

การจำลอง Simulation

การจำลอง Simulation

เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2555

เสกสรร เกียรติสุไพบุลย์

การจำลอง = Simulation / เสกสรร เกียรติสุไพบุลย์

1. การจำลองทางคณิตศาสตร์

511.8

ISBN xxx-xxx-xx-xxxx-x

สพจ. 1631



สรรคุณเจ้าวิชาการ ผู้สัจคม
www.ChulaPress.com
Knowledge to All

ลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน xxxx เล่ม พ.ศ. 2555

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้จัดทำหน้า ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441
สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495
ม.นเรศวร จ. พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165
ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135
ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239
โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023
จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304
รัตนนิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

เครือข่าย Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>
ศูนย์หนังสือ ม.แม่ฟ้าหลวง จ.เชียงราย โทร. 0-5391-7020-4 โทรสาร 0-5391-7025
ศูนย์หนังสือ ม.วลัยลักษณ์ จ.นครศรีธรรมราช โทร. 0-7567-3648-51 โทรสาร 0-7567-3652
ร้านหนังสือดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) งามคำแหง 43/1 โทร. 0-2538-2573
โทรสาร 0-2539-7091
ศูนย์หนังสือ ม.ราชภัฏเชียงราย จ.เชียงราย โทร. 0-5377-6000
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยอุบลราชธานี จ.อุบลราชธานี โทร. 0-4535-3140, 0-4528-8400-3
ต่อ 1803 โทรสาร 0-4535-3145
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี จ.สุราษฎร์ธานี โทร. 0-7735-5466 ,
0-7791-3333 โทรสาร 0-7735-5468
ศูนย์หนังสือเทคโนโลยีโออาร์พีซี จ.ระยอง โทร 0-3889-9130-2 ต่อ 331
โทรสาร 0-3889-9130 ต่อ 301
ศูนย์หนังสือ ม.ราชภัฏเทพสตรี จ.ลพบุรี โทร. 0-3642-7485-93

ร้านค้า, หนังสือเข้าชั้นเรียน ติดต่อแผนกขายส่ง สาขารัตนนิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9
โทรสาร 0-2950-5405

กองบรรณาธิการ : กนิษฐา กิตติคุณ

ออกแบบปก : คมสัน เกียรติสุไพบุลย์ และ Monyart

ออกแบบรูปเล่ม : ผศ. ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบุลย์

พิมพ์ที่ :

คำนำ

ตำราเล่มนี้เขียนขึ้นสำหรับประกอบการเรียนการสอนในรายวิชาการจำลองทางสถิติ ผู้เขียนพยายามสร้างสมดุลระหว่างเนื้อหาในเชิงทฤษฎี และเนื้อหาในเชิงประยุกต์ เพื่อให้ผู้อ่านสามารถนำทฤษฎีที่รวบรวมไว้ไปใช้งานได้จริงและขยายต่อความคิดเพื่อการวิจัยและพัฒนา เนื้อหาในตำราเล่มนี้เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4 ถึงระดับบัณฑิตศึกษา

การจำลองแบ่งได้เป็น การจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation) และการจำลองเหตุการณ์ไม่ต่อเนื่อง (discrete event simulation) การจำลองทั้งสองประเภทตั้งอยู่บนพื้นฐานทางทฤษฎีเดียวกัน ตำราเล่มนี้เริ่มต้นด้วยทฤษฎีการจำลองพื้นฐานซึ่งเป็นทฤษฎีเกี่ยวกับการจำลองตัวแปรสุ่มบนคอมพิวเตอร์ จากนั้นประยุกต์ทฤษฎีดังกล่าวไปยังการจำลองมอนติคาร์โล และการจำลองเหตุการณ์ไม่ต่อเนื่อง และในท้ายที่สุดเป็นการนำทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติมาประยุกต์เพื่อการวิเคราะห์และตีความผลการจำลอง

ตำราเล่มนี้ได้เพิ่มเติมเนื้อหาเกี่ยวกับเทคนิคการจำลองลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โล (Markov chain Monte Carlo) และการจำลองด้วยตัวแบบคอปูลา (Copula) เทคนิคลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โลเป็นเทคนิคการคำนวณทางสถิติเพื่อการอนุมานสถิติเชิงเบย์ ส่วนตัวแบบคอปูลาจัดว่าเป็นแนวคิดใหม่ในการสร้างและจำลองตัวแบบทางสถิติ โดยทำการแตกการแจกแจงร่วมเป็นการแจกแจงเดี่ยวกับโครงสร้างความสัมพันธ์เพื่ออำนวยความสะดวกในการสร้างตัวแบบทางสถิติที่ซับซ้อน เนื้อหาทั้งสองฉบับนี้จะทวีความสำคัญมากขึ้น และในอนาคตจะเป็นเนื้อหาที่ผู้ที่มีความเชี่ยวชาญทางการจำลองจำเป็นต้องทราบ

ตำราเล่มนี้มีลำดับการนำเสนอดังนี้ บทที่ 1 กล่าวถึงนิยามและปรัชญาในการจำลองโดยทั่วไป เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจถึงแนวคิดรวบยอดของการจำลอง บทที่ 2 รวบรวมวิธีการสร้างตัวเลขสุ่มซึ่งถือเป็นกิจกรรมย่อยที่สุดของการจำลอง บทที่ 3 ถึงบทที่ 5 กล่าวถึงการจำลองตัวแปรสุ่มและตัวแปรสุ่มร่วม โดยตั้งอยู่บนพื้นฐานของตัวเลขสุ่มที่กล่าวถึงในบทที่ 2 เพื่อให้สามารถทำความเข้าใจเนื้อหาในบทที่ 1 ถึงบทที่ 5 ผู้อ่านควรมีความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติเบื้องต้น บทที่ 6 และบทที่ 7 เป็นการประยุกต์ใช้งานการจำลองตัวแปรสุ่มในบริบทต่าง ๆ เริ่มตั้งแต่การจำลองกระบวนการสโตแคสติก การจำลองมอนติคาร์โล ไปจนถึงการจำลองเหตุการณ์ไม่ต่อเนื่อง นอกจากนี้บทที่ 6 ยังได้สรุปเนื้อหาเกี่ยวกับกระบวนการสโตแคสติกที่จำเป็นสำหรับการประยุกต์ใช้งานการจำลอง บทที่ 8 ประยุกต์เทคนิคทางสถิติไปสู่การวิเคราะห์และตีความผลการจำลองจำกัดเวลา และเทคนิคการลดความแปรปรวน

บทที่ 9 นำเสนอเทคนิคลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โลและการประยุกต์เพื่อการอนุมานเชิงเบย์ บทที่ 10 ประยุกต์ทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟไปสู่การวิเคราะห์และตีความผลการจำลองในสถานะคงตัว การวิเคราะห์ผลการจำลองด้วยเทคนิคลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โลจัดอยู่ในการจำลองประเภทนี้ เพื่อเข้าใจเนื้อหาในบทที่ 9 และ 10 ผู้อ่านควรมีความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟ บทที่ 11 กล่าวถึงตัวแบบคอปพูลาและการจำลองตัวแบบคอปพูลาเบื้องต้น ในภาคผนวกได้รวบรวมทฤษฎีความน่าจะเป็นรวมถึงทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟที่เป็นพื้นฐานสำหรับเนื้อหาในตำราเล่มนี้

สำหรับการจัดสรรเนื้อหาในการเรียนการสอน บทที่ 1 ถึงบทที่ 8 เพียงพอสำหรับการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรี สำหรับบทที่ 9 ถึงบทที่ 11 เป็นเนื้อหาที่ควรบรรจุในหลักสูตรระดับบัณฑิตศึกษา บทที่ 7 และแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7 ควรได้รับการปฏิบัติและทดลองจริงโดยผู้เรียนเพื่อให้ผู้เรียนทราบถึงกระบวนการจำลอง และประโยชน์จากการประยุกต์ใช้งานการจำลอง

จากประสบการณ์การสอน 7 ปีในวิชาการคำนวณและการจำลองเชิงสถิติในระดับบัณฑิตศึกษา และ 2 ปีในวิชาการจำลองและการคำนวณเชิงสถิติในระดับปริญญาตรี ของภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ผู้เขียนได้รับคำวิจารณ์ที่เป็นประโยชน์จากผู้เรียน และนำข้อคิดเห็นต่าง ๆ มาปรับปรุงเนื้อหาจนสำเร็จปรากฏเป็นตำราเล่มนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ผู้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการทำตำราด้วย L^AT_EX และขอขอบคุณ คุณพัชรวิวงศ์พงศาสิทธิ์ ที่ช่วยตรวจทานด้านภาษาและการจัดรูปเล่มในเบื้องต้น ผู้เขียนขอขอบคุณกองบรรณาธิการแห่งสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โดยเฉพาะอย่างยิ่งคุณกนิษฐา กิตติคุณ และผู้ทรงคุณวุฒิที่ได้กรุณาอ่านต้นฉบับอย่างละเอียด และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ สำหรับข้อบกพร่องทั้งหมดผู้เขียนขอรับไว้แต่เพียงผู้เดียว ในท้ายที่สุด ตำราเล่มนี้ไม่อาจเสร็จสมบูรณ์ได้หากผู้เขียนไม่ได้รับการสนับสนุนในด้านต่าง ๆ จากคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เสกสรรค์ เกียรติสุไพบุลย์
มิถุนายน 2555

สารบัญ

คำนำ

1	บทนำ	1
1.1	บทนำ	1
1.2	การจำลอง	2
1.3	การจำแนกการจำลอง	3
1.4	กระบวนการจำลอง	3
1.5	ดวงตาที่สาม	4
2	ตัวเลขสุ่ม	5
2.1	บทนำ	5
2.2	ตัวเลขสุ่มเทียม	5
2.3	วิธีสมภาคเชิงเส้น	7
2.4	วิธีสมภาคการคูณ	8
2.5	วิธีสร้างลำดับตัวเลขสุ่มพื้นฐานอื่น ๆ	10
2.6	วิธีแมสเซนทวิสเตอร์	12
2.7	วิธีเวียนเกิดเชิงพหุรวม	15
2.8	คุณภาพของตัวเลขสุ่ม	15
2.9	การใช้งานตัวเลขสุ่ม	18
2.10	แบบฝึกหัด	19
3	เทคนิคการแปลงผกผัน	21
3.1	บทนำ	21
3.2	กรณีศึกษา : การจำลองม้าหมุน	22
3.3	เทคนิคฟังก์ชันผกผัน	25

3.4	แบบฝึกหัด	35
4	เทคนิคการปฏิเสธ	37
4.1	บทนำ	37
4.2	ขั้นตอนวิธีของเทคนิคการปฏิเสธ	37
4.3	การใช้งานเทคนิคการปฏิเสธ	45
4.4	แบบฝึกหัด	49
5	การจำลองตัวแปรสุ่มแบบปกติ	53
5.1	บทนำ	53
5.2	การจำลองตัวแปรสุ่มแบบปกติหนึ่งตัวแปร	53
5.3	การจำลองเวกเตอร์สุ่มแบบปกติ	60
5.4	แบบฝึกหัด	66
6	การจำลองกระบวนการสโตแคสติกพื้นฐาน	69
6.1	บทนำ	69
6.2	การจำลองการเคลื่อนที่แบบบราวน์	70
6.3	การจำลองการเคลื่อนที่แบบบราวน์เรขาคณิต	73
6.4	การจำลองกระบวนการปัวซอง	76
6.5	การจำลองกระบวนการปัวซองไม่เอกพันธ์	80
6.6	แบบฝึกหัด	83
7	การประยุกต์ใช้งานการจำลอง	85
7.1	บทนำ	85
7.2	การจำลองระบบสถิติ	85
7.3	การจำลองระบบพลวัตโดยขับเคลื่อนด้วยเวลา	87
7.4	การจำลองระบบพลวัตโดยขับเคลื่อนด้วยเหตุการณ์	95
7.5	แบบฝึกหัด	103
8	การวิเคราะห์ผลลัพธ์จากการจำลองจำกัดเวลา	107
8.1	บทนำ	107
8.2	ตัววัดผล	107
8.3	การวิเคราะห์ผลลัพธ์ของการจำลองจำกัดเวลา	112
8.4	การเปรียบเทียบผลลัพธ์การจำลองจำกัดเวลา	117

8.5	เทคนิคการลดความแปรปรวน	118
8.5.1	เทคนิคตัวแปรตรงข้าม	119
8.5.2	เทคนิคตัวแปรควบคุม	124
8.5.3	การสุ่มตามความสำคัญ	125
8.6	ข้อคิดเห็น	128
8.7	แบบฝึกหัด	128
9	เทคนิคลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โล	131
9.1	บทนำ	131
9.2	เทคนิคลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โล	132
9.3	การเดินแบบบอลลของโลวอส	135
9.4	วิธีฮิตแอนด์รัน	136
9.5	ขั้นตอนวิธีของเมโทรโพลิส-เฮสติง	141
9.6	การสุ่มแบบกิบส์	147
9.7	แบบฝึกหัด	151
10	การวิเคราะห์ผลลัพธ์จากการจำลองในสถานะคงตัว	153
10.1	บทนำ	153
10.2	เทคนิคค่าเฉลี่ยกลุ่ม	154
10.3	เทคนิคการวินิจฉัยแบบเกลแมนและรูบิน	160
10.4	แบบฝึกหัด	164
11	คอปพูลา	165
11.1	บทนำ	165
11.2	สหสัมพันธ์	165
11.3	สหสัมพันธ์อันดับ	172
11.4	คอปพูลา	173
11.5	วิธีนอร์ทา	176
11.6	คอปพูลาแบบหนึ่งปัจจัย	177
11.7	แบบฝึกหัด	179
ภาคผนวก ก	ทฤษฎีความน่าจะเป็น	183
ก.1	บทนำ	183
ก.2	ปริภูมิความน่าจะเป็น	183

ก.3	ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข และความเป็นอิสระกัน	184
ก.4	ตัวแปรสุ่ม	185
ก.5	ตัวแปรสุ่มร่วม	187
ก.6	ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข	190
ก.7	ลูกโซ่มาร์คอฟ	192
บรรณานุกรม		195
ดัชนี		199
ประวัติผู้เขียน		203

สารบัญรูปภาพ

1.1	การทดลองด้วยการจำลอง	2
1.2	กระบวนการจำลอง	3
2.1	จุดในระนาบจากตัวเลขสุ่มเทียมที่สร้างด้วยวิธี MCG	17
2.2	กระบวนการจำลองตัวแปรสุ่ม	18
3.1	แสดงแนวคิดพื้นฐานในการจำลองตัวแปรสุ่ม	24
3.2	แสดงการจำลองจำนวนผู้เข้าเล่นม้าหมุนในแต่ละรอบด้วย c.d.f.	25
3.3	แสดงการจำลองตัวแปรสุ่มแบบปกติด้วยเทคนิคการแปลงผกผัน	33
3.4	แสดงการจำลองตัวแปรสุ่มผสมแบบต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่องด้วยเทคนิคการแปลงผกผัน	34
4.1	แสดงการจำลองจุดในวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดด้วยเทคนิคการปฏิเสธ	43
4.2	การคลุ่มฟังก์ชัน p.d.f. แบบปกติมาตรฐานที่ปรับมาตรา f' ด้วยกล่องเพื่อประยุกต์เข้ากับเทคนิคการปฏิเสธ	49
6.1	เส้นทางตัวอย่าง 2 เส้นทางของการเคลื่อนที่แบบบราวน์เมื่อ $\sigma^2 = 1$	71
6.2	เส้นทางตัวอย่าง 2 เส้นทางของการเคลื่อนที่แบบบราวน์เรขาคณิตเมื่อ $\alpha = 0.5$ และ $\sigma^2 = 1$	73
6.3	เส้นทางตัวอย่าง 2 เส้นทางของกระบวนการปัวซองเมื่อ $\lambda = 1$	79
7.1	ตารางจัดการสำหรับการจำลองราคาหุ้น	89
7.2	ตารางจัดการสำหรับการจำลองมูลค่าความเสี่ยง	90
7.3	รายละเอียดตัวแบบจำลองในตารางจัดการสำหรับการจำลองมูลค่าความเสี่ยง	91
7.4	รายละเอียดการวิเคราะห์ในตารางจัดการสำหรับการจำลองมูลค่าความเสี่ยง	91
7.5	ตารางจัดการสำหรับการจำลองการซื้อขายหุ้น	92
7.6	รายละเอียดตัวแบบจำลองในตารางจัดการสำหรับการจำลองการซื้อขายหุ้น	93

7.7	รายละเอียดการจำลองการซื้อขายหุ้นตัวที่ 1	93
7.8	รายละเอียดการจำลองการซื้อขายหุ้นตัวที่ 2	94
7.9	รายละเอียดการคำนวณมูลค่า และมูลค่าสุทธิ	95
7.10	รายละเอียดการวิเคราะห์ผลลัพธ์จากการจำลองการซื้อขายหุ้น	95
7.11	ตารางจัดการสำหรับการจำลองแถวคอยแบบ $M/M/1$	101
7.12	ตารางจัดการสำหรับการจำลองแถวคอยแบบ $M/M/1$ ที่มีการหนีแถวคอย . .	102
7.13	สูตรในตารางจัดการสำหรับการจำลองแถวคอยแบบ $M/M/1$ ที่มีการหนีแถว คอย	102
8.1	แสดงตัวแบบการใช้บริการซ้ำ	111
8.2	ค่าสถิติของผลลัพธ์จากการจำลองการซื้อขายหุ้น 1,000 รอบ	116
8.3	ค่าสถิติของผลลัพธ์จากการจำลองระบบแถวคอย $M/M/1$ ที่มีการหนีแถวคอย 500 รอบ	116
9.1	แสดงการเดินตามพิกัด (coordinate walk)	134
9.2	แสดงการเดินแบบบอลของโลวอส (Lovász's Ball Walk)	136
9.3	แสดงการเคลื่อนที่ของจุดตามวิธีฮิตแอนด์รัน (Hit-and-run Method)	137
10.1	การแบ่งช่วงการจำลองเพื่อการวิเคราะห์สถานะคงตัว	157
10.2	ค่าเฉลี่ยสะสมของ μ_1 ที่ได้จากขั้นตอนวิธีของเมโทรโปลิส-เฮสติงโดยใช้วิธีฮิต- แอนด์รันสร้างตัวอย่าง	159
10.3	ค่าเฉลี่ยสะสมของ μ_1 ที่ได้จากขั้นตอนวิธีของเมโทรโปลิส-เฮสติงโดยใช้วิธีฮิต- แอนด์รันสร้างตัวอย่างจำนวน 5 ลูกโซ่ซึ่งหยุดการจำลองด้วยเทคนิคการวินิจฉัย แบบเกลแมนและรูบิน	163
11.1	กระบวนการประยุกต์ใช้ตัวแบบคอปพูลา	175

บทนำ

1.1 บทนำ

ในปัจจุบันขณะที่เทคโนโลยีสารสนเทศมีความก้าวหน้าอย่างยิ่งยวด ได้มีความพยายามที่จะจำลอง โลกของความเป็นจริงมาไว้บนคอมพิวเตอร์ เพื่อนำผลมาใช้ในการวิชาการและในเชิงพาณิชย์ ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่งการประยุกต์การจำลอง

ตัวอย่าง 1.1 (มูลค่าความเสี่ยง) สถาบันการเงินและบริษัทที่ทำการซื้อขายโภคภัณฑ์ (commodities) เช่น สินค้าเกษตร โลหะมีค่า หรือพลังงาน ในแต่ละช่วงเวลา เช่น วัน หรือ สัปดาห์ จะมีการถือครองสินทรัพย์และสินค้า หรือสัญญาที่เกี่ยวข้องกับสินทรัพย์และสินค้านั้น ๆ ซึ่งสินทรัพย์และสินค้านี้มีการซื้อขายกันในตลาดและมีความผันผวนของราคา ดังนั้น สถาบันเหล่านี้ต้องมีการเฝ้าสังเกตราคาที่ปรับตัวขึ้นลงตลอดเวลา และจำเป็นต้องตั้งเงินสำรองไว้เพื่อรักษาสภาพคล่อง คำถามหนึ่งที่ถูกให้ความสนใจ คือ สถาบันควรตั้งเงินสำรองไว้เป็นจำนวนเท่าไรในช่วงเวลาที่กำหนด ซึ่งปริมาณเงินสำรองไม่ควรต่ำหรือสูงเกินไป ถ้าปริมาณเงินสำรองต่ำเกินไปอาจเป็นผลให้สถาบันขาดสภาพคล่องในทางกลับกันหากปริมาณเงินสำรองสูงเกินไป จะทำให้สถาบันสูญเสียโอกาสในการลงทุน คำถามดังกล่าวเกี่ยวข้องกับมูลค่าความเสี่ยง (value at risk) ซึ่งเป็นหัวข้อหนึ่งในเรื่องการจัดการความเสี่ยงทางการเงิน การตอบคำถามดังกล่าวบางครั้งจำเป็นต้องใช้เทคนิคการจำลอง (simulation) เพื่อจำลองราคาของสินทรัพย์และสินค้าในอนาคตบนรากฐานของข้อมูลที่มีอยู่ และคำนวณความน่าจะเป็นและความสูญเสียในช่วงเวลาที่กำหนด จากนั้นนำความน่าจะเป็นและความสูญเสียที่คำนวณได้มาประเมินปริมาณเงินสำรอง

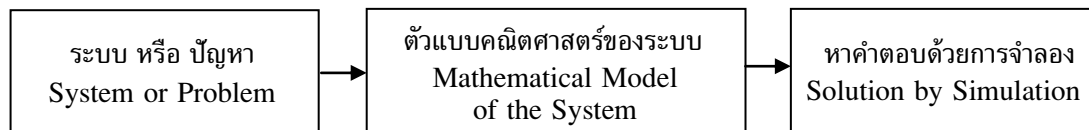
ตัวอย่าง 1.2 (แถวคอย) ในการปฏิบัติงานของธนาคารและธุรกิจบริการ ผู้ให้บริการมีความสนใจเป็นอย่างมากที่จะลดเวลาคอยของลูกค้าในแถวคอย เนื่องจากการสร้างความพึงพอใจให้กับลูกค้านับเป็น

ส่วนหนึ่งในยุทธวิธีทางการตลาด จึงได้มีการจำลองระบบแถวคอยบนคอมพิวเตอร์เพื่อทดสอบการให้บริการ โดยทำการจำลองระบบแถวคอยภายใต้สมมติฐานเกี่ยวกับลักษณะการเข้ามาใช้บริการของลูกค้า และลักษณะการให้บริการของหน่วยให้บริการ เพื่อวิเคราะห์หาปัจจัยสำคัญที่จะนำไปสู่การปรับปรุงการให้บริการ การจำลองดังกล่าวประยุกต์ทฤษฎีแถวคอยร่วมกับเทคนิคการจำลองเหตุการณ์ไม่ต่อเนื่อง (discrete event simulation)

ตัวอย่างทั้งสองข้างต้นเป็นตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานเทคนิคการจำลองบนคอมพิวเตอร์ เพื่อการตัดสินใจในธุรกิจ ยังมีตัวอย่างอีกมากซึ่งแสดงถึงประโยชน์ของเทคนิคของการจำลองในปัจจุบัน

1.2 การจำลอง

การจำลอง (simulation) เป็นการทดลองทางวิทยาศาสตร์วิธีหนึ่งซึ่งมีจุดประสงค์ที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหา และการตัดสินใจ การทดลองด้วยการจำลองเป็นการทดลองกับตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของปัญหาหรือระบบที่สนใจ ซึ่งการทดลองที่ว่านี้อาจทำบนคอมพิวเตอร์หรือไม่ก็ได้ แต่ที่จะกล่าวในที่นี้จะจำกัดเฉพาะการทดลองบนคอมพิวเตอร์เท่านั้น รูปที่ 1.1 แสดงกระบวนการทดลองด้วยการจำลอง



รูปที่ 1.1 การทดลองด้วยการจำลอง

การจำลองจึงเป็นการทดลองเพื่อหาคำตอบจากตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของปัญหา โดยมักแยกปัญหาที่ซับซ้อนเป็นส่วนย่อย ๆ หรือเป็นองค์ประกอบเล็ก ๆ ซึ่งสัมพันธ์กันด้วยกฎทางคณิตศาสตร์ง่าย ๆ แต่อาจมีจำนวนมาก จากนั้นจึงทำการคำนวณซ้ำจากองค์ประกอบและกฎง่าย ๆ ดังกล่าวจนกระทั่งได้คำตอบ ด้วยเหตุนี้การจำลองจึงต้องพึ่งพาความสามารถของคอมพิวเตอร์ในการคำนวณซ้ำที่มีอยู่เป็นจำนวนมากนี้อย่างขาดไม่ได้

ควรสังเกตว่าก่อนการจำลอง ผู้จำลองจะต้องมีตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของปัญหาก่อนเสมอ ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาควรจะถูกสร้างจากเจ้าของปัญหาหรือผู้ที่เข้าใจปัญหาดีพอ เนื่องจากการจำลองเป็นวิธีหาคำตอบ ผู้จำลองจึงถือว่าเป็นผู้แก้ปัญหาซึ่งอาจมิใช่เจ้าของปัญหาโดยตรง ในกรณีที่ผู้จำลองมิได้เป็นเจ้าของปัญหาโดยตรง ผู้จำลองจะต้องได้รับคำปรึกษาจากผู้ที่เกี่ยวข้องปัญหาเพื่อสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายปัญหาได้ครบถ้วน มิฉะนั้นตัวแบบที่ใช้จำลองจะไม่ถูกต้องและทำให้ผลการจำลองไม่สมเหตุสมผล

1.3 การจำแนกการจำลอง

ปัญหาที่ถูกแก้ไขด้วยการจำลองอาจแบ่งเป็น

1. ปัญหาที่แน่นอน (deterministic problem) เช่น การหาปริพันธ์ หรือปัญหาสุ่ม (stochastic problem) เช่น ปัญหาแถวคอย
2. ปัญหาสถิต (static) หรือปัญหาพลวัต (dynamic)

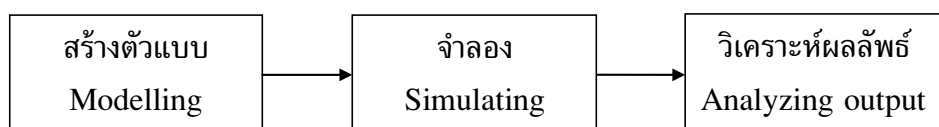
ในที่นี้เราสนใจเฉพาะการจำลองเพื่อแก้ปัญหาที่มีลักษณะสุ่ม ซึ่งรวมทั้งปัญหาที่ไม่มีเวลามาเกี่ยวข้อง (static) และปัญหาที่สถานะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา (dynamic) การจำลองเพื่อแก้ปัญหาที่มีลักษณะสุ่มนี้เรียกว่า การจำลองสุ่ม (stochastic simulation) หรือเรียกอีกอย่างว่าเทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo technique) (สำหรับนักวิชาการบางท่านอาจพิจารณาว่าเทคนิคมอนติคาร์โลจัดเป็นการจำลองสุ่มเพื่อแก้ปัญหาสถิตเท่านั้นโดยไม่รวมถึงปัญหาพลวัต)

1.4 กระบวนการจำลอง

กระบวนการจำลองประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. นิยามปัญหาหรือระบบที่สนใจและสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของระบบ
2. จำลองระบบบนคอมพิวเตอร์
3. วิเคราะห์ผล

รูปที่ 1.2 แสดงถึงกระบวนการจำลอง



รูปที่ 1.2 กระบวนการจำลอง

ขั้นตอนที่ 1 เป็นการนิยามปัญหาและสร้างตัวแบบ ผู้จำลองจะต้องเข้าใจระบบเป็นอย่างดี เพื่อที่จะสร้างตัวแบบที่ถูกต้องครบถ้วนตามนิยาม ในกรณีที่ผู้จำลองไม่ได้เป็นเจ้าของปัญหาแต่เป็นผู้ที่ได้รับมอบหมายให้เป็นผู้แก้ปัญหาอีกต่อหนึ่ง ผู้ที่เป็นเจ้าของปัญหาต้องมีส่วนร่วมในการสร้างตัวแบบและเป็นผู้ที่ควบคุมดูแลการสร้างตัวแบบอย่างใกล้ชิด

ขั้นตอนที่ 2 เป็นการนำตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของระบบมาจำลองบนคอมพิวเตอร์ ผู้จำลองจะใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ความน่าจะเป็นและสถิติ และเทคโนโลยีสารสนเทศประกอบกันเพื่อสร้างตัวแบบจำลองบนคอมพิวเตอร์ ที่สามารถประมวลผล (run) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ข้อได้เปรียบของตัวแบบจำลองบนคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพคือจะทำให้ผู้จำลองสามารถทำการประมวลผลซ้ำได้มากขึ้นในเวลาเท่ากัน ซึ่งตามหลักสถิติการมีข้อมูลจำนวนมากนั้นจะช่วยให้การวิเคราะห์ผลมีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น

ขั้นตอนที่ 3 เป็นการวิเคราะห์ผลลัพธ์ของการจำลอง เนื่องจากการจำลองเป็นการจำลองสุมผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองก็จะมีลักษณะสุมด้วย ดังนั้น ผู้จำลองจำเป็นต้องใช้เทคนิคทางสถิติในการวิเคราะห์ผลลัพธ์เพื่อการตีความผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

1.5 ดวงตาที่สาม

ในอดีตการจำลองถูกพิจารณาว่าเป็นเครื่องมือขั้นสุดท้ายที่ใช้เฉพาะเมื่อไม่สามารถใช้วิธีอื่นได้แล้ว เนื่องจากคำตอบที่ได้จากการจำลองจะมีลักษณะสุม ซึ่งจะต้องใช้วิธีทางสถิติในการตีความผลลัพธ์ ทำให้เพิ่มความซับซ้อนในการนำผลลัพธ์ไปประยุกต์ใช้ แต่ในปัจจุบันจะพบว่าปัญหาในโลกของความเป็นจริง หลายปัญหาที่มีความซับซ้อนเกินกว่าที่จะใช้วิธีอื่นนอกจากการจำลอง ดังนั้น การจำลองจึงเป็นหนึ่งในไม่กี่วิธีแก้ปัญหาก็ใช้กันแพร่หลายในปัจจุบัน สำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนสูงทั้งที่ปรากฏในวงการวิชาการ และในเชิงพาณิชย์

ในปัจจุบันนักวิชาการถือว่าการจำลองเป็นดวงตาที่สามหรือเป็นอายตนะที่เพิ่มเติมให้กับมนุษย์ เพื่อช่วยในการสร้างสัญชาตญาณเกี่ยวกับระบบหรือปัญหาที่ซับซ้อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อระบบหรือปัญหาที่สนใจมีองค์ประกอบของความไม่แน่นอนเข้าไปเกี่ยวข้อง

ตัวเลขสุ่ม

2.1 บทนำ

การจำลองที่เราสนใจเป็นการจำลองสุ่ม (stochastic simulation) ซึ่งเป็นวิธีในการแก้ปัญหาโดยใช้กฎของความน่าจะเป็น สิ่งจำเป็นสิ่งแรกคือการจำลองตัวอย่างสุ่มที่มีคุณสมบัติเป็นไปตามกฎของความน่าจะเป็นขึ้นบนคอมพิวเตอร์ ดังนั้น ขั้นตอนแรกของการจำลองคือการสร้าง *ตัวเลขสุ่ม* (random numbers)

2.2 ตัวเลขสุ่มเทียม

พิจารณาลำดับของตัวเลขทั้ง 7 ตัวดังต่อไปนี้

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (2.1)$$

ตัวเลขถัดไปควรมีค่าเท่ากับ 8 ลำดับข้างต้นเป็นลำดับเลขคณิตที่มีรูปแบบที่สามารถคาดเดาได้

พิจารณาลำดับตัวเลขทั้ง 7 ตัวดังต่อไปนี้

$$63, 96, 21, 44, 93, 64, 9 \quad (2.2)$$

ตัวเลขถัดไปควรเป็นค่าใด

ลำดับของตัวเลขสุ่มที่เราต้องการนั้นควรมีลักษณะที่ไร้รูปแบบ ไม่เป็นระเบียบ และไม่สามารถคาดเดาได้ อย่างไรก็ตามลำดับตัวเลขใน (2.2) ในความเป็นจริงมิใช่จะไม่มีรูปแบบเลยสักทีเดียว

เพราะลำดับนี้เกิดจากการยกกำลังสองเลขสองหลัก และเลือกตัวเลขสองหลักตรงกลางเป็นตัวเลขถัดไป

$$\begin{aligned} 63 &\rightarrow 63^2 = 3969 \rightarrow 96 \\ 96 &\rightarrow 96^2 = 9216 \rightarrow 21 \\ 21 &\rightarrow 21^2 = 0441 \rightarrow 44 \\ 44 &\rightarrow 44^2 = 1936 \rightarrow 93 \\ 93 &\rightarrow 93^2 = 8649 \rightarrow 64 \\ 64 &\rightarrow 64^2 = 4096 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับตัวเลขใน (2.2) จึงเป็นลำดับที่มีรูปแบบที่แน่นอน แต่เมื่อไม่ทราบสูตรที่มาจะเหมือนไม่มีรูปแบบ และไม่สามารถคาดเดาได้ ตัวเลขดังกล่าวเรียกว่า *เลขสุ่มเทียม* (pseudo-random numbers) การสร้างตัวเลขสุ่มเทียมทำได้โดยกำหนดค่าเริ่มต้นหรือ *random seed* และสร้างกลไกที่จะสร้างตัวเลขถัดไป วิธีการสร้างเลขสุ่มข้างต้นเรียกว่าวิธีมิดสแควร์ของฟอน นอยมันน์ (von Neumann midsquare) ซึ่งสามารถเขียนเป็นขั้นตอนวิธีได้ดังขั้นตอนวิธี 2.1

ขั้นตอนวิธี 2.1 von Neumann midsquare

ผลลัพธ์ : ลำดับของตัวเลขสุ่มที่มีจำนวน k หลัก $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$

- 1: เลือกเลขหนึ่งที่มีจำนวน k หลัก เป็นเลขตั้งต้น ให้ชื่อว่า x_0 และ ตั้งค่า n เป็น 0
 - 2: นำ x_n ยกกำลังสอง ให้เป็นเลข $2k$ หลักโดยเติมเลขศูนย์ด้านหน้าให้ครบ $2k$ หลักถ้าจำเป็น ให้ชื่อว่า y_n
 - 3: กำหนด x_{n+1} เป็น เลข k หลักตรงกลางของ y_n และ เพิ่ม n เป็น $n + 1$ กลับไปข้อ 2
-

ควรสังเกตว่าเมื่อเริ่มต้นที่ค่าเริ่มต้นเดียวกันเราจะได้ลำดับเดียวกัน และเมื่อสร้างตัวเลขถัดไปเรื่อย ๆ จะเกิดการวนซ้ำซึ่งถือว่าเป็นคุณสมบัติของตัวเลขสุ่มเทียม จำนวนตัวเลขสุ่มในลำดับทั้งหมดก่อนวนซ้ำเรียกว่า *คาบ*

วิธีมิดสแควร์ของฟอน นอยมันน์ ถือเป็นวิธีแรกที่ได้มีการใช้ในการสร้างตัวเลขสุ่ม ปัจจุบันเราทราบว่าลำดับดังกล่าวมีคุณสมบัติที่ไม่ดีนัก (ลองทดลองสร้างตัวเลขสุ่ม โดยเริ่มต้นที่เลข 25 และสังเกตผล) คุณสมบัติที่ดีของตัวเลขสุ่มอาจจะระบุได้ดังนี้

1. มีลักษณะสุ่ม
2. สร้างได้บนคอมพิวเตอร์
3. สร้างได้เร็ว

4. ลำดับมีความยาวสูง ก่อนที่จะวนซ้ำ
5. ผ่านการทดสอบทั้งทางทฤษฎี เช่น การทดสอบสเปกตรัม และทางสถิติ เช่น ทดสอบความสม่ำเสมอ (uniformity) และความเป็นอิสระกัน (independence)

เนื่องจากการจำลองเป็นการแก้ปัญหาโดยการสร้างตัวเลขสุ่มจำนวนมาก จึงจำเป็นที่ลำดับจะต้องมีความยาวพอก่อนที่จะวนซ้ำ ส่วนความสม่ำเสมอและความเป็นอิสระกันนั้นจะเป็นคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นที่เราต้องการต่อไป

ปัจจุบันวิธีพื้นฐานในการสร้างตัวเลขสุ่มเทียมที่เป็นที่ยอมรับ ได้แก่ วิธีสมภาคเชิงเส้น (linear congruential generator หรือ LCG) และวิธีสมภาคการคูณ (multiplicative congruential generator หรือ MCG)

2.3 วิธีสมภาคเชิงเส้น

การสร้างตัวเลขสุ่มเทียมด้วยวิธีสมภาคเชิงเส้น (Linear Congruential Method) หรือ LCG เป็นดังขั้นตอนวิธี 2.2

ขั้นตอนวิธี 2.2 Linear Congruential Generator (LCG)

กำหนด : พารามิเตอร์ a , c และ m

ผลลัพธ์ : ลำดับของตัวเลขสุ่มเทียม $(x_0, x_1, \dots)$

- 1: เริ่มต้นด้วย x_0 ใด ๆ
- 2: คำนวณ x_n โดยใช้ฟังก์ชันเวียนเกิด (recursive function)

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \mod m$$

โดย $\mod m$ เป็นการหารด้วยตัวเลข m และนำเศษของการหารเป็นคำตอบ เช่น $5 \mod 3$ เท่ากับ 2

วิธีดังกล่าวจะสร้างลำดับของเลขสุ่มเทียมที่อยู่ระหว่าง $0, 1, 2$ ถึง $m - 1$ แต่อาจจะไม่ครบทุกตัวเลข และเมื่อหาร x_n ด้วย m แล้วเราก็จะได้เลขสุ่มที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

เพื่อให้ได้คาบยาวพอ และไม่ให้เกิดช่องว่างของตัวเลขในช่วงใด ๆ วิธีหนึ่งคือ ทำให้ลำดับของตัวเลขมีลักษณะเต็มคาบ (full period) คือ มีตัวเลขตั้งแต่ 0 ถึง $m - 1$ และเกิดขึ้นเพียงครั้งเดียวในแต่ละรอบ โดยเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ (necessary and sufficient condition) สำหรับทำให้ LCG เกิดลักษณะเต็มคาบ ได้แก่

1. ตัวเลขจำนวนเต็มบวกที่หารทั้ง m และ c ลงตัวคือ 1 และ c
2. ถ้า q เป็น จำนวนเฉพาะ (prime number) ที่หาร m ลงตัวแล้ว q จะหาร $a - 1$ ลงตัวด้วย
3. ถ้า 4 หาร m ลงตัวแล้ว 4 จะหาร $a - 1$ ลงตัวด้วย

2.4 วิธีสมภาคการคูณ

การสร้างตัวเลขสุ่มเทียมด้วยวิธีสมภาคการคูณ (Multiplicative Congruential Method) หรือ MCG เป็นดังขั้นตอนวิธี 2.3

ขั้นตอนวิธี 2.3 Multiplicative Congruential Generator (MCG)

กำหนด : พารามิเตอร์ a และ m

ผลลัพธ์ : ลำดับของตัวเลขสุ่มเทียม $(x_0, x_1, \dots)$

- 1: เริ่มต้นด้วย x_0 ใด ๆ
- 2: คำนวณ x_n โดยใช้ฟังก์ชันเวียนเกิด (recursive function)

$$x_n = ax_{n-1} \mod m$$

เมื่อหาร x_n ด้วย m ก็จะได้ลำดับของตัวเลขที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1

จะเห็นว่า MCG เป็นกรณีเฉพาะของ LCG ดังนั้น เงื่อนไขข้างต้นสำหรับเงื่อนไขเต็มคาบก็ใช้กับ MCG ได้เช่นกัน แต่จากเงื่อนไขข้อที่ 1 จะเห็นว่าเป็นไปไม่ได้ที่ MCG จะมีลักษณะเต็มคาบ เพราะลำดับไม่สามารถบรรจุ 0 ได้ อย่างไรก็ตามถ้า m เป็นจำนวนเฉพาะ และ a เป็น primitive element modulo m (หมายความว่า ตัวเลขจำนวนเต็ม l ที่น้อยที่สุดซึ่ง m หาร $a^l - 1$ ลงตัว คือ $l = m - 1$) คาบของตัวเลขสุ่มจะเท่ากับ $m - 1$ และตัวเลขสุ่มที่ได้จะเป็น 1 ถึง $m - 1$ โดยแต่ละตัวเลขจะเกิดขึ้นเพียงครั้งเดียวในแต่ละรอบของการวนซ้ำ การที่ MCG ไม่สามารถสร้างเลขศูนย์ได้นั้นไม่เป็นอุปสรรคต่อการจำลอง (เมื่อ m มีค่าสูง โอกาสที่จะสุ่มเลข 0 ตัวเดียวจะมีค่าความน่าจะเป็นน้อยมากจนสามารถละเลยได้)

$m = 2^{31} - 1$ และ $a = 7^5$ เป็นตัวอย่างหนึ่งของจำนวนเฉพาะ m และ a ที่เป็น primitive element modulo m จากการศึกษาพบว่าคู่ของ m และ a ดังกล่าวมีผลทางสถิติที่ดีและใช้กันอย่างแพร่หลาย คู่ของค่า m และ a อื่น ๆ ที่ให้ผลทางสถิติที่ดี ยกตัวอย่างเช่น $m = 2^{31} - 1, a = 742938285$ โดย [12] หรือ $m = 2147483399, a = 40692$ โดย [28] นอกจากนั้น [18] แสดงตารางบรรจุคู่ m และ a อื่น ๆ ที่สามารถเลือกใช้