสิ่งที่เราทำกันบ่อยมากในการเรียนคณิตศาสตร์ เริ่มต้นจากสมการหรืออสมการอันหนึ่งแล้วก็จัดรูปไปมาด้วยเทคนิคต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นย้ายข้าง คูณกระจาย แยกตัวประกอบ หรืออื่นๆ เพื่อให้หน้าตามันเปลี่ยนไป เช่น ถ้าเรามีพหุนาม $x^3 - 1$ อยู่ ผู้ที่ผ่านการเรียนเรื่องจำนวนจริงมาแล้วจะเห็นได้ไม่ยากว่าพหุนามนี้สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น $(x-1)(x^2+x+1)$

ได้สองพหุนามนี้เหมือนกัน แต่เราแค่เปลี่ยนจากรูปหนึ่งเป็นอีกรูปหนึ่ง

คำถามที่น่าจะอยู่ในหัวหลายๆ คนเมื่อพูดถึงการจัดรูปพหุนามก็คือ เราจัดรูปพหุนามกันไปทำไม การจัดรูปสำคัญถึงขนาดที่ต้องเรียนแล้วเรียนอีกกันเลยเหรอ เพื่อตอบคำถามนี้เราต้องแยกคำถามนี้ออกมาเป็น 2 คำถามย่อยก่อน คำถามข้อแรก พหุนามสำคัญยังไง ทำไมเราถึงสนใจจะศึกษาวิธีการจัดรูป และคำถามที่สอง รูปเดิมของพหุนามไม่ดียังไง ทำไมเราถึงอยากเปลี่ยนจากรูปหนึ่งไปเป็นอีกรูปหนึ่ง

เริ่มจากข้อหลังที่ตอบได้ง่ายกว่ากันก่อน ไม่ใช่แค่พหุนาม แต่ชุดตัวเลขอะไรสักอย่างที่ประกอบไปด้วยตัวเลข ตัวดำเนินการ และตัวแปร แต่ละชุดสามารถเขียนได้ในหลายรูปเช่น เราอาจเขียน 1 ว่า $2-1$ หรืออาจเขียน 2 ว่า $4/2+1-1$ ก็ได้ จากตัวอย่างที่ยกมาจะเห็นชัดว่า การเขียน 2 ว่า 2 นั้นง่ายกว่าการเขียนว่า $4/2+1-1$ แน่ๆ ทั้งที่มีค่าเท่ากัน ง่ายกว่าในที่นี้หมายถึงว่ามันอ่านง่ายกว่าสำหรับมนุษย์ ลองนึกภาพตาม ถ้าเราไปบอกแม่ค้าว่า *"ขอซื้อมะม่วงสี่หารด้วยสองบวกหนึ่งลบหนึ่งลูก"* เราคงโดนแม่ค้าเขวี้ยงมะม่วงใส่แทนที่จะได้ซื้อของแน่ๆ

พอเป็นตัวเลขแล้วก็พอมองออกว่าแบบไหนที่อ่านง่ายกว่า แล้วถ้าเป็นพหุนามล่ะ ระหว่างการเขียน x^3-1

หรือ $(x-1)(x^2+x+1)$ แบบไหนที่เรียกว่าง่ายกว่า คำตอบคือขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ของเราว่าต้องการเอาไปทำอะไร เช่น ถ้าเราจะแก้สมการ $x^3-1\geq 0$ การแยกตัวประกอบอสมการก่อนแล้วเขียนเป็น $(x-1)(x^2+x+1)\geq 0$ ก็จะทำให้เราเห็นได้ว่า x^2+x+1 นั้นเป็นพจน์ที่เป็นบวกเสมอ ดังนั้นอสมการนี้จึงลดรูปได้เหลือแค่ $x-1\geq 0$ จะได้ว่า $x\geq 1$ ซึ่งสิ่งนี้อาจจะมองจาก $x^3-1\geq 0$ ตรงๆ ได้ยาก แต่ถ้าเราต้องการวาดกราฟจากพหุนามนี้ การเขียนในรูปของ x^3-1 นั้นช่วยให้วาดง่ายกว่าการเขียนในรูป $(x-1)(x^2+x+1)$ เยอะเลย

หรือถ้าเราต้องการเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณค่าดังกล่าว การเขียนให้โปรแกรมคำนวณหา x^3-1 นั้นดีกว่า $(x-1)(x^2+x+1)$ มาก เพราะมีจำนวนครั้งของการคำนวณที่น้อยกว่า ใครที่ยังตามไม่ทันต้องเข้าใจก่อนว่าคอมพิวเตอร์นั้นคำนวณตัวเลขทีละตัว อย่างถ้าเราป้อนค่า x เท่ากับ 2 เข้าไปแล้วสั่งให้คอมพิวเตอร์คำนวณหา x^3-1 ออกมา สิ่งที่คอมพิวเตอร์ทำก็ต้องเริ่มจากเอา 2 มายกกำลัง 3 ก่อน จากนั้นค่อยลบ 1 นับเป็น 2 การดำเนินการขณะที่ $(x-1)(x^2+x+1)$ นั้นต้องเอา x มาลบ 1 แล้วเก็บไว้ เอา x มายกกำลังสอง บวกด้วย x บวก 1 อีกที แล้วค่อยเอาผลที่ได้มาคูณกับตัวที่เก็บไว้นั่นคือ 5 การดำเนินการด้วยกัน

ถ้าเขียนโปรแกรมเพื่อคิดเลขไม่กี่ตัวอาจจะไม่เห็นความแตกต่างมาก เพราะคอมพิวเตอร์คิดแวบเดียวจนเราแยกความต่างไม่ออก แต่ถ้าลองเขียนโปรแกรมให้หาค่าของ $x^3 - 1$ สำหรับ x ตั้งแต่ 1 ถึง 100,000 ก็จะเห็นความต่างของเวลาที่ต้องใช้อยู่พอสมควร

อีกประเด็นที่แสดงให้เห็นถึงความสำคัญมากๆ ของการจัดรูปคือ ข้อจำกัดเกี่ยวกับการคำนวณของคอมพิวเตอร์ สมมติว่าเราต้องการคำนวณหาค่า $\frac{\sqrt{25+x}-5}{x}$ สำหรับ x ที่มีค่าเข้าใกล้ 0 ใครที่เคยเรียนแคลคูลัสมาก่อนจะรู้ว่าค่าของ $\frac{\sqrt{25+x}-5}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 นั้นมีค่าเท่ากับ 0.1 แต่ถ้าหากเอาไปเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยให้ x มีค่าเป็น 0.1 0.01 0.001 ไล่ไปแบบนี้จะพบว่า สักค่าของ $\frac{\sqrt{25+x}-5}{x}$ ที่คอมพิวเตอร์คำนวณออกมาได้กลับกลายเป็น 0 ซึ่งผิดไปจากที่ควรจะเป็น สิ่งนี้เกิดขึ้นจากข้อจำกัดอย่างหนึ่งของคอมพิวเตอร์ที่เรียกว่า การสูญเสียนัยสำคัญ (loss of significance) ซึ่งเกิดจากการที่คอมพิวเตอร์เก็บค่าทศนิยมได้อย่างจำกัด

ดังนั้นเมื่อ x มีค่าใกล้ 0 มากๆ คอมพิวเตอร์จะคำนวณ $\sqrt{25+x}$ ออกมาได้ 5 พอดี เพราะปัดทศนิยมหลักหลังๆ ทิ้ง ทำให้เมื่อมาลบกับ 5 ก็จะได้ 0 ซึ่งเอาไปหารเลขอะไรก็ได้ 0 แต่ถ้าเราจัดรูปเสียใหม่เป็น $\frac{1}{5+\sqrt{25+x}}$ ซึ่ง

ไม่เกิดการลบเลขจนหายไป ผลที่ได้คือค่าจะไม่กลายเป็น 0 อย่างที่เคยเกิด และนี่คือตัวอย่างที่คำนวณได้จากโปรแกรมเอกซ์เซล

n	$x = 10^{-n}$	$\frac{\sqrt{25+x}-5}{x}$	$\frac{1}{5+\sqrt{25+x}}$
1	0.1	0.0999	0.0999
2	0.01	0.09999	0.09999
3	0.001	0.099999	0.099999
4	0.0001	0.1	0.1
5	0.00001	0.1	0.1
6	0.000001	0.1	0.1
7	0.0000001	0.1	0.1
8	0.00000001	0.1	0.1
9	0.000000001	0.1	0.1
10	1E-10	0.1	0.1
11	1E-11	0.100009	0.1
12	1E-12	0.099476	0.1
13	1E-13	0.0977	0.1
14	1E-14	0.088818	0.1
15	1E-15	0	0.1
16	1E-16	0	0.1
17	1E-17	0	0.1
18	1E-18	0	0.1
19	1E-19	0	0.1
20	1E-20	0	0.1

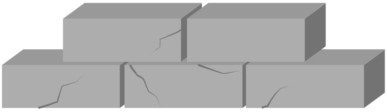
นี่คือคำตอบของคำถามที่สองที่ว่า ทำไมเราถึงอยากเปลี่ยนจากรูปหนึ่งไปเป็นอีกรูปหนึ่ง ในแต่ละการใช้งานนั้นก็มีรูปแบบที่เหมาะสม และเราจัดรูปก็เพื่อให้เหมาะกับการใช้งานตามแต่ละจุดประสงค์นั่นเอง

ทางเดินรอบสนาม เงินเดือน และการลงทุน

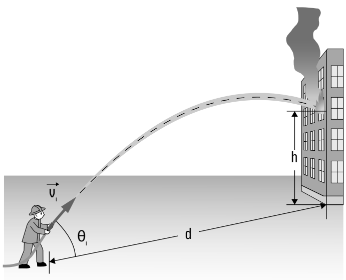
กลับมาที่คำถามแรกที่ว่า แล้วเราจะอยากยุ่งกับพหุนามไปทำไม โดยคำตอบขึ้นอยู่กับว่าคุณเป็นใคร

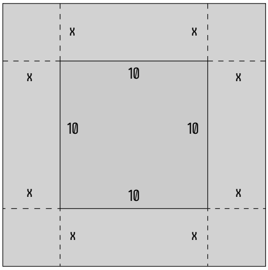
ถ้าคุณเป็นนักฟิสิกส์ คุณอาจจะสนใจว่าตำแหน่งของวัตถุเมื่อโยนขึ้นไปบนฟ้า ณ แต่ละเวลาเป็นเท่าไร คุณจะพบว่ามันคือ $ut - \frac{1}{2}gt^2$ ซึ่งเป็นพหุนามกำลังสองที่สามารถช่วยให้เราคำนวณหามุมที่เหมาะสมในการฉีดน้ำดับเพลิง หรือช่วยให้เรายิงปืนใหญ่ได้แม่นยำดังที่มักจะถูกยกเป็นตัวอย่างในโจทย์ฟิสิกส์

ถ้าคุณเป็นสถาปนิก คุณจะพบว่าพื้นที่ของทางเดินความกว้าง x เมตรรอบสนามขนาด 10 คูณ 10 นั้นเท่ากับ $(10 + 2x)^2 - 100$ ซึ่งเป็นพหุนามกำลังสองที่ช่วยให้คุณสามารถคำนวณจำนวนอิฐที่ต้องใช้ได้



หรือถ้าคุณเป็นนักเศรษฐศาสตร์ คุณอาจจะสนใจเอาพหุนามกำลังสามมาจำลองค่าต่างๆ เนื่องจากมีสมบัติการเปลี่ยนความเว้าซึ่งพหุนามกำลังหนึ่งหรือสองไม่มี





ปรับปรุงจาก *(ซ้าย)* toppr (online). *(ขวา)* CK-12 Foundation (online).

หรือแม้แต่ถ้าคุณเป็นคนธรรมดา คุณก็สามารถใช้พหุนามในการคำนวณได้ว่าระหว่างการรับเงินเป็นงวดกับรับเงินก้อนใหญ่ทีเดียวแบบไหนคุ้มค่ากว่ากัน ถ้าปกติเราได้เงินเดือนเดือนละ 25,000 บาท คิดรวมทั้งปีเป็น 3 แสนบาท แต่บริษัทเสนอว่าแทนที่จะจ่ายทุกเดือน เขาจะจ่ายทีเดียวตอนสิ้นปีเลย 310,000 บาท ซึ่งมากกว่าเงินที่ควรจะได้ตั้งหมื่นนึง

ถึงฟังดูน่าสนใจ แต่คำถามคือ จ่ายทีเดียวตอนสิ้นปีดีกว่าจริงหรือเปล่า ถ้าตัดเรื่องการได้เงินเร็วก็ได้ใช้เร็วออกไปก่อนและคิดเฉพาะเรื่องตัวเงินล้วนๆ สมมติว่าเราได้เงินเดือนทุกเดือนแล้วเอาเงินที่ได้มาไปลงทุนทั้งหมดโดยได้

กำไรประมาณ 10% ต่อเดือน กว่าจะถึงสิ้นปีเงินเดือนของเดือนแรกก็จะมีมูลค่าเป็น $25{,}000(1+0.1)^{11}$ ส่วนเงินเดือนของเดือนที่สองก็จะมีมูลค่าเป็น $25{,}000(1+0.1)^{10}$ ไล่แบบนี้ไปเรื่อยๆ จนถึงเดือนสุดท้าย นั่นคือในท้ายที่สุดเราจะมีเงินทั้งหมด

$$25{,}000(1+0.1)^{11} + \cdots + 25{,}000(1+0.1)^{1} + 25{,}000$$

ผลบวกที่ได้เท่ากับ 534,607 บาทซึ่งมากกว่า 310,000 บาท นี่คือพลังของการลงทุนด้วยเงินทั้งหมด แต่ความเป็นจริงก็คือ เราคงไม่ได้เอาเงินทั้งหมดไปลงทุน เพราะคนเราก็ต้องกินต้องใช้ ถ้าลองตัดส่วนที่จะลงทุนเหลือเดือนละแค่ 3,000 บาท ก็จะได้ว่า สิ้นปีเงินเดือนทั้งหมดของเราจะมีมูลค่า

$$3000(1+0.1)^{11} + \cdots + 3000(1+0.1)^{1} + 3000 + (22000 \times 12)$$

ผลบวกที่ได้เท่ากับ 328,152.9 บาทซึ่งก็ยังมากกว่า 310,000 บาทอยู่ดี แต่ความน่าหนักใจของการคิดแบบนี้คือกำไรจากการลงทุนอาจจะไม่ถึง 10% ต่อเดือนก็ได้ แน่นอนว่าถ้าลงทุนได้กำไรต่ำมากๆ การรับ 310,000 บาทจากบริษัทอาจจะดีกว่า ดังนั้นคำถามคือ กำไรขั้นต่ำจากการลงทุนควรเป็นเท่าไรถึงจะทำให้การเลือกรับเงินทุกเดือนเป็นตัวเลือก

ที่ดีกว่าการรับเงินก้อนใหญ่ตอนปลายปี ถ้าเรากำหนดให้ r คือร้อยละของกำไรที่จะได้จากการลงทุนต่อเดือนและให้ $x = 1 + \frac{r}{100}$ มูลค่าของเงินเดือนปลายปีของเราจะได้เป็นพหุนามกำลัง 11 นั่นคือ

$$3{,}000x^{11} + \cdots + 3{,}000x + 3{,}000 + (22{,}000 \times 12)$$

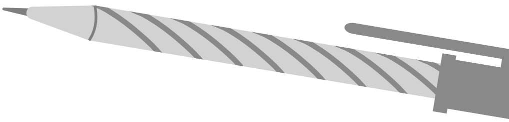
เมื่อจัดรูปให้สวยงามจะได้

$$3{,}000(x^{11} + \cdots + x + 1) + 264{,}000$$

ทีนี้เราต้องการเทียบเงินก้อนนี้กับข้อเสนอของบริษัทคือ 310,000 บาท ก็จะได้อสมการ

$$3{,}000(x^{11} + \cdots + x + 1) + 264{,}000 \geq 310{,}000$$

เมื่อแก้อสมการนี้ออกมาจะได้ $x \geq 1.04353$ นั่นคือเราต้องทำกำไรให้ได้เดือนละ 4.353% การรับเงินเป็นเดือนทุกเดือนอย่างนี้ถึงจะคุ้ม นี่เป็นตัวอย่างเพื่อให้เห็นที่ทางของพหุนามในการคำนวณสิ่งต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับเราไม่ทางใดก็ทางหนึ่ง ซึ่งแน่นอนว่าปัญหาที่ยกมาถูกทำให้ง่ายเกินจริงเพื่อให้พอเห็นภาพเฉยๆ เพราะความจริงแล้วการลงทุนมีปัจจัยอื่นๆ ที่ต้องเอามาคำนวณด้วยมากมายจนอสมการที่ต้องแก้นั้นมีความซับซ้อนมากกว่าตัวอย่างที่ยกมา



กล่องนมและการผลิตกล่องนม

หัวข้อสุดท้ายในเรื่องจำนวนจริงคือค่าสัมบูรณ์ ซึ่งถูกใช้มากในเรื่องที่เราไม่สนใจเครื่องหมายบวกลบ เช่น ขนาดความแตกต่าง หรือการวัดความผิดพลาด การเคลื่อนที่ในฟิสิกส์มีทิศบวกทิศลบ แต่ถ้าเราสนใจแค่ระยะทางซึ่งคือขนาดก็เอามาเฉพาะค่าบวกของมัน ถ้าเอาความสูงของคนสองคนมาลบกันเพื่อหาผลต่าง ไม่ว่าลบกันแล้วจะได้ค่าบวกหรือลบ เราก็จะรายงานผลต่างเป็นค่าบวกเหมือนกัน หรือถ้าเราโยนลูกบอลพลาดไป 5 เซนติเมตรอาจจะหมายถึงไกลหรือใกล้ 5 เซนติเมตรเกินไปก็ได้

ตัวอย่างการใช้ค่าสัมบูรณ์ง่ายๆ คือการหาความผิดพลาดเฉลี่ย ถ้าเครื่องจักรเครื่องหนึ่งต้องเติมนมใส่กล่องที่ปริมาตร 125 มิลลิลิตร สมมติว่าเติม 5 กล่องได้ปริมาณ 127 124 126 126 123 มิลลิลิตร ถ้าเราอยากหาค่าความผิดพลาดของนมที่เติมแต่ละกล่องก็ต้องเอามาลบกับ 125 ซึ่งจะได้ 2 -1 1 1 -2 มิลลิลิตรตามลำดับ จะเห็นว่ากล่องที่ใส่นมเยอะเกินความผิดพลาดจะออกมาเป็นบวก ส่วนกล่องที่ใส่นมน้อยเกินความผิดพลาดจะออกมาเป็นลบ

ทีนี้ถ้าเราเอามาหาค่าเฉลี่ยตรงๆ โดยไม่ใส่ค่าสัมบูรณ์ก่อน ผลคือจะได้ความผิดพลาดเฉลี่ยเท่ากับ 0.2 มิลลิลิตร ซึ่งดูน้อยมากเหมือนว่าเครื่องจักรนี้ทำงานดีสุดๆ ทั้งที่ความ

จริงแล้วที่ค่าเฉลี่ยใกล้ 0 ขนาดนี้เพราะส่วนที่ผิดพลาดทางบวกและลบหักล้างกันไปเอง แต่ถ้าเราเอาไปหาค่าสัมบูรณ์ก่อนเป็น 2 1 1 1 2 แล้วค่อยหาค่าเฉลี่ย จะได้ว่าความผิดพลาดเฉลี่ยเท่ากับ 1.4 มิลลิลิตร ซึ่งดูสะท้อนความผิดพลาดได้สมจริงกว่า โดยการคำนวณนี้มีอีกชื่อเรียกว่า ความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย (mean absolute deviation)

แน่นอนว่าในอุดมคติเราอยากให้เครื่องจักรไม่มีความผิดพลาด แต่ในความเป็นจริงแล้วเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ ดังนั้นแทนที่จะพูดถึงเรื่องความไม่ผิดพลาด เรามักจะสนใจขอบเขตของความผิดพลาดที่ยอมรับได้มากกว่า ใครที่เคยใช้อุปกรณ์ในห้องแล็บก็น่าจะคุ้นเคยกับความผิดพลาดของเครื่องมืออยู่แล้ว เครื่องชั่งบางเครื่องนั้นละเอียดกว่าอีกเครื่อง อุปกรณ์สำหรับตวงก็เช่นกัน ซึ่งค่าความผิดพลาดพวกนี้ก็จะระบุเอาไว้อยู่แล้วกับตัวเครื่องมือ

กลับมาที่โรงงานผลิตนมกล่องของเรา คราวนี้มาดูเครื่องผลิตกล่องนมกันบ้าง สมมติว่ากล่องนมที่จะผลิตนั้นเป็นรูปลูกบาศก์ ใช่ ผมรู้ว่ามันแปลกที่กล่องนมจะเป็นรูปลูกบาศก์ แต่ขอสมมติแบบนี้ไปก่อนเพื่อความง่ายของการคำนวณ เป้าหมายคือต้องการผลิตกล่องนมสำหรับปริมาตร 125 มิลลิลิตร นั่นคือแต่ละด้านต้องยาวเท่ากับ 5 เซนติเมตร จากข้อมูลของเครื่องเติมนมลงกล่องใน 3 ย่อหน้าที่แล้วพบว่า

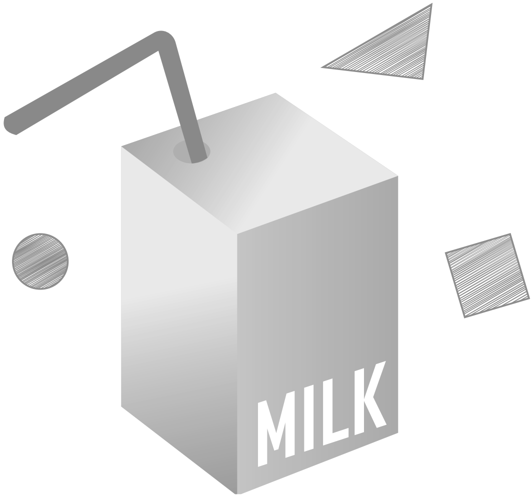
ปริมาณนั้นผิดพลาดเฉลี่ยเท่ากับ 1.4 มิลลิลิตร ดังนั้นเพื่อความปลอดภัยโรงงานจึงกำหนดมาตรฐานไว้ว่าปริมาตรของกล่องนมที่ผลิตขึ้นนั้นต้องผิดพลาดไม่เกิน 2 มิลลิลิตร ดังนั้น ถ้าเรากำหนดให้กล่องนมแต่ละด้านยาวเท่ากับ x เซนติเมตรจะได้ปริมาตรของกล่องนมคือ x^3 มิลลิลิตร เมื่อเรากำหนดให้ความผิดพลาดของปริมาตรของกล่องนมที่จะสร้างขึ้นต้องไม่เกิน 2 มิลลิลิตร แปลว่า

$$|x^3 - 125| \leq 2$$

เมื่อแก้อสมการออกมาจะได้ $4.97319 \leq x \leq 5.02653$ นั่นคือการวัดความยาวของวัสดุในกระบวนการสร้างกล่องนั้นเราต้องมั่นใจว่าผิดพลาดไม่เกิน 0.02653 เซนติเมตร ถึงจะมั่นใจได้ว่าปริมาตรที่ออกมาจะไม่ผิดพลาดเกินเกณฑ์

อีกศาสตร์หนึ่งที่วอแวอยู่กับการหาความผิดพลาดนั่นคือเอไอ (Artificial Intelligence - AI) ที่พยายามสร้างโปรแกรมที่เรียนรู้จากความผิดพลาดของการทำนายของตัวเองแล้วค่อยๆ ลดความผิดพลาดนั้นด้วยสมการคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า แมชชีนเลิร์นนิง (Machine Learning) เช่น โปรแกรมทำนายราคาหุ้นในอนาคต ในตอนเริ่มแรกโปรแกรมจะทำนายแบบมั่วๆ ไปก่อนและค่อยคำนวณค่าความผิดพลาดจากการทำนาย แล้วจึงเอาความผิดพลาดที่ได้ไปพัฒนาให้การทำนายครั้งถัดไปแม่นยำขึ้น

ส่วนใหญ่เวลาเราใช้โปรแกรมพวกนี้จะเรียนรู้จนทำนายได้อย่างแม่นยำแล้ว แต่กว่าจะมาถึงตอนที่เราได้ใช้มันก็ต้องผ่านการเรียนรู้จากความผิดพลาดที่คำนวณจากค่าสัมบูรณ์ จะต่างก็ตรงที่ค่าสัมบูรณ์นั้นถูกใช้หาความผิดพลาดในหนึ่งมิติ นั่นคือตัวแปรเดียว แต่ในโลกของหลายตัวแปรนั้นก็ต้องอาศัยเครื่องมือที่มีไว้วัดความผิดพลาดที่ซับซ้อนขึ้นไป ซึ่งเราจะได้คุยกันในบทที่ 7 เรื่องเวกเตอร์แบบยาวๆ อีกที



แหล่งความรู้เพิ่มเติม

Ifrah, Georges. *The Universal History of Numbers*. London: Harvill, 2000.

Lausch, Hans, and Wilfred Nobauer. *Algebra of polynomials.* New York: Elsevier, 2000.

Mendhak. “Standard Paper Sizes Are an Elegant Example of Simple Maths.” 12 Dec. 2020.

Pantip. *เรียนคณิตศาสตร์ ซื้อปลาต้องไปนั่งถอดรูทไหมคะ.* เข้าถึงเมื่อ 16 ธันวาคม 2567, เข้าถึงได้จาก pantip.com/topic/32847797

Vij, Ashu. “Loss of Significance in Numerical Computing and Polynomial Form.” *International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology* 2, 2 (February 2015): 30-31.