

วิธีการแปลงลาปลาซเบื้องต้น

วิธีการแปลงลาปลาซเบื้องต้น

เทียนชัย ประดิศถายน

สมชาย จิตะพันธ์กุล

มานพ วงศ์สายสุวรรณ

ปรมินทร์ แสงวงษ์งาม

ลัญฉกร วุฒิสีทธิกุลกิจ



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2550

เทียนชัย ประดิศถายน

วิธีการแปลงลาปลาซเบื้องต้น / โดย เทียนชัย ประดิศถายน และคณะ

1. การแปลงลาปลาซ

515.723

ISBN 978-974-03-1925-2

สปพจ. 1000



สรรคุณคำวิชาการ สุสังคัม

www.ChulaPress.com

Knowledge to All

ลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 1,000 เล่ม พ.ศ. 2550

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้นต้องได้รับ

อนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้จัดจำหน่าย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ. พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ. นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ. ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ. นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

รัตนานิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

เครือข่าย ศูนย์หนังสือ ม.แม่ฟ้าหลวง จ. เชียงราย โทร. 0-5391-7020-4 โทรสาร 0-5391-7025

ศูนย์หนังสือ ม.วลัยลักษณ์ จ. นครศรีธรรมราช โทร. 0-7567-3648-51 โทรสาร 0-7567-3652

ร้านหนังสือบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) รามคำแหง 43/1 โทร. 0-2538-2573 โทรสาร 0-2539-7091

ศูนย์หนังสือ ม.ราชภัฏเชียงราย จ. เชียงราย โทร. 0-5377-6000

ศูนย์หนังสือ ม.อุบลราชธานี จ. อุบลราชธานี โทร. 0-4535-3140, 0-4528-8400-3 ต่อ 1803

โทรสาร 0-4535-3145

ศูนย์หนังสือ ม.ราชภัฏสุราษฎร์ธานี จ. สุราษฎร์ธานี โทร. 0-7735-5466, 0-7791-3333 โทรสาร 0-7735-5468

ศูนย์หนังสือเทคโนโลยีโออาร์พีซี จ. ระยอง โทร. 0-3889-9130-2 ต่อ 331 โทรสาร 0-3889-9130 ต่อ 301

ร้านค้าติดต่อ แผนกขายส่ง สาขารัตนานิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9

โทรสาร 0-2950-5405

กองบรรณาธิการ : ทิพวรรณ ไหละสุต

ออกแบบปก และรูปเล่ม : รศ. ดร. ลัญฉกร วุฒิสถิตกุลกิจ

คำนำ

จุดมุ่งหมายของหนังสือเทคนิคการแปลงลาปลาซเบื้องต้นเล่มนี้เป็นหนังสืออ่านประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับนิสิตภาควิชาไฟฟ้า และสาขาที่เกี่ยวข้องเป็นสำคัญ หนังสือเล่มนี้ได้นำเสนอแนวทางและแนวคิดในการทำโจทย์และแก้ไขปัญหาในหัวข้อการแปลงลาปลาซเบื้องต้น เมื่อศึกษาหนังสือเล่มนี้แล้วจะเป็นแนวทางที่สามารถนำไปใช้กับวิชาที่คล้ายคลึงกันต่อไป จึงหวังว่านิสิตและนักศึกษาที่สนใจวิชาด้านนี้จะนำไปใช้ประโยชน์ได้ไม่มากนักน้อยสำหรับเนื้อหาในทางประยุกต์นั้นจะนำเสนอในหนังสือต่อจากแนวทางที่ให้ไว้ ณ ที่นี้

รองศาสตราจารย์ ดร.เทียนชัย ประดิศถายน

9 กรกฎาคม 2549

การแปลงลาปลาซเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญยิ่งในการแก้ปัญหา การวิเคราะห์ และการสังเคราะห์ ทั้งตัวสัญญาณและระบบที่มีการใช้งานจริง เป็นต้นว่า วงจรไฟฟ้า ระบบเชิงกล กระบวนการทางเคมี ดังนั้น หนังสือเล่มนี้จึงพยายามนำเสนอเทคนิคในแง่มุมต่าง ๆ อย่างกว้างขวางเพื่อให้ผู้ที่สนใจได้ทำความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง เพื่อนำไปใช้ประโยชน์ได้อย่างแท้จริง และที่สำคัญสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ซึ่งเหมาะกับผู้ที่ต้องการศึกษาเพิ่มเติมนอกห้องเรียน อย่างไรก็ตามหนังสือเล่มนี้ก็สามารถนำไปใช้อ่านประกอบในชั้นเรียนได้เป็นอย่างดีด้วยเช่นกัน จึงคาดว่าผู้สนใจจะได้รับประโยชน์สมดังความคาดหวังทุกประการ

รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย จิตะพันธ์กุล

26 กันยายน 2549

หนังสือเล่มนี้เกี่ยวกับการแปลงลาปลาซซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งเป็นปัญหาที่พบในทฤษฎีวงจรไฟฟ้า ระบบควบคุมป้อนกลับ และหลักการสื่อสาร จุดเด่นของหนังสือเล่มนี้อยู่ที่โจทย์ตัวอย่างจำนวนมาก ซึ่งรวบรวมมาจาก แบบฝึกหัด การบ้านและข้อสอบที่ใช้ในการเรียนการสอนของภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในช่วงเวลาไม่น้อยกว่า 10 ปี แสดงให้เห็นถึงวิวัฒนาการของการเรียนการสอนและพัฒนาการของเทคนิคในการทำ

โจทย์ที่เปลี่ยนไปตามเทคโนโลยีที่เปลี่ยนไป ผมขอขอบคุณความพยายามของรองศาสตราจารย์ ดร.ลัญจกร วุฒิสัทติกุลกิจ ซึ่งมีความวิริยะอุตสาหะอย่างยิ่งในการสื่อสารกับอาจารย์ทั้งรุ่นเก่าและใหม่ จนสามารถรวบรวมโจทย์ต่าง ๆ ออกมาเป็นหนังสือได้ และหวังว่าหนังสือเล่มนี้คงเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา นักวิจัย ตลอดจนผู้อ่านทั่วไปทุกท่านตามสมควร

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ

14 กุมภาพันธ์ 2550

การที่เราจะจำเรียนศิลปวิชาหนึ่ง ๆ คงแห้งแล้งอย่างยิ่งหากเราไม่ตระหนักถึงคุณค่าของสิ่งที่จักเรียนนั้น ผมเองก็มีเพื่อนหลายคนที่พอล่าถึงลาปลาซแล้วก็ทำหน้าบอบุญไม่รับ แต่นั่นเป็นเพราะเขาเหล่านั้นยังไม่ตระหนักถึงคุณค่าของสิ่งนี้โดยเฉพาะที่จะทราบซึ่งถึงประโยชน์ ตลอดจนเห็นความงามของมันดังเช่นคนธรรมดาบางที่ก็มองผ่านภาพวาดบางภาพที่แฝงไว้ด้วยความงามวิจิตร การประยุกต์ใช้ลาปลาซที่สำคัญคือ การใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์อันเป็นรูปแบบของแบบจำลองของระบบมากมายในโลกนี้ที่เราใช้ประโยชน์กันอยู่นั่นเอง ลองคิดดูง่าย ๆ ว่า โลกของการหาปริพันธ์ที่แสนจะธรรมดา (ในสายตาผม) เปลี่ยนไปเป็นโลกของพีชคณิตที่ดูน่าใช้กว่า การดำเนินการในโลกใหม่นี้ดูง่ายกว่าเห็น ๆ เลยทีเดียว นี่เป็นเพียงเหตุผลหนึ่งที่พอจะกล่าวได้ในประโยชน์อีกหลายอย่างที่ผู้ใช้จะได้รับจากการลาปลาซ กระนั้นก็ตามแม้จะกล่าวว่า โลกที่เปลี่ยนมาแล้วนี้ดูง่ายกว่าเดิม แต่บางท่านที่ไม่ชำนาญการดำเนินการในโลกใบใหม่นี้ก็อาจจะรู้สึกโศกานัก หนังสือเล่มนี้ส่วนหนึ่งจึงมุ่งหมายที่จะเป็นสิ่งที่ใช้เสริมสร้างความชำนาญดังกล่าวให้แก่ท่านผู้อ่านให้รู้สึก “เก๋แล้วเก๋” ที่จะประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซในงานของท่าน

สุดท้ายนี้ กระผมขอกราบขอบพระคุณท่านรองศาสตราจารย์ ดร.ลัญจกร วุฒิสัทติกุลกิจ ผู้เมตตาต่อข้าพเจ้าเสมอมาที่ได้ให้โอกาสอันสำคัญยิ่งคือ ได้ร่วมทำงานนี้กับท่าน และผู้เขียนท่านอื่นซึ่งล้วนเป็นคณาจารย์ผู้ทรงคุณวุฒิของชาติ หนึ่งในนั้นคือ ท่านรองศาสตราจารย์ ดร.เทียนชัย ประดิศถาชน ผู้เปิดโลกทรรศน์ในองค์ความรู้ทางด้านนี้ให้แก่ข้าพเจ้าอย่างมาก หากพบว่า มีจุดบกพร่องใดปรากฏในหนังสือนี้ ข้าพเจ้าขออภัยท่านผู้อ่านไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

ปรมินทร์ แสงวงษ์งาม

19 กันยายน 2549

หนังสือเทคนิคการแปลงลาปลาซเบื้องต้นเล่มนี้เกิดจากความร่วมแรงร่วมใจกันของ นักวิชาการถึง 4 ยุค รองศาสตราจารย์ ดร.เทียนชัย ประดิศถายน อาจารย์อาวุโสผู้ที่มีประสิทธิภาพความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ให้แก่นิสิตวิศวกรรมไฟฟ้ามากกว่า 40 ปี ปัจจุบันท่านได้รับ เกียรติให้ดำรงตำแหน่งผู้ทรงคุณวุฒิในมหาวิทยาลัยทั้งของภาครัฐและเอกชนหลายแห่ง รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย จิตะพันธุ์กุล หัวหน้าโครงการทุนวิจัยร่วมภาครัฐบาลเอกชนที่มีส่วนสำคัญช่วยให้หนังสือเล่มนี้เกิดขึ้นได้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ นักวิชาการที่มากด้วยความรู้ความสามารถ ท่านมีผลงานในเชิงวิชาการประสบความสำเร็จและได้รับรางวัลมากมาย นายปรมินทร์ แสงวงศ์งาม นักศึกษานิเทศศาสตร์ใหม่ที่มีเอกลักษณ์เป็นของตนเองและมีความปรารถนาในความเป็นเลิศทางวิชาการ การมีนักวิชาการผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ที่มีประสบการณ์ที่แตกต่างกันในแต่ละยุคสมัยมาร่วมกันถ่ายทอดความรู้ในหัวข้อเดียวกันจึงเป็นการผสมผสานที่น่าสนใจ การแก้โจทย์ปัญหาในแบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อมีการนำเสนอเทคนิคที่แตกต่างกันหลายแบบ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นการรวบรวมจากประสบการณ์ที่ยาวนานของ รองศาสตราจารย์ ดร.เทียนชัย ประดิศถายน หนังสือเล่มนี้จึงเหมาะกับนิสิตนักศึกษาที่ประสงค์จะเริ่มต้นเรียนรู้การแปลงลาปลาซอย่างเป็นระบบ สามารถเข้าใจถึงเทคนิคการแก้โจทย์ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้เขียนขอขอบคุณเป็นพิเศษต่ออาจารย์ผู้ทรงคุณวุฒิดังต่อไปนี้ ขอกราบพระขอบคุณท่าน ราชบัณฑิต ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เดชนครินทร์ ที่ได้สละเวลาอันมีค่าในการตรวจสอบการใช้ภาษาและคำศัพท์ในหนังสือเล่มนี้ ซึ่งเป็นคำศัพท์ที่อ้างอิงตามศัพท์บัญญัติของราชบัณฑิตยสถาน นอกจากนี้ ท่านราชบัณฑิตยังได้ฝากข้อคิดเรื่องการใช้ภาษาฟุ่มเฟือย โดยได้ยกตัวอย่างกลอนสั้น ๆ ที่พระราชวรวงศ์เธอ พระองค์เจ้ารัชนีแจ่มจรัส กรมหมื่นพิทยาลงกรณ์ ทรงพระนิพนธ์ไว้

สงสารคำ ทำการมานานแล้ว	ดูไม่แคล้วทั่วไปในหนังสือ
มันถูกใช้ทุกอย่างไม่วางมือ	แต่ละมือใช้ลำบากยากเต็มที
ตำรวจเห็นโจรหาญ ทำการจับ	โจรมันกลับทะยาน ทำการหนี
ทำการป่วยเป็นลมล้มพอดี	ทำการซี้จิ้นหมายว่าตายเอย

ซึ่งเป็นคำประพันธ์ที่ประชดประชันการใช้คำ “ทำการ” นำหน้าคำกริยาต่าง ๆ อย่างฟุ่มเฟือยเกินความจำเป็น

ขอขอบคุณศาสตราจารย์ ดร.ประสิทธิ์ ประพัฒน์มงคล คณะกรรมการกิจการ
โทรคมนาคมแห่งชาติ (กทช.) กับโอกาสในการเข้าร่วมทำงานกับบุคลากรที่มีคุณภาพของ กทช.
ในฐานะอนุกรรมการคณะกรรมการศึกษาด้านสื่อสารไร้สายความเร็วสูงและโทรศัพท์ผ่าน
โครงข่ายอินเทอร์เน็ต และแนะนำผู้เขียนเข้าอบรมในหลักสูตรการเปิดเสรีกิจการทางโทรคมนาคม
ณ ประเทศสวีเดน รองศาสตราจารย์ ดร.วาทิต เบญจพลกุล ต้นแบบที่ดีของนักวิชาการที่ประสบ
ความสำเร็จในทุกด้าน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว นักบริหารวิชาการมืออาชีพที่มีความ
นุ่มนวลอ่อนหวานน่ารักและลึกล้ำเกินบรรยาย รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสิตย์วัฒนา นัก
คิด นักพูด นักเขียน นักวิจัยที่เปี่ยมไปด้วยพลังมหาศาลที่มุ่งมั่นสู่ความเป็นเลิศ นายกองน้อยถ้อย
นักรบ อาจารย์บุญช่วย ทรัพย์มันชัย และดร.สุริย์ พุ่มรินทร์ ผู้เชี่ยวชาญด้านอิเล็กทรอนิกส์ แห่ง
ห้องปฏิบัติการวิจัย IDAR ท่านทั้งสองเป็นผู้ที่มีจิตใจงดงาม โอบอ้อมอารี นำเคารพ ท่านทั้งสองได้
ทุ่มเทแรงกายและใจในการผลิตสื่อการสอนที่มีคุณภาพล้ำค่า และงานวิจัยมากมาย ข้าพเจ้ารู้สึกชื่น
ชมยิ่งนัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง กับประโยคที่กล่าววามนุษย์เราสุดท้ายแล้วก็
เอาอะไรไปไม่ได้จะแก่งแย่งกันไปเพื่ออะไร อาจารย์จักรพันธ์ แซ่ลี้ ผู้ที่ฝ่าฝืนในธรรมะ
ตรงไปตรงมา นำเลื่อมใส ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เชาว์ดิศ อัสวกุล ผู้บุกเบิกงานด้านจราจรของ
ประเทศ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชาญชัย ปลื้มปิติวิริยะเวช ผู้เชี่ยวชาญทางด้านการประมวลผล
สัญญาณภาพโดยเฉพาะงานประยุกต์ทางการแพทย์ กับบรรยากาศทางวิชาการที่เป็นกันเอง
สนุกสนานและน่าสุขใจ ดร.กฤษศ อุดมวงศ์เสรี และดร.ธวัชชัย เตชะสอนันต์ อาจารย์รุ่นใหม่ รูป
งาม ไฟแรง กับกิจกรรมกีฬาฟุตบอลที่ช่างสนุกสนานเร้าใจทุกสัปดาห์ ยอดเยี่ยมจริง ๆ

ขอแสดงความขอบคุณต่อ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุภาวดี อร่ามวิทย์ รองหัวหน้าภาควิชา
วิศวกรรมไฟฟ้า ผู้เชี่ยวชาญด้านเทคโนโลยีมัลติมีเดีย และการบริหารจัดการโทรคมนาคม กับความ
ประทับใจในความเป็นเลิศทุก ๆ ด้านของท่าน นับเป็นแรงบันดาลใจที่ยิ่งใหญ่ให้กับผู้เขียน ผู้ช่วย
ศาสตราจารย์ ดร.นิสาชล ตั้งเสี่ยมวิสัย นักวิชาการด้านการประมวลผลสัญญาณเสียง ที่มีนิสัยฉับเร็ว
มากและมีผลงานคุณภาพมากมาย ดร.ดวงฤดี วรสุชีพ ท่านจบการศึกษาจากมหาวิทยาลัย
สแตนฟอร์ด ดร.วิทยากร อัครวิเศษ หัวหน้าสาขาไฟฟ้าสื่อสาร ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พสุ แก้ว
ปลั่ง นักดนตรีเพลงร็อคผู้ออกแบบโครงข่ายใยแก้วนำแสงของประเทศ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.
ชัยเชษฐ์ สายวิจิตร อาจารย์หนุ่มรูปงามแสนดีสุภาพเรียบร้อย อาจารย์สุวิทย์ นาคพิระยุธ นักวิจัย
ด้านการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลและการออกแบบฮาร์ดแวร์สื่อสาร ผู้ที่มีสติปัญญาเป็นเลิศ

ขอขอบคุณ คุณณัฐ กาญจนศิริ ครูปฏิบัติการที่มีคุณภาพของสาขาไฟฟ้าสื่อสารที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์เสมอมา ที่สำคัญคุณผู้เขียนขอขอบคุณเป็นอย่างสูงต่อคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ให้การส่งเสริมและสนับสนุนในการเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ภายใต้โครงการสนับสนุนการเขียนตำรา/หนังสือของคณาจารย์คณะวิศวกรรมศาสตร์

ขอแสดงความขอบคุณต่อผู้ช่วยศาสตราจารย์ มานิต รุจิวิโรดม กรรมการผู้อำนวยการสำนักพิมพ์ และศาสตราจารย์ ปรีชา ช้างขวัญยืน รองผู้อำนวยการสำนักพิมพ์ ที่ให้ความอนุเคราะห์จัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ ในส่วนของการตรวจพิสูจน์อักษรที่ละเอียดรอบคอบนี้ได้รับการช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากคุณภรรยา กองศักดิ์ คุณทิพวรรณ โหละสุด คุณทัศนีย์ ผิวขำ คุณวาสนา ชำเช็น และคุณเรวดี แก้วแสงแจ่ม บุคลากรคุณภาพของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ท้ายสุดนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้เขียน และส่วนดีของหนังสือเล่มนี้ผู้เขียนขออุทิศแด่คุณครูอาจารย์ทุกท่าน และที่ลืมมิได้เลยก็คือครอบครัวที่อบอุ่นและน่ารักของผู้เขียนที่มีส่วนกระตุ้นและเป็นกำลังใจตลอดมา หากมีข้อบกพร่องใด ๆ ในหนังสือเล่มนี้ก็เกิดขึ้นจากความผิดพลาดของผู้เขียนเองทั้งหมด ผู้อ่านสามารถส่งข้อคิดเห็นหรือคำแนะนำที่เป็นประโยชน์มาได้ที่ e-mail: wlunchak@chula.ac.th และผู้เขียนจะได้ดำเนินการแก้ไขในการพิมพ์ครั้งต่อไป

รองศาสตราจารย์ ดร.ถัณณกร วุฒิสัทติกุลกิจ

12 สิงหาคม 2549

สารบัญ

หน้า

คำนำ

บทที่ 1	การแปลงลาปลาซ	1
1.1	บทนำ	1
1.2	การแปลงลาปลาซด้านเดียว	2
1.3	คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ	7
1.3.1	คุณสมบัติเชิงเส้น	7
1.3.2	คุณสมบัติการสเกลทางเวลา	9
1.3.3	คุณสมบัติการเลื่อนทางเวลา	10
1.3.4	คุณสมบัติการเลื่อนในโดเมน s	11
1.3.5	คุณสมบัติสังวัตการ	13
1.3.6	คุณสมบัติการคูณด้วย t	17
1.3.7	คุณสมบัติการหาอนุพันธ์ทางเวลา	19
1.3.8	คุณสมบัติปริพันธ์ทางเวลา	21
1.3.9	คุณสมบัติทฤษฎีบทค่าตั้งต้น	23
1.3.10	คุณสมบัติทฤษฎีบทค่าสุดท้าย	25
	ตัวอย่างการแปลงลาปลาซ	31

บทที่ 2 การแปลงลาปลาซผกผัน	63
2.1 การแปลงลาปลาซผกผัน	63
2.2 ฟังก์ชันตรรกยะ	64
2.3 การแยกเศษส่วนย่อย	66
2.3.1 การแยกเศษส่วนย่อยกับฟังก์ชันที่มีโพลซ้ำ	71
2.3.2 การแยกเศษส่วนย่อยกับฟังก์ชันตรรกยะไม่เหมาะสม	74
2.4 การแปลงลาปลาซผกผันกับฟังก์ชันตรรกยะ	76
ตัวอย่างการแปลงลาปลาซผกผัน	78
ภาคผนวก ก สัญญาณพื้นฐาน	167
ภาคผนวก ข การมีจริงของผลการแปลงลาปลาซ	173
การแก้ปัญหการแปลงลาปลาซด้วย <i>MATLAB</i>	175
บรรณานุกรม	181

การแปลงลาปลาซ

1.1 บทนำ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญยิ่งในการวิเคราะห์สัญญาณต่อเนื่องทางเวลาและระบบเชิงเส้น ในบทนี้จะได้อธิบายถึงนิยามของการแปลงลาปลาซและแสดงให้เห็นถึงตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาผลตอบสนองของระบบเชิงเส้น ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่มีคุณสมบัติเหตุภาพ (causality) ที่มีต่อสัญญาณที่ป้อนเข้ามาของระบบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะพิจารณากรณีที่กำหนดให้สัญญาณขาเข้ามีค่าเป็นศูนย์สำหรับ $t < 0$ และมีเงื่อนไขเริ่มต้นทั้งที่เป็นศูนย์และไม่เป็นศูนย์ ณ เวลา $t = 0$ ด้วยการแปลงลาปลาซสามารถนิยามได้ 2 ลักษณะ คือ การแปลงลาปลาซด้านเดียว (one sided / unilateral) และการแปลงลาปลาซสองด้าน (two sided / bilateral) การแปลงลาปลาซด้านเดียวมีประโยชน์ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น (differential equation with initial conditions) ในขณะที่การแปลงลาปลาซสองด้านเหมาะกับการทำความเข้าใจกับคุณลักษณะของระบบ เช่น เสถียรภาพ (stability) ของระบบ เหตุภาพ (causality) และผลตอบสนองความถี่ (frequency response) ในที่นี้จะได้บรรยายและให้ความสำคัญเฉพาะกับการแปลงลาปลาซด้านเดียวเนื่องจากเป็นคณิตศาสตร์ที่ใช้กันทางวิศวกรรมอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า ระบบเชิงกล กระบวนการทางเคมี และระบบควบคุมป้อนกลับ

1.2 การแปลงลาปลาซด้านเดียว

การแปลงลาปลาซด้านเดียวของสัญญาณ $x(t)$ มีนิยามดังนี้คือ

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (1.1)$$

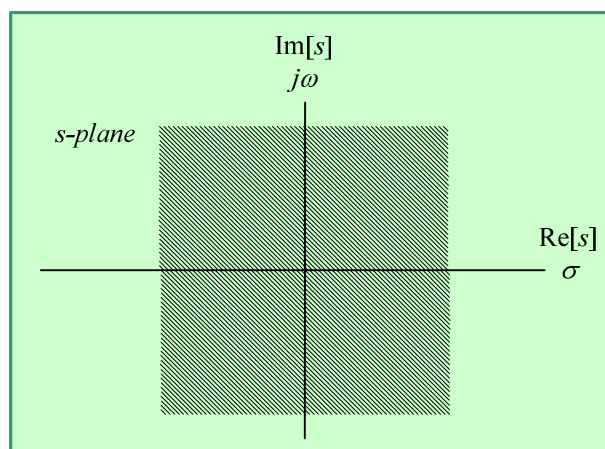
โดยที่ s เป็นตัวแปรเชิงซ้อน (complex variable) ที่สามารถเขียนในรูปของ $s = \sigma + j\omega$ สังเกตว่าช่วงการหาปริพันธ์เริ่มต้นจาก 0^- ซึ่งหมายความว่าให้ทำการหาปริพันธ์ครอบคลุมค่าที่ไม่ต่อเนื่องและสัญญาณอิมพัลส์ ณ เวลา $t = 0$ ด้วยหากมีปรากฏอยู่ในสัญญาณ $x(t)$ ดังนั้น จะเห็นว่าค่าของ $X(s)$ ขึ้นอยู่กับสัญญาณ $x(t)$ ที่เวลา $t \geq 0$ เพื่อความสะดวกโดยทั่วไปเราสามารถใส่เครื่องหมาย $\mathcal{L}[\cdot]$ เพื่อสื่อว่าเป็นการแปลงลาปลาซ กล่าวคือ

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] \quad (1.2)$$

หรือจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง $x(t)$ และ $X(s)$ ว่าเป็นคู่การแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad (1.3)$$

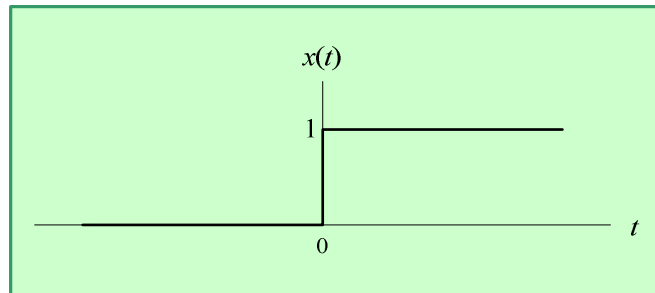
ตัวแปรเชิงซ้อน s นั้นสามารถมีค่าเป็นตัวเลขใด ๆ ก็ได้ในระนาบเชิงซ้อน (complex plane) ที่สามารถแสดงได้ด้วยแกนตั้งและแกนนอนดังในรูปที่ 1.1 โดยกำหนดให้แกนในแนวนอน σ เป็นค่าส่วนจริงของตัวแปรเชิงซ้อน s หรือ $\text{Re}[s]$ และแกนในแนวตั้ง $j\omega$ ใช้แทนค่าส่วนจินตภาพของ s หรือ $\text{Im}[s]$ เราเรียกระนาบเชิงซ้อนนี้ว่า ระนาบ s (s -plane)



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างระนาบ s

ตัวอย่าง 1.1 ■ ■

จงหาการแปลงลาปลาซของสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย $x(t) = u(t)$ ตามรูปที่ 1.2



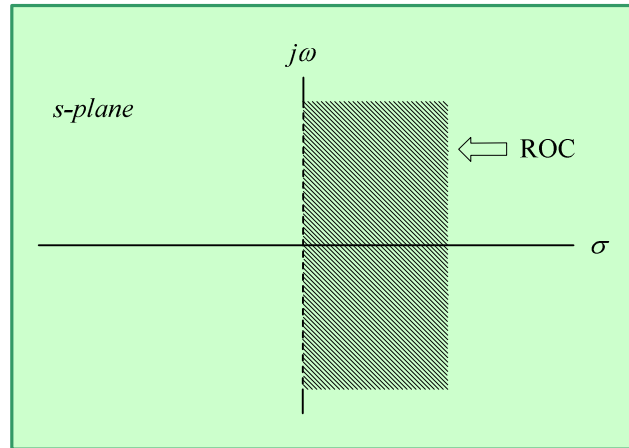
รูปที่ 1.2 สัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = -\frac{e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}}{s} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{e^{-\sigma t}}{s} (\cos \omega t - j \sin \omega t) \Big|_0^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-\sigma t}}{s} (\cos \omega t - j \sin \omega t) \right] + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

เมื่อ $t \rightarrow \infty$ พจน์ $(\cos \omega t - j \sin \omega t)$ มีค่าแกว่งขึ้นลงอยู่ภายในขอบเขตจำกัด ในขณะที่พจน์ $e^{-\sigma t}$ มีค่าลู่อื่นสู่ศูนย์สำหรับกรณีที่ $\sigma > 0$ และมีค่าเป็นอนันต์หาก $\sigma < 0$ ฉะนั้น บริเวณที่มีการลู่อื่นเข้า (region of convergence หรือ ROC) บนระนาบ s สำหรับการแปลงลาปลาซของสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วยจึงครอบคลุมบริเวณที่ $\text{Re}[s] > 0$ ซึ่งสามารถเขียนแสดงเป็นกราฟในรูปที่ 1.3 และผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วยจึงมีค่าเท่ากับ

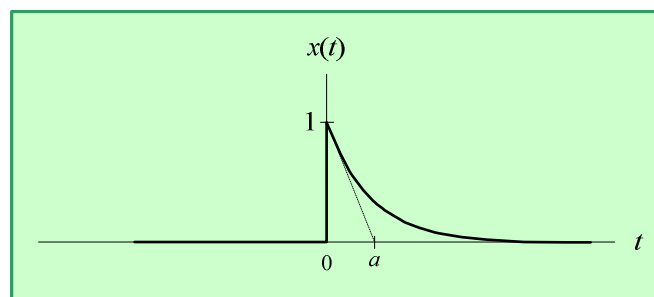
$$X(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$$



รูปที่ 1.3 บริเวณที่มีการลู่อเข้า (ROC) ในระนาบ s ของการแปลงลาปลาซสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย

ตัวอย่าง 1.2 ■ ■

จงหาค่าการแปลงลาปลาซของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t) = e^{-at}u(t)$



รูปที่ 1.4 สัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t) = e^{-at}u(t)$

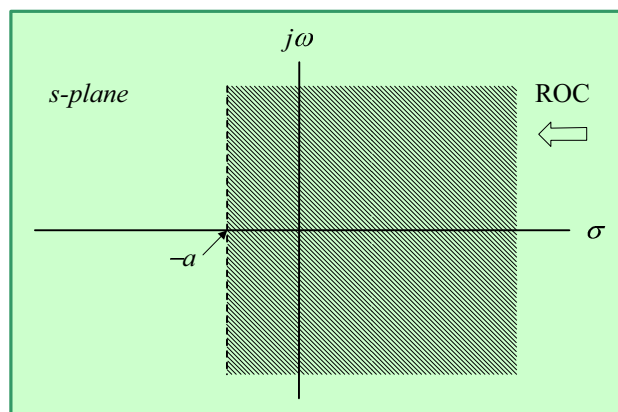
วิธีทำ

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Bigg|_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left. \frac{e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t}}{s+a} \right|_0^\infty \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[- \frac{e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t}}{s+a} \right] + \left[\frac{1}{s+a} \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[- \frac{e^{-(\sigma+a)t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)}{s+a} \right] + \left[\frac{1}{s+a} \right]
 \end{aligned}$$

เมื่อ $t \rightarrow \infty$ พจน์ $(\cos \omega t - j \sin \omega t)$ มีค่าแกว่งขึ้นลงอยู่ภายในขอบเขตจำกัด ในขณะที่พจน์ $e^{-(\sigma+a)t}$ มีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์ในกรณีที่ $\sigma > -a$ และมีค่าเป็นอนันต์หาก $\sigma < -a$ ฉะนั้น บริเวณที่มีการลู่เข้าบนระนาบ s สำหรับการแปลงลาปลาซของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t) = e^{-at}u(t)$ จึงครอบคลุมบริเวณที่ $\text{Re}[s] > -a$ ซึ่งสามารถเขียนแสดงเป็นกราฟในรูปที่ 1.5 ฉะนั้นค่าการแปลงลาปลาซของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t) = e^{-at}u(t)$ จึงมีค่าเท่ากับ

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \sigma > -a$$



รูปที่ 1.5 บริเวณที่มีการลู่เข้า (ROC) ในระนาบ s ของการแปลงลาปลาซสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t) = e^{-at}u(t)$

ตัวอย่าง 1.3 ■ ■

จงหาค่าการแปลงลาปลาซของสัญญาณอิมพัลส์ (impulse signal) $x(t) = \delta(t)$

วิธีทำ

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt$$

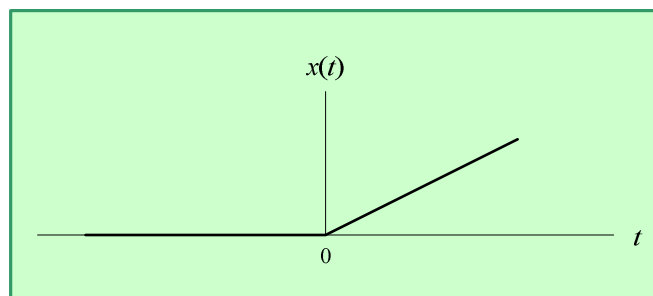
เนื่องจากฟังก์ชันอิมพัลส์มีค่าไม่เป็นศูนย์เฉพาะ ณ ตำแหน่ง $t = 0$ ฉะนั้น สิ่งที่ต้องพิจารณาคือ ช่วงการหาปริพันธ์ว่าจะกระทำเพียงครั้งหนึ่งของช่วงเวลาดังกล่าว กระทำตลอดทั้งช่วงเวลา หรือไม่มีการหาปริพันธ์ ณ เวลาดังกล่าวเลย เนื่องจากการนิยามการแปลงลาปลาซด้านเดียว กำหนดให้การหาปริพันธ์เริ่มต้นที่เวลา $t = 0^-$ ดังนั้นการหาปริพันธ์จึงต้องกระทำตลอดทั้งช่วงเวลา ซึ่งส่งผลทำให้

$$X(s) = 1$$

ในกรณีนี้ค่าของ s ที่ใช้ไม่มีผลกระทบต่อ การแปลงลาปลาซของสัญญาณอิมพัลส์แต่อย่างใด ดังนั้น บริเวณที่มีการลู่อเข้า (ROC) คือทุกจุดบนระนาบ s

ตัวอย่าง 1.4 ■ ■

จงหาค่าการแปลงลาปลาซของสัญญาณแรมปี (ramp signal) $x(t) = tu(t)$ ตามรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 สัญญาณแรมปี $x(t) = tu(t)$

วิธีทำ

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} tu(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

อาศัยการหาปริพันธ์แยกส่วน $\int u dv = uv - \int v du$ โดยที่ $u = t$ และ $dv = e^{-st} dt$

$$\begin{aligned} X(s) &= \left[-t \frac{e^{-st}}{s} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt \right]_0^{\infty} \\ &= \left[-t \frac{e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s^2} \right) \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

1.3 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ

1.3.1 คุณสมบัติเชิงเส้น

คุณสมบัติข้อแรกที่จะกล่าวถึงคือภาวะเชิงเส้น (linearity) ซึ่งมีใจความดังนี้คือ

ถ้า

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \text{ และ } x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$$

แล้ว

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s) \quad (1.4)$$

โดย a, b เป็นค่าคงตัว คุณสมบัติข้อนี้สามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากนักโดยอาศัยคุณสมบัติเชิงเส้นของการหาปริพันธ์

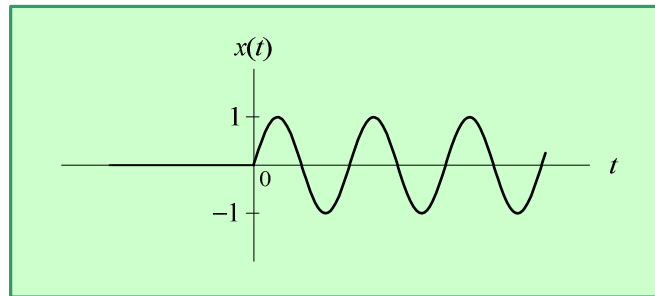
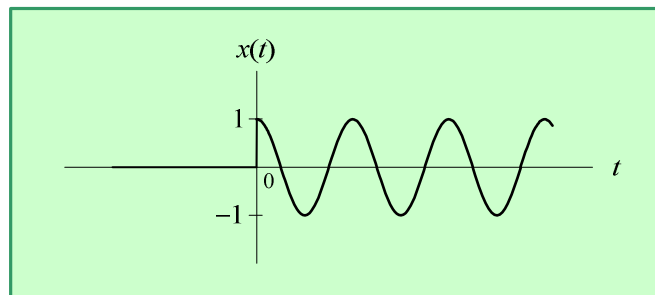
ตัวอย่าง 1.5 ■ ■

จงหาค่าการแปลงลาปลาซของสัญญาณต่อไปนี้

(ก) $x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$

(ข) $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$

วิธีทำ

(ก) สัญญาณ $x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$ (ข) สัญญาณ $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$

รูปที่ 1.7 สัญญาณตัวอย่างไซน์ซอชด์และโคไซน์ซอชด์

$$(ก) \quad x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} u(t) - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

จากตัวอย่าง (1.2) เราทราบว่า

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

ฉะนั้น อาศัยคุณสมบัติเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซจะได้ว่า

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{2j} \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s + j\omega_0} \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$