

ไฟไนต์เอลิเมนต์ ในงานวิศวกรรม

Finite Element Method
in Engineering

with MATLAB,
Mathematica &
FEATool Multiphysics

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ตำราดีเด่นสาขาวิศวกรรมศาสตร์และอุตสาหกรรมวิจัย

ไฟไนต์เอลิเมนต์ ในงานวิศวกรรม

ไฟฟ้ไนต์เอลิเมนต์ ในงานวิศวกรรม

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

 **สำนักพิมพ์**
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2568

345.-

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม / ปราโมทย์ เดชะอำไพ

1. ไฟไนต์เอลิเมนต์. 2. ไฟไนต์เมนต์ - การประมวลผลข้อมูล.
3. ไฟไนต์เอลิเมนต์ – โปรแกรมคอมพิวเตอร์. 4. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข.
5. คณิตศาสตร์วิศวกรรม.

620.00151825

ISBN (e-book) 978-974-03-4383-7

สปจ. 409/7



สสคณค่วิชาการ สู้สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว
การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดทำโดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2568

www.cupress.chula.ac.th [CUB6712-004K]

โทร. 0-2218-3562-3

บรรณาธิการอำนวยการ : รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลวรรณ พิมพ์พันธุ์

กองบรรณาธิการฝ่ายวิชาการ : ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ปิยนดา บุนนาค

ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ศาสตราจารย์ นายแพทย์ชิษณุ พันธุ์เจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์

ผู้ประสานงาน : วาสนา ชำเซ็น

พิสูจน์อักษร : พัชรมณฑิ์ คมมาน

ออกแบบปก : ไกรอัมพร พงษ์ขจร

ออกแบบรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์ขจร

สั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

<http://www.chulabook.com>

โทร. 08-6323-3703-4

customer@cubook.chula.ac.th, info@cubook.chula.ac.th

Apps: CU-eBook Store

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 7

ในการจัดพิมพ์ครั้งที่ 7 นี้ ผู้เขียนได้ปรับปรุงเพิ่มเติมเนื้อหาในแต่ละบทให้มีความสมบูรณ์และทันสมัยมากยิ่งขึ้น บทที่ 1-6 ประกอบด้วยพื้นฐานวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถนำไปใช้ศึกษาในชั้นเรียนระดับปริญญาตรีหรือศึกษาด้วยตนเอง เพราะสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่ายและประกอบไปด้วยตัวอย่างพร้อมโปรแกรมคอมพิวเตอร์อีกเป็นจำนวนมาก ส่วนบทที่ 7-9 เป็นเนื้อหาในระดับสูงทางด้านของแข็งและโครงสร้าง การถ่ายเทความร้อน และของไหลทั้งแบบไม่มีการไม่อัดตัวและอัดตัวได้ จึงเหมาะสำหรับการเรียนในระดับบัณฑิตศึกษาหรือเพื่อเป็นพื้นฐานการทำวิจัยและพัฒนาในระดับสูงขึ้นไปอีก

ผู้เขียนมีความยินดีและขอขอบคุณคณาจารย์ตามสถาบันต่าง ๆ ที่ใช้หนังสือเล่มนี้ในการเรียนการสอน ผู้เขียนมั่นใจว่าพื้นฐานความรู้ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้จะถูกแทรกเข้าไปในการเรียนการสอนวิชาต่าง ๆ ทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ด้วยเช่นกัน ทั้งนี้เนื่องจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประยุกต์เข้ากับปัญหาใด ๆ ที่ถูกรอบคลุมด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบที่หลากหลาย สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้อธิบายความเป็นจริงตามธรรมชาติของปัญหานั้น ๆ ที่มักปรากฏในการเรียนวิชาต่าง ๆ อีกทั้งในปัจจุบันมีโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้งานได้ง่าย มีปุ่มบนหน้าจอคอมพิวเตอร์น้อยมาก ทำให้ผู้ศึกษาเกิดความเข้าใจไปพร้อมกับทฤษฎี และสามารถดาวน์โหลดซอฟต์แวร์เหล่านี้มาใช้ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ

ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอัมพร พงษ์จร ที่จัดพิมพ์เนื้อหาใหม่ทั้งหมด และขอขอบคุณสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ทั้งในภาษาไทยและภาษาอังกฤษเพื่อจัดจำหน่ายในระดับสากลอย่างต่อเนื่องโดยตลอดมา

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

สาขาวิชาวิศวกรรมอากาศยาน

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมษายน 2568

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 6

ในการจัดพิมพ์ครั้งที่ 6 นี้ ผู้เขียนได้ปรับปรุงเนื้อหาในแต่ละบทให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ความสมบูรณ์นี้ประกอบด้วยเนื้อหาซึ่งอธิบายทฤษฎีของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยละเอียดเข้าใจได้ง่าย ตัวอย่างในแต่ละบทที่เพิ่มมากขึ้นพร้อมแบบฝึกหัดซึ่งมีความหลากหลาย รวมทั้งซอฟต์แวร์ซึ่งประดิษฐ์ขึ้นด้วยภาษาแมทแลบ (MATLAB) แมทมาทิกา (Mathematica) และฟอร์แทรน (Fortran) ซอฟต์แวร์เหล่านี้สอดคล้องกับตัวอย่างจึงทำให้เกิดความเข้าใจในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้อย่างลึกซึ้งและช่วยแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ได้โดยสะดวก ไฟล์ต่าง ๆ ที่ปรากฏในหนังสือสามารถคัดลอกได้จากเว็บไซต์ (website) ชื่อ

<https://goo.gl/T8afm1>

ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอำพร พงษ์จักร ที่จัดพิมพ์เนื้อหาใหม่ทั้งหมด รวมทั้งนางสาวเบญจภา ยนต์สกุล นิสิตปริญญาโทผู้ตรวจสอบความถูกต้องของการพิมพ์ครั้งนี้ และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้อย่างต่อเนื่องมาโดยตลอด

ปราโมทย์ เศษอำไพ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กันยายน 2560

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 5

ในการจัดพิมพ์หนังสือ “ฟิสิกส์อิเล็กเมนต์ในงานวิศวกรรม” ใหม่ครั้งที่ 5 นี้ ผู้เขียนได้ตรวจสอบเนื้อหาให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น นอกจากนั้นยังได้จัดเตรียมคู่มือเฉลยของแบบฝึกหัดทุกข้อ และไฟล์ PowerPoint สำหรับการนำเสนอเนื้อหาของทุกบท เพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ในการเรียนการสอนได้อย่างครบวงจร

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยได้ให้ความกรุณาจัดพิมพ์คู่มือเฉลยแบบฝึกหัดขึ้นเป็นเล่มอย่างสวยงาม หากท่านคณาจารย์ต้องการคู่มือเฉลยแบบฝึกหัดเพื่อใช้ในการเรียนการสอน โปรดแจ้งความจำนงค์มายังสำนักพิมพ์ฯ โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ

ผู้เขียนมีความยินดีที่หนังสือเล่มนี้ได้รับการตอบรับจากนิสิต นักศึกษาและนักวิจัยไทยเป็นอย่างดี ผู้เขียนมีความภาคภูมิใจเป็นอย่างยิ่งที่เนื้อหาในหนังสือได้ช่วยยกระดับความเข้าใจในศาสตร์ของระเบียบวิธีฟิสิกส์อิเล็กเมนต์นี้ให้แก่สังคมของการศึกษารวมทั้งการออกแบบงานในภาคอุตสาหกรรมของไทย

ปราโมทย์ เศษอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พฤษภาคม 2555

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 4

การจัดพิมพ์ครั้งที่ 4 นี้ ผู้เขียนได้ปรับปรุงเนื้อหาให้มีความทันสมัย รูปภาพให้มีความสวยงาม รวมทั้งคำอธิบายให้มีความสละสลวย กระชับรัดกุม ง่ายแก่การทำความเข้าใจ ผู้เขียนได้เพิ่มเติมเนื้อหาใหม่ที่เป็นประโยชน์ต่อการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัจจุบันลงในแต่ละบททั้งทางด้านทฤษฎี รูปภาพ และตัวอย่าง เช่น การโค้งของแผ่นบาง พลศาสตร์ของแข็ง การถ่ายเทความร้อนแบบไม่เชิงเส้นเนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุที่ขึ้นอยู่ กับอุณหภูมิ การแผ่รังสี การไหลแบบหนืด รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อวิเคราะห์ การโค้งของแผ่นบาง ภาคผนวกใหม่ และแบบฝึกหัดเพิ่มเติมในแต่ละบท ที่ทำให้หนังสือมีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ผู้เขียนมีความภาคภูมิใจที่เนื้อหาในหนังสือ “ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม” เล่มนี้ ได้นำไปใช้ในการทำวิจัย วิทยานิพนธ์ และอ้างอิงงานการคำนวณทางวิศวกรรมและ วิทยาศาสตร์ที่เกิดขึ้นในประเทศไทย เนื้อหาทั้งหมดในหนังสือเล่มนี้ นับตั้งแต่ข้อความทั้ง ภาษาไทยและภาษาอังกฤษ สมการทางคณิตศาสตร์ และรูปภาพต่าง ๆ ได้จัดพิมพ์ขึ้นใหม่โดย นางสาวไกรอัมพร พงษ์จักร ผู้ช่วยวิจัยของผู้เขียนที่มีความมานะอดทนหาเงินเป็นผลสำเร็จ ผู้เขียนขอขอบคุณนิสิตปริญญาโทและเอกของผู้เขียนทั้งที่จบการศึกษาไปแล้วและกำลังศึกษา อยู่ที่ช่วยกันสร้างผลงานและตรวจทานต้นฉบับอย่างละเอียด นับตั้งแต่ ดร.วิโรจน์ ถิ่นตระการ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภากย์ ดร.สุทธิสศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช นายเสกฐวรรธ สุจริตภักต์สกุล นายปริญญา บุญมาเลิศ นายสุธี ไตรวิวัฒนา นายอริพงษ์ มาลาทิพย์ นายพิชฌ์ณทร์ โพธิคุณ และนายสุทธิคมน์ พันธิมากรกิจ ผู้เขียนขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ ให้ความสนับสนุนจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้มาโดยตลอด และท้ายสุดขอขอบคุณ ยุกา เศรษฐอำไพ ผู้เข้าใจถึงความตั้งใจของผู้เขียน โดยเปิดโอกาสให้ผู้เขียนได้อุทิศเวลากับหนังสือเล่มนี้ในช่วง วันหยุดเสาร์-อาทิตย์ ได้อย่างเต็มที่

ปราโมทย์ เศรษฐอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
มิถุนายน 2550

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นที่รู้จักในหมู่วิศวกร นักออกแบบ นิสิต และนักศึกษากันมากยิ่งขึ้นในปัจจุบัน เป็นระเบียบวิธีที่เมื่อนำองค์ความรู้ต่าง ๆ นับตั้งแต่ ความรู้ในคณิตศาสตร์ ความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข รวมทั้งความรู้ทางด้านซอฟต์แวร์และฮาร์ดแวร์ มาประกอบกันเข้าแล้ว สามารถช่วยทำนายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้โดยสะดวก หลีกเลียงการลองผิดลองถูกของการออกแบบที่เคยใช้กันในอดีต และช่วยลดค่าใช้จ่ายในการทดลองจริงไปได้เป็นอย่างมาก

หนังสือ “ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม” เล่มนี้ ประกอบด้วยเนื้อหา พื้นฐานที่สามารถช่วยให้เกิดความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดีมากยิ่งขึ้น ผู้เขียนมีความปิติยินดีเป็นอย่างยิ่งที่เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ ได้ถูกนำไปใช้อ้างอิงในการเขียนบทความทางวิชาการและการทำวิทยานิพนธ์ของนิสิตนักศึกษาเป็นจำนวนมาก เป็นความปิติยินดีที่ได้เป็นส่วนหนึ่งในการช่วยผลักดันการศึกษาทางด้านการคำนวณของเมืองไทยเราให้ก้าวหน้าขึ้นไปครับ

ปราโมทย์ เชะอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มีนาคม 2547

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2

หลังจากการพิมพ์ครั้งแรกและตำราเล่มนี้ได้ออกวางจำหน่าย ผู้เขียนพบว่ามากกว่าครึ่งของจำนวนทั้งหมดจากการพิมพ์ครั้งแรก ได้ตกไปอยู่ในมือของวิศวกร นักวิทยาศาสตร์ และผู้สนใจอื่น ๆ ในภาคอุตสาหกรรม น้อยกว่าครึ่งหนึ่งได้ถูกนำไปใช้ประกอบการเรียนในมหาวิทยาลัยและสถาบันต่าง ๆ ข้อมูลดังกล่าวบ่งถึงความตื่นตัวในภาคอุตสาหกรรมซึ่งจำเป็นต้องพึ่งพาเทคโนโลยีการคำนวณสมัยใหม่เพื่อการแข่งขันกับต่างประเทศตลอดเวลา หลังจากตำราเล่มนี้ได้ออกวางจำหน่ายจากการพิมพ์ครั้งแรก ผู้เขียนได้มีโอกาสรู้จักกับผู้สนใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทั้งจากการโทรศัพท์พูดคุย การมาพบด้วยตนเอง หรือการพบปะในการสัมมนาอบรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ ทำให้ผู้เขียนได้ตระหนักถึงอุปสรรคหลาย ๆ ประการสำหรับบุคคลทั่วไปในการทำความเข้าใจระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเฉพาะผู้ที่ได้จบการศึกษาไปนานแล้ว ผู้เขียนจึงได้แต่งตำราวิธีการคำนวณพื้นฐานชื่อ “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม” ขึ้นมาอีกเล่มหนึ่ง ซึ่งเป็นการปูพื้นความรู้ก่อนก้าวเข้าไปทำความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในเล่มนี้

ผู้เขียนมีความยินดีเป็นอย่างมาก ที่ได้มีโอกาสเผยแพร่ความรู้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ในประเทศไทย และมีความภาคภูมิใจเป็นอย่างยิ่ง ที่ตำราเล่มนี้ได้รับรางวัลชนะเลิศจากการประกวดหนังสือวิชาการ สาขาวิศวกรรมศาสตร์และอุตสาหกรรมวิจัย ในงานมหกรรมหนังสือและสื่ออิเล็กทรอนิกส์ ปี 2538 เข้ารับพระราชทานโล่รางวัลจากสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี

ปราโมทย์ เชะอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มกราคม 2542

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1

ตำราวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เล่มนี้ ได้แต่งเรียบเรียงขึ้นเนื่องมาจากสาเหตุหลายประการ เริ่มตั้งแต่การได้สอนวิชานี้ในช่วงระยะเวลาสิบปีที่ผ่านมา ให้แก่นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ ระดับปริญญาตรี โท และเอก ของมหาวิทยาลัยออร์ช วอชิงตัน (George Washington University) และมหาวิทยาลัยโอดส์โดมินิอัน (Old Dominion University) รวมทั้งการที่ได้สอนวิชาเดียวกันนี้ให้แก่นักวิทยาศาสตร์และวิศวกรขององค์การอวกาศนาซาที่ศูนย์วิจัยแลงลีย์ (NASA Langley Research Center) ประกอบกับการที่ได้ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ในงานวิจัยต่าง ๆ มาอย่างต่อเนื่อง ในขณะที่รับราชการอยู่ในองค์การอวกาศนาซา

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการคำนวณที่ค่อนข้างใหม่ ซึ่งการพัฒนาเริ่มมาจากแรงผลักดันของงานวิจัยทางด้านอวกาศและการบิน ทั้งนี้ เพราะว่ารูปร่างชิ้นงานต่าง ๆ ของงานทางด้านนี้ค่อนข้างที่จะสลับซับซ้อน ทำให้การคำนวณออกแบบเป็นไปด้วยความยากลำบาก ความสามารถของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากที่ได้ประยุกต์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ได้พิสูจน์ให้เห็นเด่นชัดในการออกแบบชิ้นงานและโครงสร้างที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในปัจจุบันนี้ วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เริ่มนำมาประยุกต์กับงานทางด้านอื่น ๆ โดยมีจุดประสงค์หลักคือ เพื่อลดค่าใช้จ่ายที่ปรกติจำเป็นต้องใช้ไปในการทดลอง หรือเพื่อใช้กับงานที่ไม่สามารถทำการทดลองอย่างสมบูรณ์ได้ เช่น การคำนวณสภาวะของอากาศผ่านลำตัวรถยนต์ เครื่องบิน และกระสวยอวกาศ การคำนวณอุณหภูมิบนเครื่องยนต์ของรถยนต์ เครื่องบิน และสถานีอวกาศ จากประสิทธิภาพของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังกล่าว ทำให้วิธีการนี้เริ่มเป็นที่ยอมรับในหมู่วิศวกรนักออกแบบทั่วไป อย่างไรก็ตาม การใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จำเป็นต้องใช้ด้วยความรอบคอบและระมัดระวัง ผู้ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างเพียงพอ

จากประสบการณ์ของการสอนวิชานี้ในต่างประเทศมาเป็นเวลานาน ผู้เขียนได้พบว่า ตำราวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้กันอยู่ในต่างประเทศขณะนี้ ก็ยังเป็นการยากสำหรับนักศึกษาในต่างประเทศเองที่จะสามารถศึกษาและทำความเข้าใจได้ด้วยตนเอง วิธีที่ผู้เขียนพบว่าได้ผลมากที่สุดก็คือการได้เรียนได้ฟังจากอาจารย์และการจดจากกระดานดำในชั้น ทั้งนี้

เนื่องมาจากเหตุผลสำคัญที่ว่า สิ่งที่จะก่อให้เกิดความเข้าใจในวิธีการนี้โดยอ้อมแต่จำเป็นต้องประกอบด้วยพื้นฐานที่สำคัญหลายประการ นับตั้งแต่ความเข้าใจในสมการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์รวมทั้งคุณสมบัติทางกายภาพของสมการเหล่านั้น ความเข้าใจในวิธีการทางเชิงเลขในแบบต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องนำมาใช้ควบคู่กันไป รวมทั้งการมีประสบการณ์จากการที่ได้เคยนำวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ไปใช้กับงานจริงทางด้านต่าง ๆ ในทางปฏิบัติ

ในปัจจุบัน ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปได้เริ่มนำมาใช้ในการออกแบบงานต่าง ๆ ในประเทศไทย ผู้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้จำเป็นต้องมีความรู้ในขั้นตอนของวิธีการนี้ที่พอเพียงเพื่อที่จะเกิดความมั่นใจในผลลัพธ์ที่คำนวณออกมาได้ หลังจากที่ผู้เขียนได้ทำการสอนวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ในระดับอุดมศึกษาและบัณฑิตศึกษาในประเทศไทย ผู้เขียนได้พบว่านักศึกษาไทยประสบปัญหาในการใช้ตำราวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ของต่างประเทศเช่นเดียวกันกับนักศึกษาในต่างประเทศเอง และยิ่งไปกว่านั้น นักศึกษาไทยยังประสบปัญหาทางด้านภาษา เพราะคำศัพท์ส่วนใหญ่ที่ใช้ในวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้มีความหมายเฉพาะในตัวเอง ซึ่งไม่สามารถแปลได้อย่างตรงตัวจากพจนานุกรมภาษาอังกฤษ เหตุผลดังกล่าวมีส่วนผลักดันทำให้ผู้เขียนได้แต่งเรียบเรียงตำราเล่มนี้ขึ้นโดยใช้ประสบการณ์จากการสอนที่ผ่านมา และมั่นใจว่า ลำดับขั้นตอนซึ่งได้อธิบายในตำราเล่มนี้ สามารถทำให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจในวิธีการนี้ได้โดยง่ายด้วยตนเอง

ตำราวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ภาษาไทยเล่มนี้ ผู้เขียนได้แต่งเรียบเรียงขึ้นมาจากเอกสารประกอบการสอนที่ผู้เขียนได้เคยสอนและจากผลงานวิจัยที่ได้เคยทำในต่างประเทศ เนื้อหาทั้งหมดที่บรรจุในตำราเล่มนี้ โดยปรกติผู้เขียนจะแบ่งสอนออกเป็นสองรายวิชาคือ วิชาไฟไนต์เอลิเมนต์พื้นฐานและวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นสูง วิชาไฟไนต์เอลิเมนต์พื้นฐานเป็นวิชาสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 4 และระดับปริญญาโทปีแรก ซึ่งเนื้อหาประกอบด้วยพื้นฐานของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยเริ่มจากบทที่ 1 จนถึงบทที่ 5 และการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทที่ 9 ส่วนวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นสูงนั้นเป็นวิชาสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาโทและเอก ผู้ที่มีพื้นฐานความเข้าใจในวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มาแล้ว และต้องการที่จะศึกษาลึกลงไปในเรื่องละเอียดเพื่อที่จะประยุกต์วิธีการนี้เข้ากับการงานในแขนงต่าง ๆ เนื้อหาของวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นสูงบรรจุอยู่ในบทที่ 6 จนถึงบทที่ 8 และการศึกษาโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยละเอียดในบทที่ 9 ซึ่งสามารถนำไปสู่การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ด้วยตนเองหากนักศึกษาต้องการทำวิทยานิพนธ์โดยใช้วิธีการนี้

ตัวอย่างต่าง ๆ ในแต่ละบทของวิชาฟิสิกส์อิเล็กเมนต์ชั้นสูงนี้ ได้คัดเลือกมาจากการวิจัยในปัจจุบันและจากการวิจัยที่ผ่านมาของผู้เขียน รายละเอียดของตัวอย่างดังกล่าวสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากบทความทางวิชาการซึ่งแสดงอยู่ในบรรณานุกรมในตอนท้ายของบทนั้น ๆ ส่วนแบบฝึกหัดที่จัดไว้ให้ในตอนท้ายของแต่ละบทนั้น ประกอบด้วยปัญหาต่าง ๆ ที่จะช่วยเสริมความเข้าใจทั้งทางด้านทฤษฎีและการนำวิธีการนี้ไปใช้ รวมไปถึงการช่วยฝึกฝนและสร้างแนวทางเพื่อการประดิษฐ์ฟิสิกส์อิเล็กเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ด้วยตนเอง

เนื้อหาทั้งหมดในตำราเล่มนี้ นับตั้งแต่ข้อความทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ สมการทางคณิตศาสตร์ และรูปภาพต่าง ๆ ได้จัดทำขึ้นบนเครื่องคอมพิวเตอร์เองทั้งหมด โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการจัดทำหลาย ๆ โปรแกรม เพื่อทำการผสมผสานส่วนประกอบของเนื้อหาต่าง ๆ เข้าด้วยกัน เนื้อหาทั้งหมดบรรจุในแผ่นข้อมูลแบบความหนาแน่นสูงขนาด 3.5 นิ้วจำนวนสิบสองแผ่น ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวนฤมล อารมณ์สวะ ผู้ช่วยวิจัยของผู้เขียน ผู้ซึ่งเริ่มต้นจากการรู้จักคอมพิวเตอร์อย่างผิวเผินและด้วยความมุนานะ สามารถพิมพ์ข้อความสร้างสมการ และรูปภาพต่าง ๆ ดังที่ปรากฏในตำราเล่มนี้ได้ภายใน 4 เดือนถัดมา ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เดชนครินทร์ และศาสตราจารย์ ดร.วิรัช อึ้งภากรณ์ ผู้ที่ให้คำแนะนำในการแต่งตำราภาษาไทยและตรวจคำศัพท์บัญญัติต่าง ๆ รวมทั้งสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยซึ่งเป็นหน่วยงานที่รับผิดชอบจัดพิมพ์จำหน่ายหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ทำให้ผู้เขียนได้มีโอกาสไปศึกษาและสัมผัสกับความรู้ทางวิชาการด้านนี้ ตลอดจนทั้งอาจารย์และหัวหน้าหน่วยงานในขณะที่ยังเขียนดำรงตำแหน่งเป็นข้าราชการประจำอยู่ในองค์การอวกาศนาซาที่ได้ให้ความรู้และเปิดโอกาสให้ผู้เขียนได้ทำงานวิจัยทางด้านนี้มาโดยตลอด และท้ายสุด ขอขอบคุณ ยุพา เศษอำไพ ภรรยาผู้เข้าใจความตั้งใจของผู้เขียน โดยให้การสนับสนุนและกำลังใจ ตลอดจนคอยดูแลลูก ๆ ทั้งวันธรรมดาและวันหยุด ในช่วงระยะเวลาหลายเดือนที่ผ่านมา

ปราโมทย์ เศษอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตุลาคม 2537

สารบัญ

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 7

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 6

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 5

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 4

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 3

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 2

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 1

บทที่ 1	ก้าวแรกสู่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	1
1.1	บทนำ	1
1.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร	4
1.3	วิธีผลต่างสลับเนื่องและข้อคล้ายคลึงกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	5
1.4	ความแตกต่างระหว่างวิธีผลต่างสลับเนื่องกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	13
1.5	ขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	14
1.6	การประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	17
1.7	บทสรุป	23
บทที่ 2	การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีการโดยตรง	25
2.1	บทนำ	25
2.2	การสร้างสมการของเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ	26
2.2.1	การยืดหยุ่นในวัสดุท่อน	26
2.2.2	การนำความร้อน	28
2.2.3	การไหลในท่อ	30
2.3	การสร้างระบบสมการรวมจากสมการย่อยของเอลิเมนต์	32
2.3.1	การประกอบเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ขึ้นเป็นเมทริกซ์ระบบรวม	33

2.3.2	คุณลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวม	37
2.3.3	ตัวอย่างการแก้ปัญหานิ่งมิติ	39
2.4	การแปลงเมทริกซ์ของเอลิเมนต์	44
2.4.1	ปัญหาที่ต้องทำการแปลงเมทริกซ์	44
2.4.2	วิธีการแปลงเมทริกซ์	45
2.4.3	ตัวอย่างปัญหาโครงสร้างสองมิติ	49
2.5	บทสรุป	57
	แบบฝึกหัด	58
บทที่ 3	การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีแปรผัน	69
3.1	บทนำ	69
3.2	วิธีแปรผัน	70
3.2.1	ความหมายของวิธีแปรผัน	70
3.2.2	ตัวอย่างวิธีแปรผัน	71
3.3	วิธีของริตซ์	74
3.3.1	ขั้นตอนในวิธีของริตซ์	74
3.3.2	ตัวอย่างการใช้วิธีของริตซ์	76
3.4	การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีแปรผัน	78
3.4.1	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์หนึ่งมิติ	79
3.4.2	คุณสมบัติของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์	80
3.4.3	ขั้นตอนไฟไนต์เอลิเมนต์บนรากฐานของวิธีแปรผัน	81
3.4.4	ตัวอย่างปัญหาในหนึ่งมิติ	82
3.4.5	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติ	89
3.4.6	การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในสองมิติ	93
3.4.7	ตัวอย่างปัญหาในสองมิติ	95
3.5	บทสรุป	105
	แบบฝึกหัด	105

บทที่ 4	การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง	115
4.1	บทนำ	115
4.2	วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง	116
4.2.1	วิธีการจัดตำแหน่งจุด	118
4.2.2	วิธีการจัดโดเมนย่อย	119
4.2.3	วิธีกาเลอร์คิน	119
4.2.4	วิธีกำลังสองน้อยสุด	120
4.3	วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์	123
4.3.1	ลำดับขั้นตอนทั่วไป	123
4.3.2	ตัวอย่างปัญหาแบบหนึ่งมิติ	126
4.3.3	ตัวอย่างปัญหาแบบสองมิติ	139
4.4	บทสรุป	156
	แบบฝึกหัด	157
บทที่ 5	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และ	
	การอินทิเกรตเอลิเมนต์เมทริกซ์เชิงตัวเลข	171
5.1	บทนำ	171
5.2	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์หนึ่งมิติ	172
5.3	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติ	175
5.3.1	เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม	175
5.3.2	เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม	178
5.4	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามมิติ	183
5.4.1	เอลิเมนต์ทรงสี่หน้า	183
5.4.2	เอลิเมนต์ทรงหกหน้า	184
5.5	การคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์	185
5.5.1	สูตรการอินทิเกรต	186
5.5.2	ตัวอย่างการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์	190

5.5.3	โปรแกรมคอมพิวเตอร์	198
5.6	เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบปิด	203
5.6.1	เอลิเมนต์หนึ่งมิติแบบสองจุดต่อ	203
5.6.2	เอลิเมนต์หนึ่งมิติแบบสามจุดต่อ	205
5.6.3	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมในสองมิติ	207
5.6.4	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในสองมิติ	209
5.6.5	เอลิเมนต์ทรงอิฐในสามมิติ	210
5.7	บทสรุป	214
	แบบฝึกหัด	215
บทที่ 6	ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์	223
6.1	บทนำ	223
6.2	ปัญหาแบบเอลลิปติกในหนึ่งมิติ	224
6.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	224
6.2.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเมทริกซ์	225
6.2.3	ตัวอย่าง	226
6.3	ปัญหาแบบเอลลิปติกในสองมิติ	229
6.3.1	สมการเชิงอนุพันธ์	229
6.3.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเมทริกซ์	230
6.3.3	ตัวอย่าง	232
6.4	ปัญหาแบบพาราโบลาในหนึ่งมิติ	234
6.4.1	สมการเชิงอนุพันธ์	234
6.4.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเมทริกซ์	234
6.4.3	ตัวอย่าง	236
6.5	ปัญหาแบบพาราโบลาในสองมิติ	237
6.5.1	สมการเชิงอนุพันธ์	237
6.5.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเมทริกซ์	238
6.5.3	ตัวอย่าง	238

6.6	ปัญหาการโค้งของแกน	241
6.6.1	สมการเชิงอนุพันธ์	241
6.6.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเมทริกซ์	242
6.6.3	ตัวอย่าง	242
6.7	ปัญหาการโค้งของแผ่น	244
6.7.1	สมการเชิงอนุพันธ์	244
6.7.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเมทริกซ์	244
6.6.3	ตัวอย่าง	242
6.8	บทสรุป	248
	แบบฝึกหัด	249
บทที่ 7	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง	259
7.1	บทนำ	259
7.2	สมการพื้นฐานทั่วไปในมิติ	260
7.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	260
7.2.2	ฟังก์ชันแปรผัน	262
7.2.3	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	265
7.3	ปัญหาโครงสร้างวัสดุท่อน	268
7.3.1	สมการพื้นฐาน	268
7.3.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	268
7.4	ปัญหาแผ่นระนาบ	272
7.4.1	สมการพื้นฐาน	272
7.4.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	274
7.5	ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน	287
7.5.1	สมการพื้นฐาน	287
7.5.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	289

7.6	ปัญหาการโค้งของคาน	291
7.6.1	สมการพื้นฐาน	291
7.6.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	293
7.6.3	การแปลงเมทริกซ์ของคานในสองมิติ	299
7.7	ปัญหาการโค้งของแผ่น	302
7.7.1	สมการพื้นฐาน	302
7.7.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	306
7.7.3	เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า	309
7.7.4	เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม	310
7.8	พลศาสตร์เบื้องต้น	324
7.8.1	สมการพื้นฐาน	325
7.8.2	การสั่นแบบฮาร์โมนิก	327
7.8.3	การสั่นของระบบก้อนมวลและสปริง	332
7.8.4	การสั่นในวัสดุท่อน	338
7.8.5	การสั่นของคาน	342
7.8.6	วิธีทับซ้อนโหมด	347
7.8.7	วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด	350
7.9	บทสรุป	361
	แบบฝึกหัด	362

บทที่ 8	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาความร้อน	375
8.1	บทนำ	375
8.2	สมการพื้นฐานทั่วไปในสามมิติ	377
8.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	377
8.2.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	379
8.3	ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์	382
8.3.1	เอลิเมนต์เมทริกซ์แบบหนึ่งมิติ	382
8.3.2	เอลิเมนต์เมทริกซ์แบบสองมิติ	384

8.3.3	เอลิเมนต์เมทริกซ์แบบสามมิติ	388
8.4	การวิเคราะห์ปัญหาความร้อน	392
8.4.1	ปัญหาเชิงเส้นภายใต้สถานะอยู่ตัว	392
8.4.2	ปัญหาเชิงเส้นภายใต้สถานะชั่วคราว	399
8.4.3	ปัญหาไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะอยู่ตัว	412
8.4.4	ปัญหาไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะชั่วคราว	428
8.5	การถ่ายเทความร้อนของการไหล	432
8.5.1	สมการเชิงอนุพันธ์	433
8.5.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	433
8.6	การเคลื่อนตัวของของไหลเนื่องจากอุณหภูมิ	438
8.6.1	สมการเชิงอนุพันธ์	438
8.6.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	439
8.7	บทสรุป	444
	แบบฝึกหัด	445
บทที่ 9	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหล	455
9.1	บทนำ	455
9.2	สมการพื้นฐานทั่วไป	456
9.3	การไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัว	460
9.3.1	สมการเชิงอนุพันธ์	460
9.3.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	462
9.4	การไหลแบบไม่หนืดแต่อัดตัวได้	472
9.4.1	สมการเชิงอนุพันธ์	472
9.4.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	474
9.5	การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว	487
9.5.1	สมการเชิงอนุพันธ์	487
9.5.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	491
9.5.3	ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์	495

9.5.3 การประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน	503
9.6 การไหลแบบหนืดและอัดตัวได้	514
9.6.1 สมการเชิงอนุพันธ์	515
9.6.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	516
9.7 บทสรุป	524
แบบฝึกหัด	526
ภาคผนวก ก เมทริกซ์	531
ก. 1 นิยาม	531
ก. 2 การบวกและลบเมทริกซ์	534
ก. 3 การคูณเมทริกซ์	534
ก. 4 การทำเมทริกซ์สลับเปลี่ยน	535
ก. 5 เมทริกซ์ผกผัน	536
ก. 6 การแบ่งกันเมทริกซ์	536
ก. 7 แคลคูลัสของเมทริกซ์	536
ภาคผนวก ข สูตรการอินทิเกรตพิคตพื้นที่	539
ภาคผนวก ค การแปลงหน่วย	545
ภาคผนวก ง คุณสมบัติของวัสดุและของไหล	549
ง. 1 ตารางหน่วยสากล	549
ง. 2 ตารางหน่วยอังกฤษ	551
ภาคผนวก จ การพิสูจน์ $dA = J d\xi d\eta$	553
ภาคผนวก ฉ FEATool Multiphysics Software	557
ภาคผนวก ช MATLAB PDE Toolbox	567
บรรณานุกรม	575
ดัชนี	587

บทที่ 1

ก้าวแรกสู่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

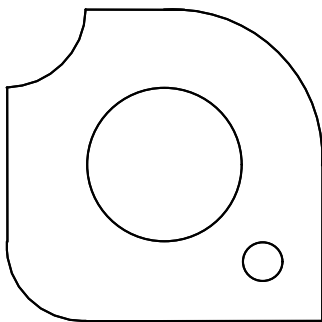
1.1 บทนำ

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีส่วนอย่างมากในการสร้างเสริมปรับปรุงความเป็นอยู่ของมนุษย์ให้ดียิ่งขึ้น ปรากฏการณ์ส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นรอบตัวสามารถอธิบายได้โดยกฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์และทำการประดิษฐ์ขึ้นในลักษณะของสมการต่าง ๆ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) หรือในรูปแบบของสมการอินทิกรัล (integral equations) ยกตัวอย่างเช่น การคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิในเครื่องยนต์ของรถยนต์อาจเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายสถานะภาพความสมดุลของการถ่ายเทความร้อน การคำนวณออกแบบโครงสร้างปีกเครื่องบินอาจเริ่มมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายสถานะภาพความสมดุลของโครงสร้างนั้นภายใต้แรงยกของอากาศในขณะบิน รวมไปถึงการทำนายทิศทางและความเร็วของกระแสลมจากพายุไต้ฝุ่นเพื่อออกข่าวเตือนประชาชนให้อพยพออกจากพื้นที่ก่อนไต้ฝุ่นจะเคลื่อนตัวไปถึง ก็อาจเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายสถานะภาพความสมดุลของการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาต่าง ๆ นั้น สามารถประคิษฐ์ขึ้นได้โดยไม่ยาก แต่ผลเฉลยแม่นยำ (exact solution) ที่ต้องการและจำเป็นต้องประคิษฐ์ขึ้นโดยวิธีวิเคราะห์ (analytical method) นั้นทำได้ยากมากหรืออาจจะหาไม่ได้เลยก็เป็นได้ สาเหตุดังกล่าวก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ขึ้น วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณนั้นมีหลากหลายวิธี วิธีที่ได้รับความนิยมอย่างกว้างขวางในอดีตที่ผ่านมาคือ วิธีผลต่างสลับเนื่อง (finite difference method)

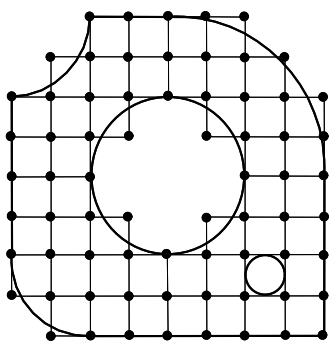
หลักการที่สำคัญของวิธีผลต่างสลับเนื่องคือ การหาค่าผลเฉลยโดยประมาณโดยเริ่มจากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการผลต่างสลับเนื่อง (system of difference equations) ที่ประกอบด้วย การทำบวก ลบ คูณ และหาร ข้อดีของวิธีผลต่างสลับเนื่องคือ เป็นวิธีการที่ง่ายแก่การศึกษาและการทำความเข้าใจ รวมไปถึงความสะดวกในการประคิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณ ส่วนข้อเสียของการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องนี้ก็มีหลายประการ เช่น ความไม่สะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (application of boundary conditions) และที่สำคัญที่สุดคือ ความยากลำบากในการประยุกต์วิธีนี้เพื่อวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อน ซึ่งการออกแบบผลิตภัณฑ์ให้มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนมากยิ่งขึ้นได้กลายเป็นสิ่งจำเป็นเพื่อการพัฒนาปรับปรุงคุณภาพผลิตภัณฑ์นั้น ๆ ในปัจจุบัน

รูป 1.1 (ก) แสดงลักษณะแผ่นโลหะอะลูมิเนียมรูปแบบหนึ่งซึ่งใช้เสริมความแข็งแรงของโครงสร้างภายในปีกของเครื่องบิน แผ่นโลหะนี้ประกอบด้วยขอบรอบนอกที่เป็นทั้งขอบตรงและขอบโค้ง โดยภายในมีรูกลมสอง



รูป 1.1 (ก) แผ่นอะลูมิเนียมที่ประกอบด้วยขอบโค้งและขอบตรง รวมทั้งรูกลมสองขนาดอยู่ภายใน

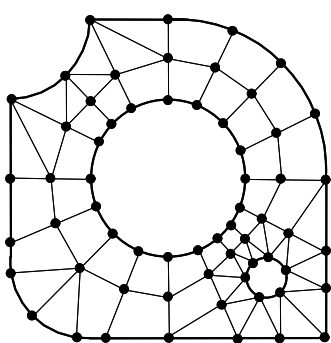
เป็นทั้งขอบตรงและขอบโค้ง โดยภายในมีรูกลมสองขนาดในตำแหน่งที่ต่างกัน การวิเคราะห์หาการกระจายของความเค้น (stress distribution) บนแผ่นอะลูมิเนียมนี้ภายใต้แรงกระทำที่กำหนดให้ด้วยการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่อง เริ่มจากการแบ่งแผ่นอะลูมิเนียมออกเป็นช่องตารางสี่เหลี่ยมดังเช่นแสดงในรูป 1.1 (ข) ตารางสี่เหลี่ยมเหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ (grid points) ตามหัวมุมของสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ซึ่งขนาดของปัญหาหรือจำนวนตัวไม่รู้ค่า (number of unknowns) นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดต่อนี้เอง



รูป 1.1 (ข) การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียมด้วยการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่อง

รูป 1.1 (ข) แสดงให้เห็นว่า ตารางสี่เหลี่ยมที่ใช้ในวิธีผลต่างสลับเนื่องไม่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงของแผ่นอะลูมิเนียมดังกล่าวได้อย่างเที่ยงตรง หากสร้างตารางสี่เหลี่ยมให้มีขนาดเล็กลงซึ่งหมายถึงต้องเพิ่มจำนวนตารางสี่เหลี่ยมให้มากขึ้นจึงสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงมากยิ่งขึ้น แต่ในขณะเดียวกัน จำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นนั้นทำให้จำนวนสมการผลต่างสลับเนื่องมากขึ้นตามไปด้วย อีกทั้งกระบวนการแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้หน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์เพิ่มขึ้น รวมถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณก็จะสูงมากขึ้นตามไปด้วยเช่นกัน

อุปสรรคและความไม่สะดวกดังกล่าว ก่อให้เกิดวิหาผลเฉลยโดยประมาณขึ้นอีกวิธีหนึ่งที่เรียกว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ซึ่งนิยมใช้คำย่อว่า FEM



รูป 1.1 (ค) การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียมด้วยการใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในรูป 1.1 (ค)

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้เป็นอย่างดี สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงที่เที่ยงตรงกว่าหลักการของวิธีนี้ในขั้นต้นก็คล้ายกับวิธีผลต่างสลับเนื่อง กล่าวคือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นชิ้น ๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ เช่น ในตัวอย่างอะลูมิเนียมเดิมนี้สามารถแบ่งแผ่นอะลูมิเนียมออกเป็นชิ้นของเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างกัน ในรูปแบบของสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ ดังเช่นแสดง

ข้อดีประการแรกที่เราเห็นได้อย่างชัดเจนจากรูป 1.1 (ค) เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องในรูป 1.1 (ข) ก็คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดแตกต่างกันที่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมของแผ่นอะลูมิเนียมได้ดีกว่า ซึ่งหมายความว่าปัญหานี้จะถูกแก้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical model)

ที่มีรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงมากกว่า ดังนั้น ค่าผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณออกมาได้จึงควรมีค่าความเที่ยงตรงและแม่นยำสูงขึ้น

1.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร

ในการวิเคราะห์ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นมักประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้จึงประกอบด้วยค่าของตัวแปรตามตำแหน่งต่าง ๆ กันบนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ผลเฉลยแม่นยำตรงประกอบด้วยค่าต่าง ๆ ทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่เราจะทำการหาผลเฉลยแม่นยำตรงที่ประกอบด้วยค่าต่าง ๆ จำนวนมากมายเช่นนี้ ซึ่งสำหรับปัญหาในทางปฏิบัตินั้นเป็นไปได้ยาก การแก้คือการลดค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณในจำนวนที่นับได้ (finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ (elements) ซึ่งมีขนาดแตกต่างกัน ดังเช่นแสดงในตัวอย่างของแผ่นอะลูมิเนียมในรูป 1.1 (ค)

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ยังบ่งชี้เป็นนัยว่า ผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์นั้น จำเป็นต้องสอดคล้อง (satisfy) กับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้สำหรับปัญหานั้น ๆ ซึ่งหมายความว่า หลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงต้องเริ่มต้นจากการพิจารณาเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่พิจารณาอยู่นั้น จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นได้มาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการรวม ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็คล้ายกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันก่อให้เกิดเป็นรูปร่างลักษณะทั้งหมดที่ต้องการของปัญหาที่แท้จริง แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ลงไปในระบบสมการรวมนี้ ก่อนทำการแก้ทั้งระบบสมการดังกล่าว เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการตามตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหานั้น

จากคำอธิบายนี้จึงเห็นได้ว่า ความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณได้นั้นขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา นอกจากนั้น ความแม่นยำของผลเฉลยซึ่งเราจะศึกษาโดยละเอียดในบทต่อ ๆ ไป ยังขึ้นอยู่กับคุณสมบัติรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) ที่ใช้สำหรับแต่ละเอลิเมนต์กล่าวคือ ฟังก์ชันการประมาณภายในที่ใช้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของ

ปัญหานั้นมากนักน้อยเพียงใด ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์อาจสมมุติให้อยู่ในหลายรูปแบบ เช่น รูปแบบของการกระจายเชิงเส้น (linear distribution) ส่วนขนาด (magnitude) ของฟังก์ชันการประมาณภายในนั้นขึ้นอยู่กับค่าที่จุดต่อ (nodes) ของเอลิเมนต์ ยกตัวอย่างเช่น หากค่าอุณหภูมิของจุดต่อที่อยู่ปลายมุมทั้งสามของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ 30, 40 และ 50 องศาเซลเซียส ตามลำดับ และหากเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมนี้ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่อยู่ในรูปแบบของลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้นตรงแล้ว อุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมนี้จะแปรผันเป็นรูปเชิงเส้นตรงคล้ายแผ่นเรียบโดยมีการกระจายของอุณหภูมิระหว่าง 30 ถึง 50 องศาเซลเซียส

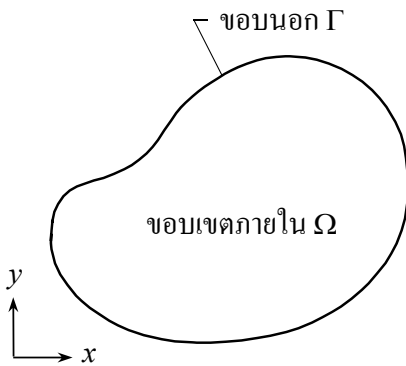
คำอธิบายข้างต้นเป็นคำอธิบายในลักษณะกว้าง ๆ เพื่อให้เห็นภาพของการใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ รายละเอียดปลีกย่อยของวิธีนี้จะอธิบายอย่างเป็นขั้นเป็นตอนพร้อมกับการยกตัวอย่างประกอบโดยเริ่มตั้งแต่บทที่ 2 เป็นต้นไป เนื่องจากวิธีผลต่างสลับเนื่อง เป็นวิธีหาค่าผลเฉลยโดยประมาณวิธีหนึ่งในทำนองเดียวกันกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่เป็นวิธีที่ง่ายแก่การทำทำความเข้าใจ รวมทั้งมีลักษณะบางอย่างที่คล้ายคลึงกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะได้ศึกษาในรายละเอียดต่อไป ดังนั้น ในหัวข้อต่อไปนี้จะมาศึกษาวิธีผลต่างสลับเนื่องก่อนโดยใช้ตัวอย่างที่ง่ายแก่การทำทำความเข้าใจ ลักษณะบางอย่างที่เราจะได้พบเห็นซึ่งเกิดขึ้นในวิธีนี้ จะช่วยเสริมความเข้าใจเมื่อเราเริ่มทำการศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยละเอียดในบทต่อ ๆ ไป

1.3 วิธีผลต่างสลับเนื่องและข้อคล้ายคลึงกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แนวทางที่จะทำให้เกิดความเข้าใจในลำดับขั้นตอนของการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีผลต่างสลับเนื่องสามารถทำได้โดยง่ายด้วยการใช้ตัวอย่าง มีหลายปัญหาในงานวิศวกรรมซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์นั้นอยู่ในรูปแบบของสมการลาปลาซ (Laplace's equation) เช่น สมการความสมดุลของของแข็ง สมการความสมดุลของการถ่ายเทความร้อน รวมไปถึงสมการความสมดุลของการไหลบางชนิด สมการลาปลาซสำหรับปัญหาใน 2 มิติบนระนาบ x - y สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั่วไปได้ คือ

$$\nabla^2 \phi = 0$$

โดย $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ แทนสัญลักษณ์ของตัวดำเนินการ (operator notation), $\phi = \phi(x,y)$



รูป 1.2 รูปร่างลักษณะทั่วไปและขอบเขตของปัญหาที่กำหนดมาให้

เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าซึ่งต้องการหาภายในขอบเขตของ Ω (เช่น ϕ อาจแทนการกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x, y ใด ๆ) และ $\phi = f(x, y)$ ตลอดขอบนอก Γ (เช่น ϕ ตลอดรอบขอบนอกอาจเป็นอุณหภูมิที่กำหนดมาให้เท่ากับ 30°C) จุดประสงค์ของการวิเคราะห์ปัญหานี้ก็คือต้องการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณ $\phi(x, y)$ ภายในขอบเขต Ω ด้วยการใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง

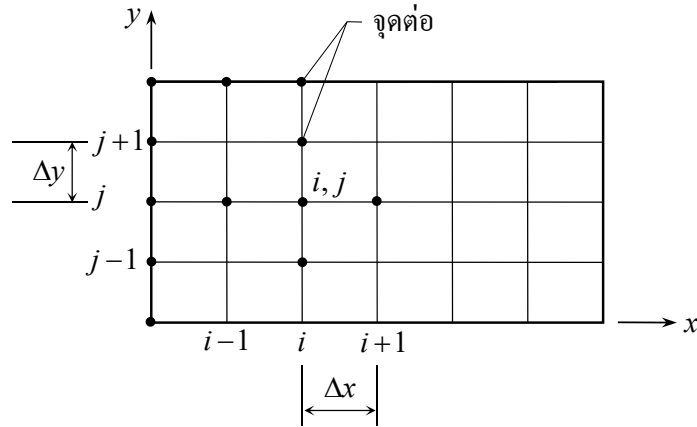
การใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาเช่นนี้ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ทำการสร้างตารางสี่เหลี่ยมลงในรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้ สมมติว่ารูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งอยู่ในระนาบ $x-y$ ดังแสดงในรูป 1.3 สี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ทั้งหมดที่สร้างขึ้นมามีขนาด Δx และ Δy ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และต่อกันที่จุดต่อ (grid points) ตามตำแหน่งต่าง ๆ เช่น จุดต่อ ณ ตำแหน่ง i, j ดังแสดงในรูป 1.3 นี้บ่งถึงจุดต่อที่ $x = i$ และ $y = j$ ซึ่งจุดต่อเหล่านี้เองเป็นตำแหน่งที่เราจะหาค่าของผลเฉลยโดยประมาณ นั่นคือเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (unknowns) เช่น สมมติว่าเรากำลังแก้ปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้ก็คือ ค่าของอุณหภูมิที่เราต้องการ

ขั้นตอนที่ 2 ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ในตัวอย่างนี้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของเราคือสมการลาปลาซ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ด้วยการใช้ออนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) เช่น ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อ $i + 1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของอุณหภูมิที่จุดต่อ i ได้คือ



รูป 1.3 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยม
เพื่อใช้ในวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม

$$\begin{aligned}\phi_{i+1} = & \phi_i + \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_i \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \bigg|_i (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \bigg|_i (\Delta x)^3 \\ & + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \bigg|_i (\Delta x)^4 + \dots\end{aligned}\quad (1.2)$$

ในทำนองเดียวกัน ค่าอนุกรมที่จุดต่อ $i-1$ ก็สามารเขียนให้อยู่ในรูปแบบของอนุกรมที่จุดต่อ i ได้เช่นเดียวกัน คือ

$$\begin{aligned}\phi_{i-1} = & \phi_i - \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_i \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \bigg|_i (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \bigg|_i (\Delta x)^3 \\ & + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \bigg|_i (\Delta x)^4 - \dots\end{aligned}\quad (1.3)$$

หากเรานำสมการ (1.2) และ (1.3) นี้มารวมกัน จะได้

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + \frac{2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \bigg|_i (\Delta x)^2 + \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \bigg|_i (\Delta x)^4 + \dots\quad (1.4)$$

เนื่องจากเราต้องการพจน์อนุพันธ์อันดับสอง (second-order term) ซึ่งคือ พจน์ $\partial^2 \phi / \partial x^2$ เพื่อที่จะแทนลงในสมการของลาปลาซ (1.1) เราจึงตัดพจน์อนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไปในสมการ (1.4) ที่ทำให้เกิดค่าของพจน์อนุพันธ์อันดับสองโดยประมาณ คือ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cong \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}\quad (1.5)$$

ในการทำงานเดียวกัน หากเราดำเนินการเช่นเดียวกันในทางแกน y เราจะได้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cong \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (1.6)$$

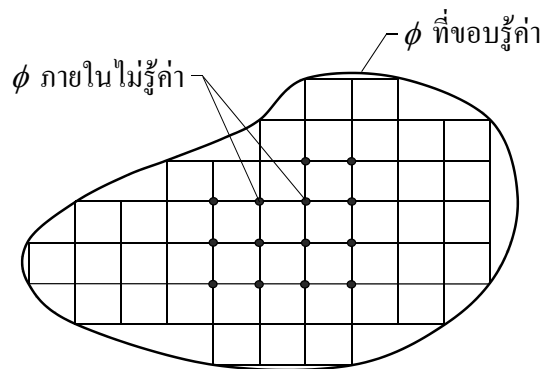
หลังจากแทนค่าโดยประมาณของพจน์อนุพันธ์อันดับสองจากสมการ (1.5) และ (1.6) ลงในสมการลาปลาซ (1.1) และหากใช้ Δx เท่ากับ Δy เราจะได้

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} + \phi_{j+1} + \phi_{j-1} - 4\phi_i = 0 \quad (1.7)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของแผนภาพสมการ (stencil form) เพื่อสะดวกในการประยุกต์ใช้ได้ดังแสดงในสมการ (1.8)

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} - \textcircled{4} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} = 0 \quad (1.8)$$

ในการแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ เราจะประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (1.8) นี้ลงในทุก ๆ จุดต่อที่อยู่ภายในขอบเขตของปัญหา ดังแสดงในรูป 1.4



รูป 1.4 การประยุกต์ใช้รูปแบบของแผนภาพสมการ (1.8)
ลงบนทุกจุดต่อภายในขอบเขตของปัญหา

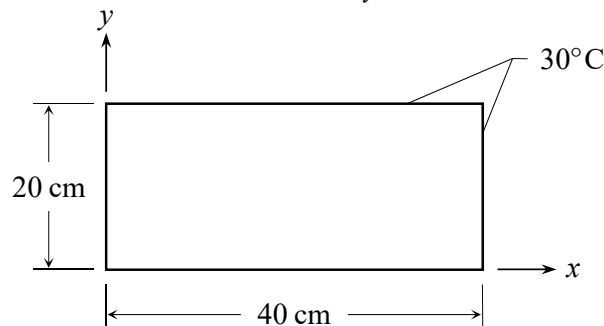
ขั้นตอนที่ 3 ทำการประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (1.8) ลงในทุก ๆ จุดต่อที่อยู่ในขอบเขตภายในของปัญหานั้น ก่อให้เกิดระบบสมการรวม (a set of simultaneous equations) ขึ้น โดยมีตัวที่ไม่รู้ค่า เช่น ϕ_i , ϕ_{i+1} ฯลฯ ตามจุดต่อต่าง ๆ ภายในขอบเขตของปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 4 ทำการแก้ระบบสมการรวมที่เกิดขึ้นมานั้น เพื่อหาค่าโดยประมาณของตัวไม่รู้ค่า (unknowns) ตามจุดต่อต่าง ๆ

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องโดยใช้ 4 ขั้นตอนดังที่ได้ อธิบายมานี้ได้ดียิ่งขึ้น เราจะมาศึกษาตัวอย่างของการถ่ายเทความร้อนเพื่อหาอุณหภูมิตามจุด ต่าง ๆ ภายในแผ่นระนาบ จากตัวอย่างนี้เองเราจะพบลักษณะพิเศษของสมการหลายชนิดที่ เกิดขึ้นจากวิธีผลต่างสลับเนื่อง ซึ่งสามารถทำความเข้าใจได้ง่ายและเป็นประโยชน์เพื่อการ ทำความเข้าใจวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

ตัวอย่าง 1.1 แผ่นโลหะมีขนาดยาว 40 cm กว้าง 20 cm ดังแสดงในรูป 1.5 เกิดการถ่ายเท ความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัว (steady-state heat transfer) ซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการ เจริญอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบของสมการลาปลาซ คือ

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$



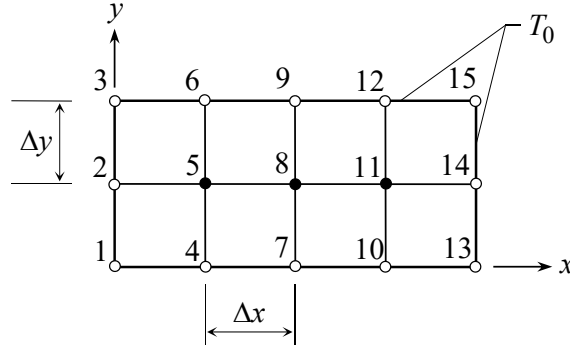
รูป 1.5 แผ่นโลหะที่ต้องการหาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ โดยวิธีผลต่างสลับเนื่อง

หากกำหนดอุณหภูมิที่ขอบรอบนอกทั้งสี่ของแผ่นโลหะให้มีค่าเท่ากับ 30°C ให้คำนวณหาค่า การกระจายของอุณหภูมิภายในแผ่นโลหะด้วยการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่อง

วิธีทำ เราจะดำเนินการ 4 ขั้นตอนดังที่ได้อธิบายมาข้างต้น ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างตารางสี่เหลี่ยมดังแสดงในรูป 1.6 โดยแต่ละสี่เหลี่ยมมีขนาด 10×10 cm นั่นคือ $\Delta x = \Delta y = 10$ cm สี่เหลี่ยมเหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เราจะหาค่าของ อุณหภูมิ ก่อให้เกิดจุดต่อรวมกันทั้งสิ้นจำนวน 15 จุดต่อ แต่เนื่องจากขอบนอกของแผ่นโลหะนี้

ถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิ $T_0 = 30^\circ\text{C}$ นั้นหมายถึงว่า อุณหภูมิที่จุดต่อทุกจุดในรูปนี้ล้วนทราบค่า ยกเว้นที่จุดต่อหมายเลข 5, 8 และ 11 ดังนั้น ตัวไม่รู้ค่าของปัญหานี้ก็คือ อุณหภูมิ T_5 , T_8 และ T_{11} ซึ่งมีเพียง 3 ค่าเท่านั้น



รูป 1.6 การแบ่งแผ่นโลหะออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมโดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

ขั้นตอนที่ 2 ทำการประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (1.8) ลงบนจุดต่อที่ไม่รู้ค่าเหล่านี้ เช่น หากเราประยุกต์แผนภาพนี้ลงบนจุดต่อหมายเลข 5 ก่อให้เกิด

$$T_2 + T_6 + T_8 + T_4 - 4T_5 = 0$$

แต่ $T_2 = T_6 = T_4$ ซึ่งเท่ากับ T_0 ดังนั้น สมการนี้จึงลดรูปเป็น

$$4T_5 - T_8 = 3T_0 \quad (1.10)$$

เช่นเดียวกัน เราประยุกต์แผนภาพในสมการ (1.8) ลงบนจุดต่อหมายเลข 8 จะได้

$$T_5 + T_9 + T_{11} + T_7 - 4T_8 = 0$$

แต่ $T_9 = T_7 = T_0$ สมการนี้จึงลดรูปเป็น

$$-T_5 + 4T_8 - T_{11} = 2T_0 \quad (1.11)$$

และทำนองเดียวกัน เราประยุกต์แผนภาพในสมการ (1.8) ลงบนจุดต่อหมายเลข 11 จะได้

$$T_8 + T_{12} + T_{14} + T_{10} - 4T_{11} = 0$$

แต่ $T_{12} = T_{14} = T_{10} = T_0$ สมการนี้จึงกลายเป็น

$$-T_8 + 4T_{11} = 3T_0 \quad (1.12)$$

ขั้นตอนที่ 3 สมการทั้งสามซึ่งก็คือสมการ (1.10)-(1.12) สามารถนำมาเขียนรวมกัน ก่อให้เกิดระบบสมการรวมได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 4T_5 - T_8 &= 3T_0 \\
 -T_5 + 4T_8 - T_{11} &= 2T_0 \\
 -T_8 + 4T_{11} &= 3T_0
 \end{aligned}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_5 \\ T_8 \\ T_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3T_0 \\ 2T_0 \\ 3T_0 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

ซึ่งเขียนให้กระชับสั้นลงไปอีก ได้เป็น

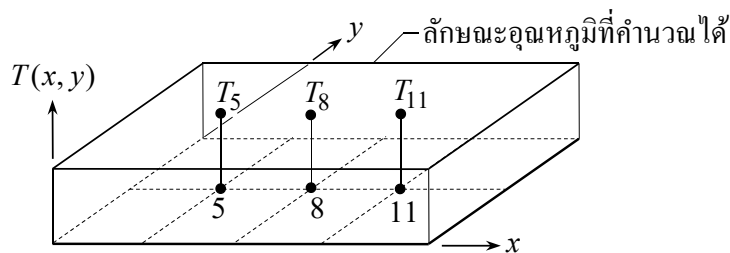
$$\underset{(3 \times 3)}{[K]} \underset{(3 \times 1)}{\{T\}} = \underset{(3 \times 1)}{\{Q\}} \quad (1.14)$$

ในที่นี้ ปัญหาที่วิเคราะห์อยู่เป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อน ดังนั้น $[K]$ จึงเรียกว่า เมทริกซ์การนำ (conduction matrix); $\{T\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (vector of nodal unknowns) และ $\{Q\}$ เรียกว่า โหลดเวกเตอร์ (load vector)

ขั้นตอนที่ 4 ระบบสมการ (1.13) สามารถแก้เพื่อหาผลเฉลย ซึ่งก็คืออุณหภูมิที่จุดต่อ 5, 8 และ 11 ได้ดังนี้

$$T_5 = T_8 = T_{11} = T_0 = 30^\circ\text{C}$$

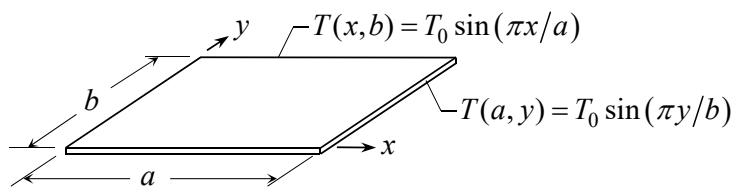
นั่นคือ ได้อุณหภูมิภายในแผ่นโลหะเท่ากับอุณหภูมิของขอบรอบนอกที่ 30°C ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิลักษณะเป็นค่าคงที่แบบแผ่นเรียบดังแสดงในรูป 1.7



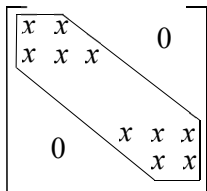
รูป 1.7 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิตามแผ่นโลหะ
คำนวณได้จากการใช้วิธีผลต่างสลับ

จากรูป 1.7 เราพบว่าอุณหภูมิที่คำนวณได้โดยวิธีผลต่างสลับนี้ ให้ค่าเป็นผลลัพธ์แม่นยำตรงที่ทุกจุดต่อ หากเราย้อนกลับไปพิจารณาสมการ (1.5) เราได้ตัดพจน์อนุพันธ์

อันดับสูง ๆ ทั่วไปแล้วและได้ทำการเขียนพจน์อนุพันธ์อันดับสองโดยประมาณขึ้นมา เหตุใดจึงได้ผลเป็นค่าแม่นยำตรงสำหรับปัญหานี้ อีกสาเหตุก็คือพจน์อนุพันธ์อันดับสูง ๆ เหล่านั้นบังเอิญมีค่าเท่ากับศูนย์เฉพาะสำหรับปัญหานี้ เนื่องจากจากอุณหภูมิรอบขอบนอกแผ่นโลหะถูกกำหนดมาให้มีค่าสม่ำเสมอโดยตลอด หากขอบนอกของแผ่นโลหะมีอุณหภูมิที่ไม่สม่ำเสมอ ดังเช่นแสดงในรูป 1.8 ผลลัพธ์ของอุณหภูมิตามตำแหน่งจุดต่อ 5, 8 และ 11 ที่คำนวณได้จะไม่เป็นผลลัพธ์แม่นยำตรง ค่าความคลาดเคลื่อน (error) ที่เกิดขึ้นจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับขนาดของตารางสี่เหลี่ยมและจำนวนจุดต่อทั้งหมดที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ อย่างไรก็ตามกระบวนการวิเคราะห์ปัญหายังคงดำเนินไปตามขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นตอนนี้เช่นเดิม



รูป 1.8 ตัวอย่างแผ่นโลหะที่มีอุณหภูมิที่ขอบรอบนอกไม่สม่ำเสมอ



$x =$ ค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์

รูป 1.9 ลักษณะของเมทริกซ์ $[K]$ สำหรับปัญหาทั่วไป

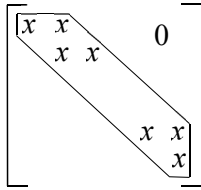
สิ่งที่น่าสนใจเกิดขึ้นจากการศึกษา

ตัวอย่างนี้และจะเกิดขึ้นคล้ายกันเมื่อเราเริ่มศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ ลักษณะพิเศษของเมทริกซ์การนำความร้อน $[K]$ ดังแสดงในสมการ (1.13)-(1.14) เมื่อเราพิจารณาเมทริกซ์ $[K]$ หรือวิเคราะห์ปัญหาที่มีจำนวนสี่เหลี่ยมและจุดต่อเป็นจำนวนมาก เราจะพบว่าเมทริกซ์ $[K]$ นี้ มักมีรูปแบบการ

กระจายของสัมประสิทธิ์ ดังแสดงในรูป 1.9 นั่นคือ

- ค่าที่อยู่ในแนวทแยงมุมกลางของเมทริกซ์มีค่าสูง (diagonal terms dominated)
- ค่าที่อยู่ในแนวทแยงมุมกลางของเมทริกซ์มีค่าเป็นบวก
- เมทริกซ์ $[K]$ ข้างต้นมีความเป็นสมมาตร กล่าวคือ $[K] = [K]^T$
- การจับกลุ่มกันของค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์นั้นอยู่รวมกันเป็นแถบ (banded) ดังแสดงด้วยกรอบเอียงในรูป 1.9

คุณสมบัติของข้อ ก. และ ง. ของเมทริกซ์ $[K]$ นี้เองก่อให้เกิดประโยชน์เป็นอย่างมากในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางปฏิบัติที่จำเป็นต้องใช้จำนวนสี่เหลี่ยมและจุดต่อเป็นจำนวนมากเพื่อให้เกิดผลเฉลยที่แม่นยำ ทำให้เมทริกซ์ $[K]$



$x =$ ค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์

รูป 1.10 การเก็บค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ของเมทริกซ์ $[K]$ ระหว่างการคำนวณในโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ต้องมีขนาดใหญ่ แต่เนื่องจาก $[K]$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร ประกอบกับสัมประสิทธิ์ที่ไม่เท่ากับศูนย์นั้นจับกลุ่มกันเป็นแถบ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจึงสามารถเก็บเฉพาะค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ โดยเก็บเพียงครึ่งหนึ่งของแถบดังแสดงในรูป 1.10 ไว้ในหน่วยความจำเพื่อการคำนวณ ทำให้หน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้นั้นลดลงไปอีก

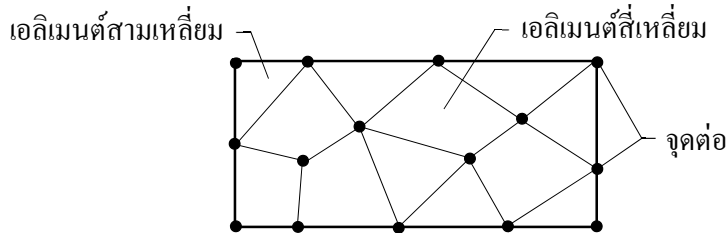
1.4 ความแตกต่างระหว่างวิธีผลต่างสลับเนื่องจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากตัวอย่างของการใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 1.3 เราพบว่าวิธีผลต่างสลับเนื่อง เป็นการใช่วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่กำหนดมาให้ หลักการของวิธีนี้คือการแทนค่าอนุพันธ์ (derivatives) ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยสมการโดยประมาณทางพีชคณิต (algebraic approximation) ซึ่งอยู่ในรูปแบบของตัวแปรตาม (dependent variables) ตามจุดต่อต่าง ๆ (grid points) ภายในขอบเขตรูปร่างของปัญหานั้น

ส่วนวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นการใช่วิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณของปัญหาที่กำหนดมาให้เช่นกัน โดยเริ่มจากการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ เรียกว่า เอลิเมนต์ (elements) เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (nodes) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณหาค่าตัวแปรที่ไม่รู้ค่า สมการทางพีชคณิตที่เกิดขึ้นจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประดิษฐ์ขึ้นจากสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนั้น กระบวนการโดยรวมจึงมีความซับซ้อนมากกว่าวิธีผลต่างสลับเนื่องขึ้นไปอีกระดับหนึ่ง

หากเราต้องใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิในแผ่นโลหะของตัวอย่างเดิมในรูป 1.5 สิ่งแรกที่เราจำเป็นต้องทำก็คือการแบ่งแผ่นโลหะนี้

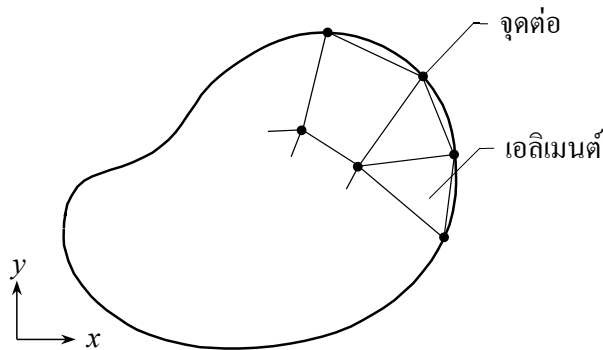
ออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ดังเช่นแสดงในรูป 1.11 โดยชิ้นส่วนย่อย ๆ อาจเป็นเอลิเมนต์ที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยมขนาดใด ๆ ก็ได้



รูป 1.11 การใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแผ่นโลหะออกเป็นเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างแตกต่างกัน

1.5 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

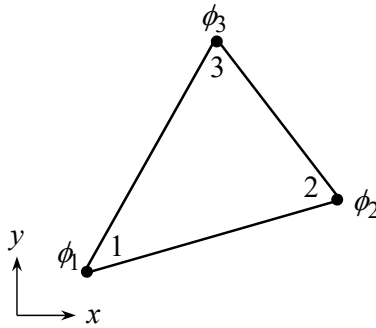
วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก ดังต่อไปนี้



รูป 1.12 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูป 1.12 รูปร่างดังกล่าวอาจเป็นรูปร่างใด ๆ ของปัญหาที่แตกต่างกัน เช่น ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง (elasticity problem) ปัญหาที่เกี่ยวกับอุณหภูมิและความร้อน (thermal problem) รวมทั้งปัญหาของการไหล (fluid problem)

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) เช่น หากเราเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในรูป 1.13 โดยที่จุดต่อเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1 ,



รูป 1.13 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วยสามจุดต่อ โดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ

ϕ_2 และ ϕ_3 ตามลำดับ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่ออาจเป็นค่าของการเสียรูป (displacement) หากเราวิเคราะห์ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าของอุณหภูมิหากเราแก้ปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นความเร็วของของไหลหากเราวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหล ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ คือ

$$\phi(x, y) = N_1(x, y) \phi_1 + N_2(x, y) \phi_2 + N_3(x, y) \phi_3 \quad (1.15)$$

โดย $N_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

สมการ (1.15) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\phi(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}_{(1 \times 3)} \{ \phi \}_{(3 \times 1)} \quad (1.16)$$

โดย $[N]$ แทนเมทริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\{\phi\}$ แทนเวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ในตำราเล่มนี้ สัญลักษณ์ $[]$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวอน (row matrix) และ $\{ \}$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวตั้ง (column matrix) ที่เรียกกันว่า เวกเตอร์ (vector) รายละเอียดของเมทริกซ์และการใช้ได้อธิบายในภาคผนวก ก

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ยกตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูป 1.13 นั้นอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (1.17)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (1.18)$$

ขั้นตอนที่ 3 นี้ ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของการศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (1.17) สามารถทำได้โดย

- ก. วิธีการโดยตรง (direct approach) ซึ่งอธิบายในบทที่ 2
- ข. วิธีการแปรผัน (variational approach) ซึ่งอธิบายในบทที่ 3
- ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) ซึ่งอธิบายในบทที่ 4

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบรวมกันเข้า ก่อให้เกิดระบบสมการรวม (system of simultaneous equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\sum(\text{element equations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (1.19)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในระบบสมการรวม (1.19) แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมนี้เพื่อหา $\{\phi\}_{\text{sys}}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (nodal unknowns) ซึ่งอาจเป็นค่าของการเคลื่อนตัวตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้าง หรือเป็นค่าของอุณหภูมิที่จุดต่อหากเป็นปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นค่าของความเร็วของของไหลตามจุดต่อหากเป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหล

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถนำมาใช้เพื่อหาค่าอื่น ๆ ที่ต้องการต่อไปได้อีก เช่น เมื่อรู้ค่าการเสียรูป (displacement) ตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้างก็สามารถนำไปใช้หาค่าความเครียด (strain) และความเค้น (stress) ได้ตามลำดับ หรือเมื่อรู้ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ หรือเมื่อรู้ค่าความเร็วของของไหลที่จุดต่อก็สามารถนำไปคำนวณหาอัตราการไหลได้

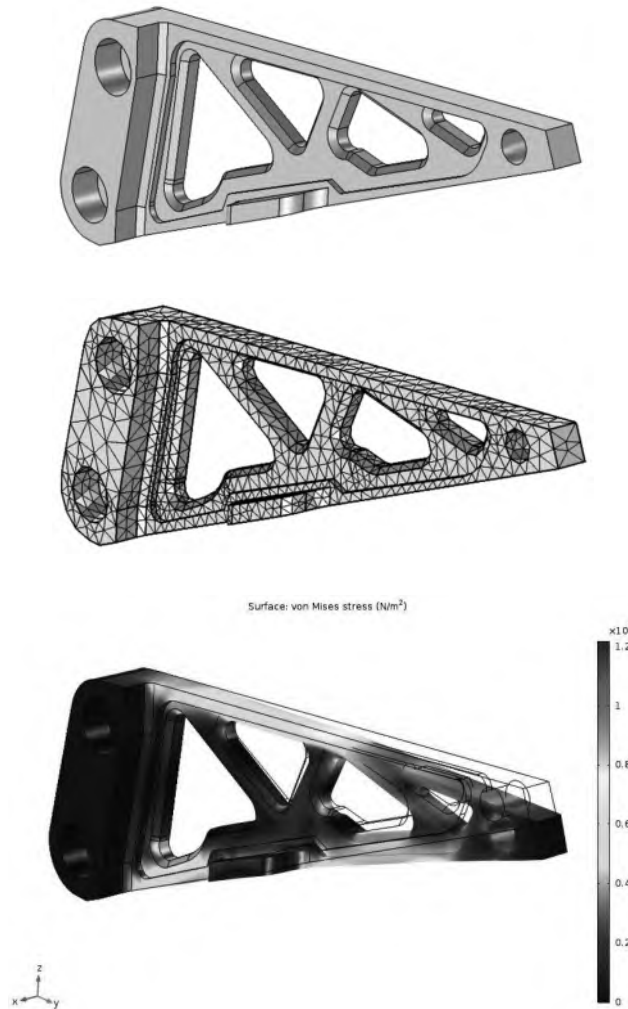
จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้ จะเห็นได้ว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่มีระเบียบแบบแผนอย่างเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีหัวใจสำคัญอยู่ที่การสร้างสมการของเอลิเมนต์ในขั้นตอน

ที่ 3 ซึ่งโดยทั่วไปทำได้ 3 วิธี วิธีเหล่านี้ได้อธิบายโดยละเอียดในบทที่ 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ในแต่ละบทจะแสดงตัวอย่างต่าง ๆ เพื่อก่อให้เกิดความเข้าใจในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้อย่างชัดเจน

1.6 การประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

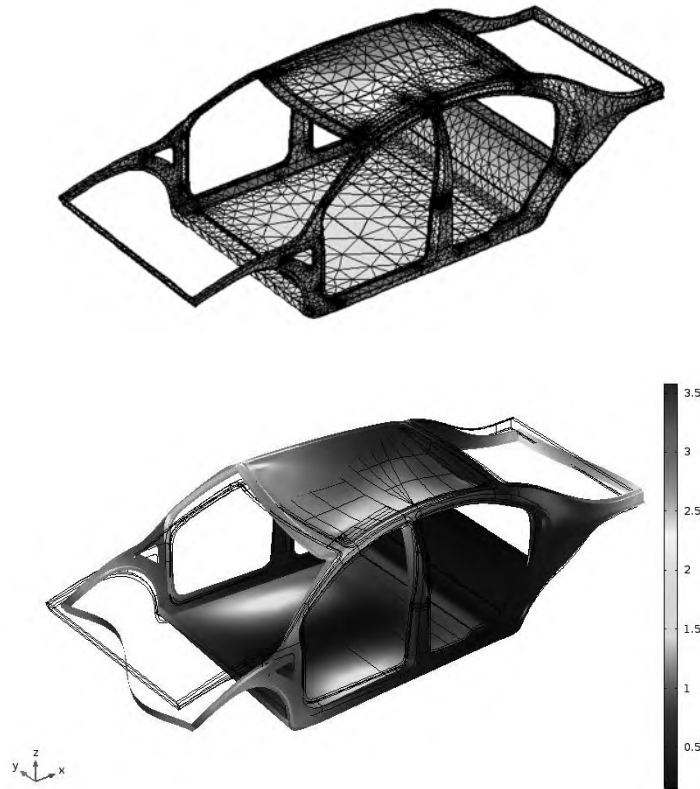
เนื่องจากรูปแบบผลิตภัณฑ์งานทางวิศวกรรมทั่วไปมักมีรูปร่างซับซ้อน วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงมีบทบาทเป็นอย่างมากในการนำมาประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน เช่น ปัญหาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็ง การถ่ายเทความร้อนในวัตถุ ตลอดจนการไหลของของไหลซึ่งเราจะได้ทำการศึกษาวิธีการโดยละเอียดในบทต่อ ๆ ไป ความเข้าใจของเนื้อหาในบทต่าง ๆ นี้เองจะช่วยทำให้มองเห็นภาพรวมและประสิทธิภาพของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์งานต่างชนิดกันได้เป็นอย่างดี การใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ควบคู่ไปกับวิวัฒนาการและประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ทำให้สามารถคำนวณหาปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้โดยสะดวกและในขณะเดียวกันช่วยลดค่าใช้จ่ายที่เคยต้องใช้ไปในการทดลอง ในหัวข้อย่อหน้านี้เราจะศึกษาบางตัวอย่างซึ่งวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์งานที่แตกต่างกันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การวิเคราะห์ปัญหาค้าววิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในยุคแรกเริ่มจากงานทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) และโครงสร้าง (structure) เป็นส่วนใหญ่ เนื่องจากปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในงานทางด้านนี้สามารถทำความเข้าใจได้โดยไม่ยากนัก วิวัฒนาการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทางด้านของแข็งในปัจจุบันนี้สามารถนำไปใช้ออกแบบชิ้นงานที่มีรูปร่างซับซ้อน เช่น ชิ้นส่วนโครงสร้างของเครื่องบินดังแสดงในรูป 1.14 รูปภาพนี้แสดงถึงรูปร่างของชิ้นส่วนที่ค่อนข้างมีความซับซ้อน รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ และผลลัพธ์ของความเค้นที่เกิดขึ้นซึ่งพล็อตบนรูปร่างของชิ้นส่วนที่เสียรูปไปแล้วอันเนื่องมาจากแรงกระทำจากภายนอก ผลลัพธ์ในลักษณะเช่นนี้ทำให้ผู้ออกแบบเกิดความเข้าใจในปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเพื่อหลีกเลี่ยงความเค้นที่อาจมีค่าสูงจนเกินไปทำให้ชิ้นช่วยเสียหายได้ และในขณะเดียวกันใช้ปริมาณโลหะให้น้อยที่สุดเพื่อลดน้ำหนักของชิ้นส่วน รูปภาพนี้ยังแสดงถึงการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดแตกต่างกันประกอบกันขึ้นเพื่อให้จำลองรูปแบบของชิ้นส่วนที่มีความซับซ้อนได้อย่างเที่ยงตรง



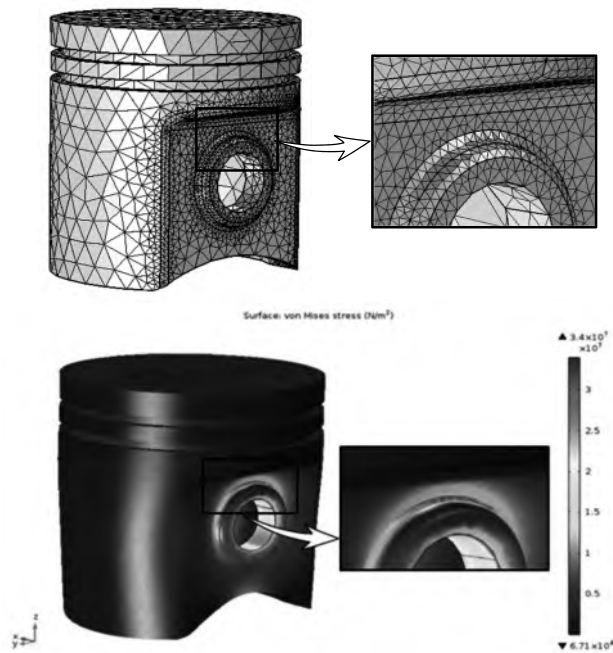
รูป 1.14 ชิ้นส่วนโครงสร้างของเครื่องบิน รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์
และค่าความเค้นบนพล็อตบนการเสยรูปที่เกิดขึ้น

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาพลศาสตร์ของโครงสร้าง (structural dynamics) ได้อย่างมีประสิทธิภาพในปัจจุบัน รูป 1.15 แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของโครงสร้างรถยนต์ส่วนบุคคล และลักษณะของรูปร่างโหมด (mode shape) ผลลัพธ์ในลักษณะเช่นนี้ช่วยให้ผู้ออกแบบเกิดความเข้าใจในการสั่นสะเทือนของโครงสร้างที่มีรูปร่างซับซ้อน ผู้ออกแบบสามารถดัดแปลงรูปร่างของโครงสร้างเพื่อลดการสั่นสะเทือน ให้ได้ผลลัพธ์ใหม่ที่ดีกว่าภายในเวลาอันสั้น



รูป 1.15 รูปร่างของโหมด (mode shape) บนโครงสร้างรถยนต์ส่วนบุคคล

มีหลายปัญหาทางวิศวกรรมในปัจจุบันซึ่งต้องใช้การวิเคราะห์ที่ตั้งอยู่บนของความรู้มากกว่า 1 อย่าง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาความเค้นอันเนื่องมาจากความร้อน ผู้วิเคราะห์ต้องหาผลลัพธ์ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิบนชิ้นส่วนหรืออุปกรณ์นั้น ๆ ให้ได้ก่อนอุณหภูมิในระดับแตกต่างกัน ก่อให้เกิดความเค้นอันเนื่องมาจากความร้อนบนชิ้นส่วนนั้น ๆ รูป 1.16 แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ และความเค้นที่เกิดขึ้นจากอุณหภูมิที่สูงขึ้นบนลูกสูบรถยนต์ เนื่องจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาความเค้นในของแข็งได้อย่างมีประสิทธิภาพ การวิเคราะห์ศาสตร์ทั้งสองไปพร้อมกันด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพียงวิธีเดียวจึงก่อให้เกิดความสะดวกเป็นอย่างมาก แนวคิดเดียวกันนี้จึงถูกนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีปฏิสัมพันธ์กัน (interdisciplinary problems) อื่น ๆ อีกในปัจจุบัน



รูป 1.16 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และความเค้นจากอุณหภูมิบนลูกสูบรถยนต์

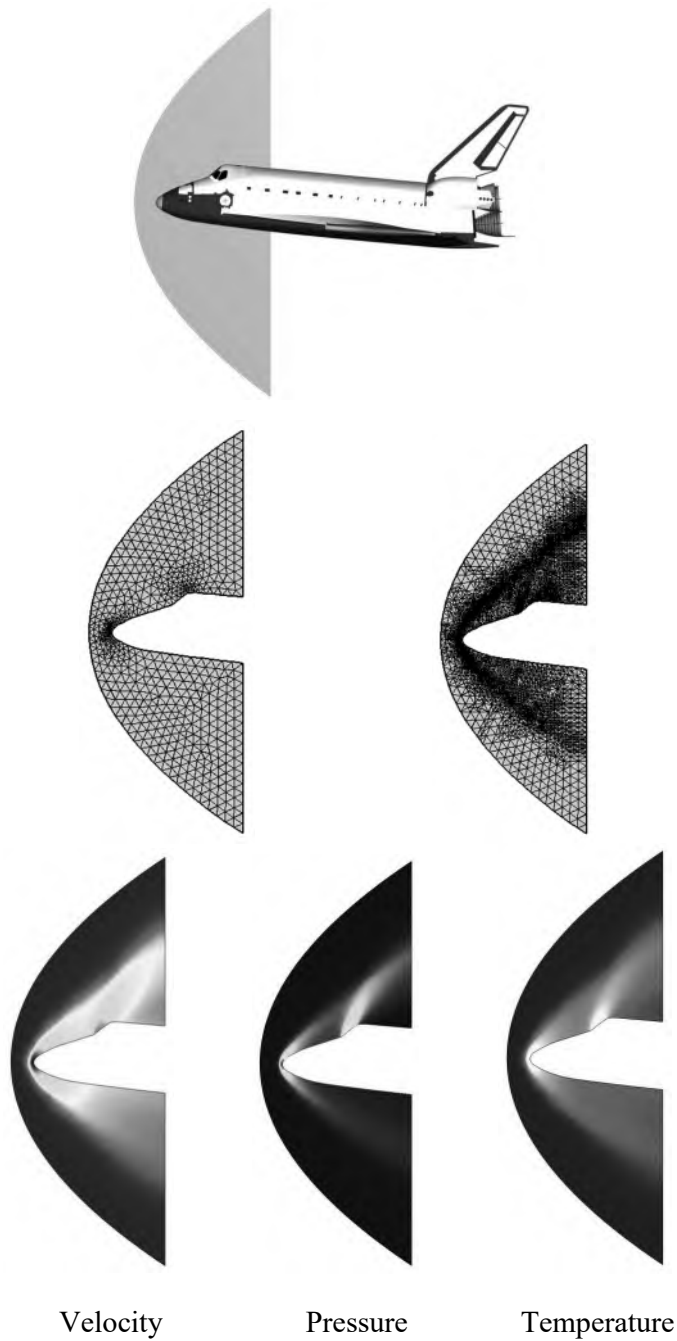
การวิเคราะห์เพื่อหาปรากฏการณ์ของการไหล (fluid flow) ที่มีความซับซ้อน เป็นสิ่งที่ทำได้ยาก ทั้งนี้เนื่องมาจากปรากฏการณ์ของการไหลนั้นถูกครอบคลุมด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) เป็นระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น (nonl-linear) ประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหลายสมการซึ่งต้องถูกแก้เพื่อหาผลลัพธ์ของความเร็ว ความดัน ฯลฯ ของของไหลไปพร้อมกัน การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงมีความซับซ้อน ต้องการปริมาณหน่วยความจำและเวลาในการคำนวณเป็นจำนวนมาก

รูป 1.17 แสดงระบบท่อส่งน้ำจากท่อซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางขนาดใหญ่ ผ่านถึงปากท่อต่อเส้นผ่าศูนย์กลางขนาดเล็กลง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นแสดงความเร็วและความดันของการไหล ทำให้ผู้วิเคราะห์เกิดความเข้าใจในปรากฏการณ์ของการไหลภายในท่อได้อย่างชัดเจน สามารถปรับปรุงการออกแบบขนาดท่อ เพื่อเพิ่มหรือลดความเร็วของการไหลและความดันตามที่ต้องการภายในระยะเวลาอันสั้น



รูป 1.17 ความเร็วและความดันของน้ำในระบบท่อส่งน้ำ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ยังได้ถูกพัฒนาเพื่อใช้วิเคราะห์การไหลความเร็วสูงกว่าเสียง (supersonic flow) สภาพะของการไหลชนิดนี้มักประกอบไปด้วยคลื่นช็อก (shock wave) ที่คุณสมบัติของการไหลนั้นเปลี่ยนแปลงโดยฉับพลัน การวิเคราะห์ปัญหาจึงต้องสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากให้กระจุกตัวอยู่ในแนวคลื่นช็อกเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรง รูป 1.18 แสดงโดเมนของการไหล รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปและรูปแบบไฟไนต์ที่เอลิเมนต์ขนาดเล็กถูกสร้างขึ้นโดยอัตโนมัติให้วางตัวอยู่ตามแนวคลื่นช็อก การใช้เอลิเมนต์จำนวนมากในแนวคลื่นช็อกที่ของไหลเกิดการเปลี่ยนแปลงโดยกระทันหัน ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิที่มีความถูกต้องแม่นยำสูงตามมา ในขณะที่เดียวกัน เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้ถูกสร้างขึ้นในบริเวณอื่นที่ของไหลไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงมากนัก จึงช่วยลดเวลาในการคำนวณและหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงไปได้เป็นอย่างมาก



รูป 1.18 โดเมนการวิเคราะห์ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลลัพธ์ของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิสถานะอากาศหน้ากระสวยอวกาศที่ความเร็วกว่าเสียง 3 เท่า

ในปัจจุบัน การพัฒนาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ยังคงรุดหน้าไปอย่างต่อเนื่อง เนื่องจากวิธีนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ กันได้อย่างมีประสิทธิภาพ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำไปใช้ประยุกต์กับงานในหลายแขนง โดยเฉพาะแขนงต่าง ๆ ที่สร้างผลกระทบซึ่งกันและกัน (interdisciplinary problem) เช่น ในการออกแบบเครื่องยนต์ของยานอวกาศ ขำทวีปที่บินเร็วกว่าเสียงเกินสิบเท่าขึ้นไป วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาสภาวะอากาศที่เกิดขึ้นหน้าเครื่องยนต์ ความร้อนบนเครื่องยนต์อันเกิดจากการเสียดสีในชั้นบรรยากาศ อุณหภูมิของเครื่องยนต์ที่เพิ่มสูงมากขึ้นไป การเสียดสีและความเค้นของเครื่องยนต์ที่เกิดขึ้นตามมา รวมทั้งผลกระทบซึ่งมีต่อกันและกัน เช่น การเสียดสีไปจากรูปเดิมของเครื่องยนต์หลังจากที่เครื่องยนต์มีอุณหภูมิสูงขึ้นยังส่งผลย้อนกลับทำให้สภาวะการแปรปรวนของอากาศรอบเครื่องยนต์เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม เป็นต้น

1.7 บทสรุป

ในบทนี้ เราทำความรู้จักกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในภาพรวมกว้าง ๆ โดยเริ่มจากการทำความเข้าใจว่าวิธีนี้คืออะไร มีลักษณะและคุณสมบัติในตัวเองอย่างไร เพื่อทำให้เกิดความเข้าใจในวิธีนี้ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น เราได้ศึกษาวิธีผลต่างสลับเบื้องต้นโดยใช้ตัวอย่างที่ง่าย ๆ วิธีผลต่างสลับเบื้องต้นนั้นประกอบด้วยขั้นตอนในกระบวนการแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หลังจากที่เราได้ทำความเข้าใจวิธีผลต่างสลับเบื้องต้นเป็นอย่างดีแล้ว เราจึงเริ่มศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยอธิบายข้อที่คล้ายคลึงกันและข้อที่แตกต่างกัน จากการศึกษาขั้นตอนวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เราได้พบว่า สัณยภาพที่เด่นชัดของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างหนึ่งซึ่งได้เปรียบกว่าวิธีผลต่างสลับเบื้องต้นก็คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นสามารถทำการจำลองรูปแบบของปัญหาที่ซับซ้อนได้โดยง่ายอย่างแม่นยำ จุดเด่นดังกล่าวเป็นสาเหตุที่ทำให้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับความนิยมมากในปัจจุบัน

เพื่อให้เห็นภาพรวมของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราได้ศึกษาขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีนี้ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาในหลาย ๆ แขนง โดยเริ่มตั้งแต่การแบ่งรูปร่างของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ การสร้างสมการสำหรับเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหานั้น และขั้นตอนอื่น ๆ อีกหลายขั้นตอน ไปจนถึงกระบวนการแก้ระบบ

สมการรวมท้ายสุดเพื่อหาผลลัพธ์ที่ต้องการ และก่อนจบบทนี้ เราได้เห็นประสิทธิภาพของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ นับตั้งแต่ปัญหาทางด้านของแข็ง เช่น การคำนวณความแข็งแรงของชิ้นส่วนในโครงสร้างเครื่องบิน การวิเคราะห์รูปร่างของโหมดในขณะที่โครงสร้างรถยนต์เกิดการสั่น ความเค้นอันเกิดจากอุณหภูมิที่สูงขึ้นในลูกสูบรถยนต์ขณะใช้งาน พฤติกรรมการไหลของน้ำในระบบท่อส่งน้ำ รวมทั้งสภาวะอากาศหน้ายานกระสวยอวกาศขณะร้อนกลับสู่พื้นโลกด้วยความเร็วว่าเสียง 3 เท่า ถึงแม้ว่าเมื่อเรามองจากภายนอกแล้วจะรู้สึกว่าการแก้ปัญหาเหล่านี้ค่อนข้างซับซ้อน แต่หลังจากที่เราเข้าใจในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยถ่องแท้ เราจะพบว่าขั้นตอนในการคำนวณเพื่อวิเคราะห์ปัญหาเหล่านี้ไม่ยากลำบากนัก เราจะเริ่มทำความเข้าใจวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทีละขั้นตอนโดยเริ่มจากพื้นฐานที่ง่าย ๆ ตั้งแต่บทที่ 2 เป็นต้นไป ความสามารถในการทำความเข้าใจในวิธีนี้ได้โดยถ่องแท้ ประกอบกับความเข้าใจในความหมายของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น จะช่วยยกระดับศักยภาพของการออกแบบงานทางวิศวกรรมได้เป็นอย่างดี

บทที่ 2

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยวิธีการโดยตรง

2.1 บทนำ

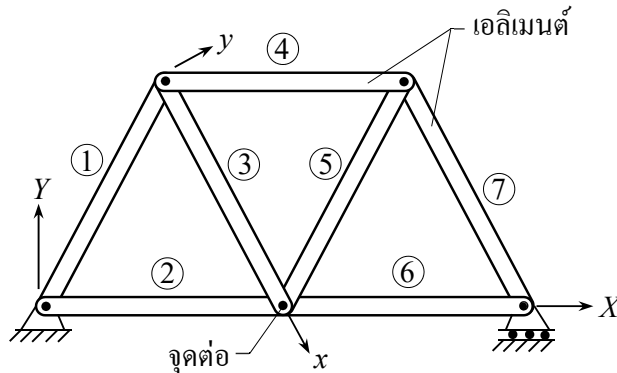
ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 1.5 ของบทที่ 1 ขั้นตอนแรกของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ จากนั้นจึงสร้างสมการขึ้นมาสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ เช่น ปัญหาทางด้านของแข็ง การถ่ายเทความร้อน หรือปัญหาของการไหล เมื่อได้สมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์แล้ว จึงนำสมการของเอลิเมนต์เหล่านี้มาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนแก้ระบบสมการรวมนั้นเพื่อผลลัพธ์ที่ต้องการ

จากลำดับขั้นตอนดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่า หัวใจสำคัญของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ การสร้างสมการเอลิเมนต์ขึ้นเพื่อให้สามารถจำลองแบบหรือปัญหาได้อย่างถูกต้อง การสร้างสมการเอลิเมนต์สามารถทำได้หลายวิธี แต่ละวิธีอาจมีข้อดีและข้อด้อยแตกต่างกันไป วิธีที่ง่ายที่สุดโดยเฉพาะสำหรับการเริ่มต้นศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ วิธีการสร้างสมการของเอลิเมนต์จากความเข้าใจที่ง่าย ๆ โดยตรง ดังจะอธิบายโดยละเอียดในบทนี้

2.2 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ

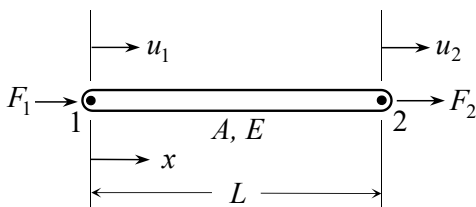
2.2.1 การยืดหยุ่นในวัสดุท่อน

ปัญหาพื้นฐานทางโครงสร้าง (truss problems) ดังแสดงโดยตัวอย่างในรูป 2.1 สามารถนำไปสู่ความเข้าใจในการสร้างสมการของเอลิเมนต์ได้เป็นอย่างดี



รูป 2.1 ตัวอย่างปัญหาทางโครงสร้างแบบง่าย

โครงสร้างในรูป 2.1 นี้ ประกอบด้วยวัสดุท่อน (rod) ทั้งหมด 7 ท่อน ซึ่งจำลองแบบด้วยเอลิเมนต์ทั้งหมด 7 เอลิเมนต์ เอลิเมนต์เหล่านี้วางตัวอยู่ในระบบแกนรวมใหญ่ $X-Y$ (global coordinate system) หากพิจารณาไปในแต่ละเอลิเมนต์ เช่น เอลิเมนต์หมายเลข 3 จะพบว่าเอลิเมนต์นี้วางอยู่ในแนวแกน x ซึ่งอยู่ในระบบแกนย่อย $x-y$ (local coordinate system) เมื่อโครงสร้างในรูป 2.1 นี้ถูกแรงภายนอกมากระทำ สามารถคำนวณหาการเคลื่อนตัวของ



รูป 2.2 ลักษณะเอลิเมนต์แบบอย่าง
สำหรับโครงสร้าง

จุดต่อต่าง ๆ ได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ขั้นตอนแรกที่จะต้องทำคือ การสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้นมาก่อน วิธีการก็คือเราเริ่มจากการพิจารณาเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่ง เช่น เอลิเมนต์หมายเลข 3 นี้ ดังแสดงในรูป 2.2

เอลิเมนต์แบบอย่างในรูป 2.2 นี้ ประกอบด้วย 2 จุดต่อหมายเลข 1 และ 2 ที่ปลายทั้งสองข้าง ทำจากวัสดุที่มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) เท่ากับ E มี

พื้นที่หน้าตัด (cross-sectional area) เท่ากับ A และมีความยาวเท่ากับ L มีแรง F_1 และ F_2 กระทำในแนวแกน x ที่จุดต่อ 1 และ 2 ตามลำดับ เมื่อโครงสร้างโดยรวมอยู่ภายใต้สภาวะความสมดุล ทำให้จุดต่อ 1 และ 2 เคลื่อนตัวไปในแนวแกน x มีค่าเท่ากับ u_1 และ u_2 ตามลำดับ

เราเริ่มต้นจากสมการความสัมพันธ์ของความเค้น (stress) และความเครียด (strain) ที่รู้จักกันว่า กฎของฮุก (Hooke's law) นั่นคือ

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.1)$$

โดย σ แทนความเค้นและ ε แทนความเครียด หากให้ N แทนแรงที่เกิดขึ้นในแนวแกน (axial force) ในทิศทางบวก x ของเอลิเมนต์ ดังนั้น

$$N = \sigma A = (E\varepsilon)A$$

หรือ
$$N = E \frac{u_2 - u_1}{L} A \quad (2.2)$$

ดังนั้น จากรูป 2.2 จึงได้ว่า

$$F_2 = -F_1 = N = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (2.3)$$

ซึ่งนำมาสู่ 2 สมการย่อย ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{AE}{L} (u_1 - u_2) &= F_1 \\ -\frac{AE}{L} (u_1 - u_2) &= F_2 \end{aligned}$$

และเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \\ \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

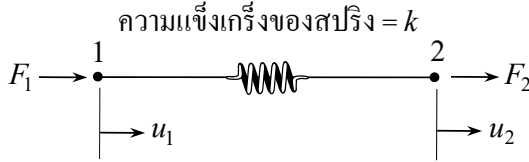
หรือเขียนย่อได้เป็น $[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.5)$

โดย $[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งแรง (element stiffness matrix)

$\{u\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ (vector of nodal displacements)

และ $\{F\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของแรงกระทำที่จุดต่อ (vector of nodal forces)

รูปแบบของสมการของเอลิเมนต์ดังแสดงโดยสมการ (2.4) สามารถนำไปใช้กับ



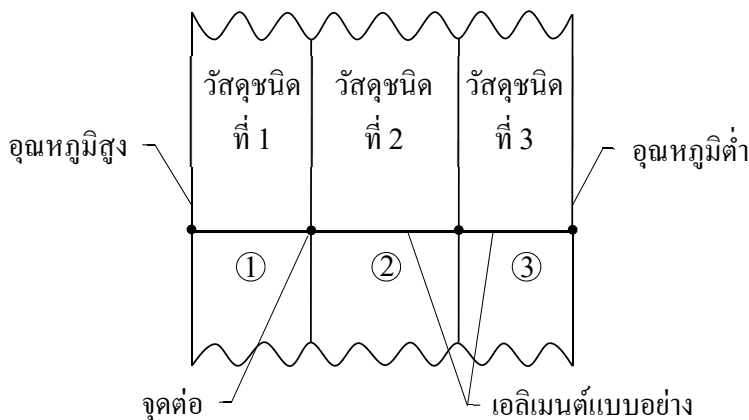
รูป 2.3 สปริงเอลิเมนต์

สปริง ดังแสดงในรูป 2.3 ได้โดยตรง โดย k แทน ค่าความแข็งเกร็งของสปริง (spring stiffness) ซึ่งมีหน่วยเป็นแรง ต่อความยาวที่ยืดออกหรือหดสั้นลง เช่น นิวตันต่อเซนติเมตร สมการของสปริงเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูป 2.3 นี้ คือ

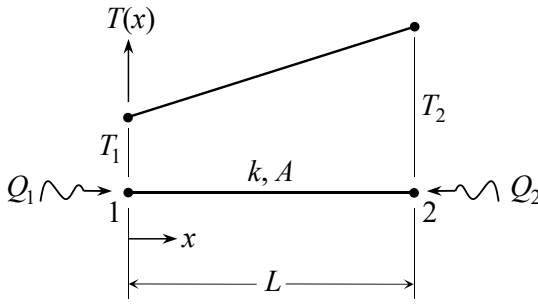
$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

2.2.2 การนำความร้อน

การนำความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัว (steady-state heat transfer) ในหนึ่งมิติ ซึ่งเกิดขึ้นจากระดับของอุณหภูมิที่แตกต่างกัน เป็นปัญหาอีกปัญหาหนึ่งที่จะช่วยทำให้เกิดความเข้าใจในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดียิ่งขึ้น รูป 2.4 แสดงลักษณะของปัญหา ซึ่งประกอบด้วยวัสดุ 3 ชนิด โดยความร้อนเกิดการถ่ายเทในแนวแกน x จากผิวขอบนอกด้านซ้ายที่มีอุณหภูมิสูงไปสู่ผิวขอบนอกด้านขวาที่มีอุณหภูมิต่ำ ในการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถจำลองปัญหานี้ด้วย 3 เอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 2.4



รูป 2.4 การถ่ายเทความร้อนผ่านวัสดุหลายชนิด



รูป 2.5 เอลิเมนต์แบบอย่างสำหรับการถ่ายเทความร้อน

ความร้อนเท่ากับ A มีความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกน x เท่ากับ L และมีอุณหภูมิที่จุดต่อ 1 และ 2 เท่ากับ T_1 และ T_2 ซึ่งก่อให้เกิดการถ่ายเทความร้อนเท่ากับ Q_1 และ Q_2 ตามลำดับ

จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ที่ว่าปริมาณความร้อน Q ซึ่งไหลผ่านภายในเอลิเมนต์ในทิศทาง x นั้นขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน พื้นที่หน้าตัด และความชันของอุณหภูมิ คือ

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.7)$$

โดยเครื่องหมายลบในสมการ (2.7) กำกับว่าปริมาณความร้อน Q ต้องไหลจากซ้ายไปขวาเมื่อความชันของอุณหภูมิมีค่าเป็นบวก ดังนั้น จากรูป 2.5 เราจึงได้ว่า

$$Q_1 = -Q_2 = Q = -kA \frac{T_2 - T_1}{L}$$

ซึ่งนำมาสู่ 2 สมการย่อย ดังนี้

$$\frac{kA}{L} (T_1 - T_2) = Q_1 \quad (2.8)$$

$$\frac{kA}{L} (-T_1 + T_2) = Q_2 \quad (2.9)$$

และเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$[K] \{T\} = \{Q\} \quad (2.11)$$

จากนั้นจึงสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้น ซึ่งทำได้โดยนำเอลิเมนต์แบบอย่างเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่งมาพิจารณา ดังแสดงในรูป 2.5 อันประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 ที่ปลายทั้งสองข้าง เอลิเมนต์นี้มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) เท่ากับ k มีพื้นที่หน้าตัด (cross-sectional area) เพื่อการนำ

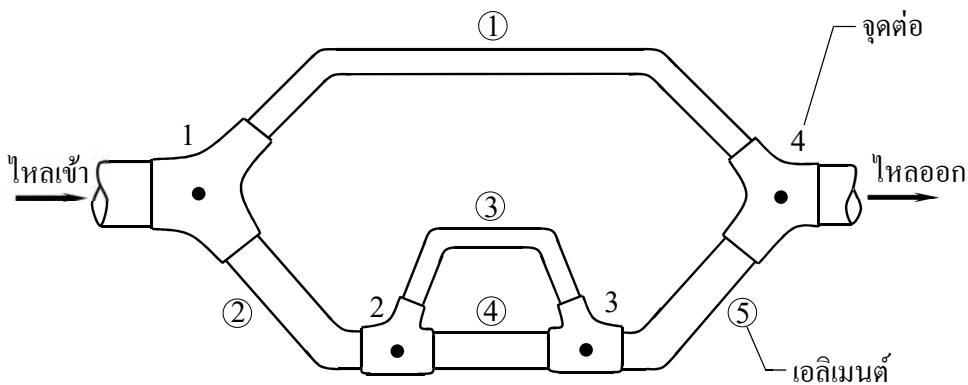
โดย $[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการนำความร้อน (element conduction matrix)

$\{T\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของอุณหภูมิที่จุดต่อ (vector of nodal temperatures)

และ $\{Q\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่จุดต่อ (vector of nodal heat loads)

2.2.3 การไหลในท่อ

อัตราการไหลของของไหลในระบบท่อภายใต้สถานะอยู่ตัว อาจคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เช่นกัน รูป 2.6 แสดงตัวอย่างของระบบท่อ ซึ่งประกอบด้วย 5 เอลิเมนต์



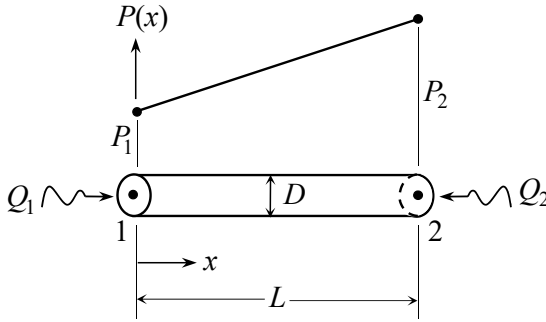
รูป 2.6 การไหลในระบบท่อ

อัตราการไหลของของไหลในท่อกลมภายใต้สภาวะอยู่ตัว (steady-state) และสมมติฐานของการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) โดยของไหลมีความหนาแน่นคงที่ (incompressible) อาจเขียนให้อยู่ในรูปความชันของความดันได้ดังนี้

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.12)$$

โดย Q คือ อัตราการไหลในทิศบวก x , D คือ เส้นผ่านศูนย์กลางกลางของท่อ, μ คือ ค่าความหนืด (viscosity) ของของไหล และ P คือ ค่าความดัน (pressure)

ในการสร้างสมการเอลิเมนต์ เราเริ่มจากการพิจารณาเอลิเมนต์แบบอย่างเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่งดังแสดงในรูป 2.7 ซึ่งเป็นท่อที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ D ความยาวเท่ากับ L วางตัวในทิศแกน x โดยที่ปลายท่อทั้งสองประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 ซึ่งมีความดัน P_1 และ P_2 ก่อให้เกิดอัตราการไหล Q_1 และ Q_2 ตามลำดับ



รูป 2.7 เอลิเมนต์แบบอย่างของการไหล
ในท่อกลม

จากค่านิยามของอัตราการไหล Q ในทิศทางบวก x ของท่อในสมการ (2.12) และจากทิศทางอัตราการไหล Q_1 และ Q_2 ในรูป 2.7 เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Q_2 = Q \\ &= -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{P_2 - P_1}{L} \end{aligned}$$

ซึ่งนำมาสู่ 2 สมการย่อย ดังนี้

$$\frac{\pi D^4}{128\mu L} (P_1 - P_2) = Q_1 \quad (2.13)$$

$$\frac{\pi D^4}{128\mu L} (-P_1 + P_2) = Q_2 \quad (2.14)$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\frac{\pi D^4}{128\mu L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

หรือเขียนย่อได้เป็น

$$[K] \{P\} = \{Q\} \quad (2.16)$$

โดย $[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมทริกซ์ของการไหล (element fluidity matrix)

$\{P\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของค่าความดันที่จุดต่อ (vector of nodal pressures)

และ $\{Q\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของอัตราการไหลที่จุดต่อ (vector of nodal flow rates)

จากตัวอย่างทั้งสามข้างต้นนี้ อันประกอบด้วยปัญหาด้านโครงสร้าง ปัญหาด้านความร้อน และปัญหาด้านการไหล จะเห็นได้ว่าสมการของเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้ สามารถสร้างขึ้นมาจากความรู้พื้นฐานทางวิศวกรรมได้โดยตรง สมการเอลิเมนต์ของปัญหาดตามสมการ (2.5), (2.11) และ (2.16) ล้วนอยู่ในรูปแบบเดียวกัน คือ

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (2.17)$$

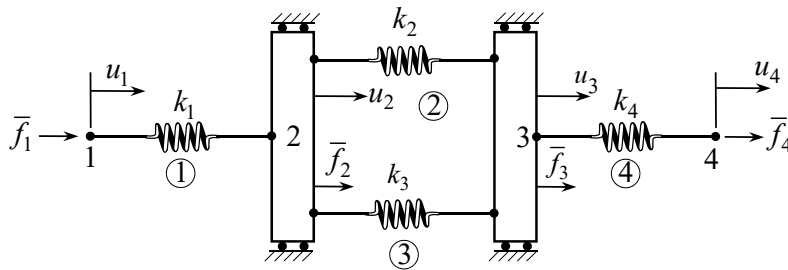
โดย $[K]$ เรียกว่า เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ขึ้นอยู่กับชนิดของปัญหานั้น ๆ (element matrix)

$\{u\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของตัวที่ไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (vector of nodal unknowns)

และ $\{F\}$ เรียกว่า เวกเตอร์ของโหลดที่จุดต่อ (vector of nodal loads)

2.3 การสร้างระบบสมการรวมจากสมการย่อยของเอลิเมนต์

หลังจากที่เราสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้นมาได้แล้ว ดังเช่นสมการแบบอย่างของสปริงในสมการ (2.6) เราจำเป็นต้องนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์เหล่านี้มาประกอบรวมกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการรวม ซึ่งก็เปรียบเสมือนกับว่าเรานำเอาสปริงเอลิเมนต์ต่าง ๆ มาประกอบต่อกันขึ้นเป็นรูปร่างรวมสุดท้ายที่ต้องการ การนำสมการย่อยของแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันเข้าจำเป็นต้องมีหลักการ ซึ่งสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่ายด้วยการใช้ตัวอย่างในรูป 2.8



รูป 2.8 ตัวอย่างระบบสปริงในหนึ่งมิติ

รูป 2.8 แสดงระบบสปริงที่มีการเสียรูปได้เพียงทิศทางเดียวในหนึ่งมิติ โดยประกอบด้วยสปริงเอลิเมนต์ทั้งหมด 4 เอลิเมนต์ ซึ่งมีค่าความแข็งเกร็งของสปริงเท่ากับ k_1 , k_2 , k_3 และ k_4 ตามลำดับ มีการเคลื่อนตัวที่จุดต่อทั้ง 4 จุด คือ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 และ แรงลัพธ์ (resultant force) เท่ากับ $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$, $\bar{f}_4$ ตามลำดับ ดังแสดงในรูป ซึ่งหมายความว่าระบบสมการรวมท้ายสุดจะต้องอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{24} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} \\ \bar{k}_{41} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_{(4 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{Bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (2.18)$$

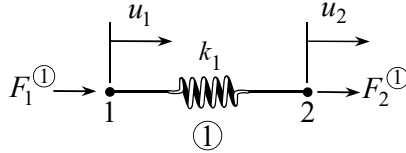
หรือเขียนย่อได้ว่า

$$[K]_{sys} \{u\}_{sys} = \{F\}_{sys} \quad (2.19)$$

โดยดัชนีล่าง (subscript) sys แทนคำว่า system ซึ่งหมายถึงระบบสมการรวม

2.3.1 การประกอบเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ขึ้นเป็นเมทริกซ์ระบบรวม

สมการ (2.19) แสดงให้เห็นว่า เราจำเป็นต้องรู้ค่าของเมทริกซ์ระบบรวม $[K]_{\text{sys}}$ ก่อนจึงสามารถคำนวณหาการเคลื่อนตัวที่จุดต่อต่าง ๆ ได้ เมทริกซ์ระบบรวมนี้ประกอบขึ้นมา



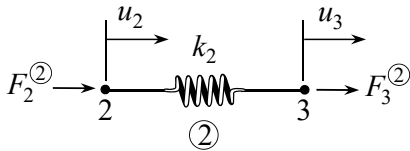
รูป 2.9 สปริงเอลิเมนต์ที่ ①
จากรูป 2.8

จากเมทริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์ย่อย เช่น หากพิจารณาเอลิเมนต์หมายเลข ① ในรูป 2.8 โดยแยกแสดงออกมาดังในรูป 2.9 และใช้สมการแบบอย่างตามสมการ (2.6) เราจะพบว่า สมการของเอลิเมนต์ ① นี้ คือ

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

ซึ่งมีเพียง 2 สมการ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการรวมซึ่งมีทั้งหมด 4 สมการในลักษณะเช่นเดียวกันกับสมการ (2.18) ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$



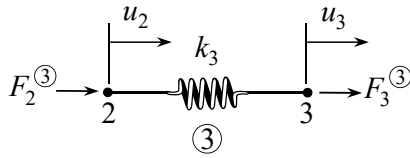
รูป 2.10 สปริงเอลิเมนต์ที่ ②
จากรูป 2.8

ในทำนองเดียวกัน หากพิจารณาสปริงเอลิเมนต์หมายเลข ② ในรูป 2.8 ซึ่งแยกแสดงในรูป 2.10 สมการของสปริงเอลิเมนต์ ② นี้ คือ

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการรวมที่มีทั้งหมด 4 สมการได้ คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$



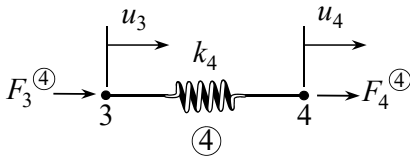
รูป 2.11 สปริงเอลิเมนต์ที่ (3)
จากรูป 2.8

และเช่นเดียวกัน เมื่อพิจารณาสปริงเอลิเมนต์
หมายเลข (3) ในรูป 2.8 ซึ่งแยกแสดงในรูป 2.11
สมการของสปริงเอลิเมนต์ (3) นี้ คือ

$$\begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการรวมที่มีทั้งหมด 4 สมการได้เช่นกัน คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$



รูป 2.12 สปริงเอลิเมนต์ที่ (4)
จากรูป 2.8

และสุดท้าย หากพิจารณาสปริงเอลิเมนต์หมายเลข (4)
ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ท้ายในรูป 2.8 สามารถแยกแสดง
ลักษณะของสปริงเอลิเมนต์นี้ได้ ในรูป 2.12 สมการ
ของสปริงเอลิเมนต์ (4) นี้ คือ

$$\begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(4)} \\ F_4^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการรวมที่มีทั้งหมด 4 สมการ ได้คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^{(4)} \\ F_4^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

การนำสมการที่ได้จากแต่ละเอลิเมนต์ซึ่งคือ สมการ (2.21) จากเอลิเมนต์ (1),
สมการ (2.23) จากเอลิเมนต์ (2), สมการ (2.25) จากเอลิเมนต์ (3), และสมการ (2.27) จาก
เอลิเมนต์ (4) มาประกอบรวมกันเข้า ก็เปรียบเสมือนเรานำสปริงเอลิเมนต์ย่อยทั้งสี่ จากรูป
2.9-2.12 มาต่อเข้าด้วยกัน ก่อให้เกิดระบบสปริงดังแสดงในรูป 2.8 นั่นคือ

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} k_1 & -k_1 & & \\ \hline -k_1 & k_1+k_2+k_3 & -k_2-k_3 & \\ \hline & -k_2-k_3 & k_2+k_3+k_4 & -k_4 \\ \hline & & -k_4 & k_4 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)}+F_2^{(2)}+F_2^{(3)} \\ F_3^{(2)}+F_3^{(3)}+F_3^{(4)} \\ F_4^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

หลังจากนำสปริงเอลิเมนต์มาต่อรวมกันเข้าดังแสดงในรูป 2.8 ผลลัพธ์รวมของแรง (resultant force) ที่จุดต่อ 2 และ 3 ต้องมีค่าเป็น $\bar{f}_2$ และ $\bar{f}_3$ นั่นคือ

$$F_2^{(1)}+F_2^{(2)}+F_2^{(3)} = \bar{f}_2$$

และ

$$F_3^{(2)}+F_3^{(3)}+F_3^{(4)} = \bar{f}_3$$

ในขณะที่

$$F_1^{(1)} = \bar{f}_1 \quad \text{และ} \quad F_4^{(4)} = \bar{f}_4$$

แรง $\bar{f}$ เหล่านี้จึงเปรียบเสมือนเป็นแรงเพิ่มเติมจากภายนอก (external force) ซึ่งมากระทำที่จุดต่อ นั้น หรืออาจเป็นแรงปฏิกิริยา (reaction force) หากจุดต่อนั้นถูกตรึงไว้กับที่

เมทริกซ์ความแข็งเกร็งรวมของระบบดังแสดงทางด้านซ้ายของสมการ (2.28) นี้คือ

$$\begin{aligned} [K]_{\text{sys}} &= \sum [K]_e \\ &= \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} (1) & (2) & (3) & (4) \\ \hline k_1 & -k_1 & & \\ \hline -k_1 & k_1+k_2+k_3 & -k_2-k_3 & \\ \hline & -k_2-k_3 & k_2+k_3+k_4 & -k_4 \\ \hline & & -k_4 & k_4 \end{array} & \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

โดยตัวเลข 1, 2, 3, 4 ที่อยู่ในวงเล็บตามขอบด้านบนและด้านขวาของเมทริกซ์ระบบรวมของสปริงนั้นสอดคล้องกับสมการลำดับที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

การประกอบกันเข้าของสมการเอลิเมนต์ย่อยขึ้นเป็นเมทริกซ์ระบบรวม ดังแสดงในสมการ (2.29) นี้สามารถทำได้ง่าย ๆ โดยไม่จำเป็นต้องเขียนขึ้นเป็นสมการ (2.21), (2.23), (2.25) และ (2.27) ออกมาโดยละเอียด วิธีการที่ง่ายนี้คือ การเขียนสมการของเอลิเมนต์เหล่านี้ด้วยการกำกับหมายเลขของแฉกนอนและแฉกตั้งให้ถูกต้อง เช่น สปริงเอลิเมนต์ ① ประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 เราก็กำกับตัวเลขไปบนเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์นี้เป็น

$$[K]_{element①} = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{k_1} & \overset{(2)}{-k_1} \\ \underset{(1)}{-k_1} & \underset{(2)}{k_1} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับสปริงเอลิเมนต์② ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2 และ 3

$$[K]_{element②} = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{k_2} & \overset{(3)}{-k_2} \\ \underset{(2)}{-k_2} & \underset{(3)}{k_2} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

สำหรับสปริงเอลิเมนต์③ ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2 และ 3 เช่นเดียวกับเอลิเมนต์②

$$[K]_{element③} = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{k_3} & \overset{(3)}{-k_3} \\ \underset{(2)}{-k_3} & \underset{(3)}{k_3} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

และสุดท้ายสำหรับสปริงเอลิเมนต์④ ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 3 และ 4

$$[K]_{element④} = \begin{bmatrix} \overset{(3)}{k_4} & \overset{(4)}{-k_4} \\ \underset{(3)}{-k_4} & \underset{(4)}{k_4} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

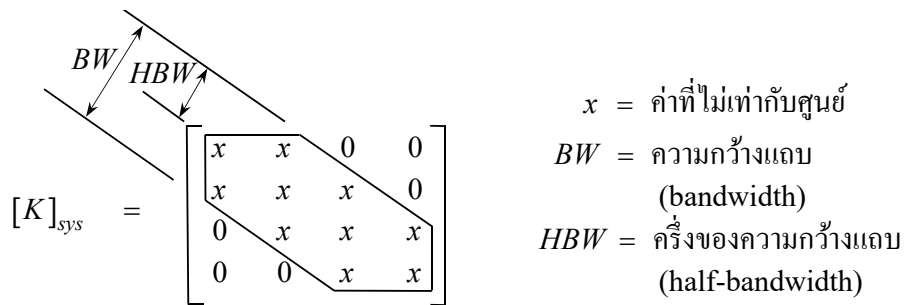
เมื่อเรามีหมายเลขกำกับทั้งทางแฉวนอนและแฉวดั่งซึ่งกำกับสัมพันธ์ทุกตัวในเมทริกซ์ของทุกเอลิเมนต์แล้ว เราก็สามารถนำสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เหล่านี้มาใส่ลงในเมทริกซ์ระบบรวมให้สอดคล้องกับหมายเลขแฉวนอนและแฉวดั่งเช่นกันได้ ดังนี้

$$[K]_{sys} = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{k_1} & \overset{(2)}{-k_1} & \overset{(3)}{0} & \overset{(4)}{0} \\ \underset{(1)}{-k_1} & \underset{(2)}{k_1+k_2+k_3} & \underset{(3)}{-k_2-k_3} & \underset{(4)}{0} \\ \overset{(3)}{0} & \overset{(2)}{-k_2-k_3} & \overset{(3)}{k_2+k_3+k_4} & \overset{(4)}{-k_4} \\ \overset{(4)}{0} & \overset{(3)}{0} & \overset{(4)}{-k_4} & \overset{(4)}{k_4} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

เช่น ค่าสัมประสิทธิ์ $-k_1$ ซึ่งอยู่ในแฉวนอนที่ 1 แฉวดั่งที่ 2 ของเมทริกซ์เอลิเมนต์ย่อยหมายเลข ① จะไปใส่ในตำแหน่งของแฉวนอนที่ 1 แฉวดั่งที่ 2 ของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ (2.34) อนึ่ง หลักการประกอบเมทริกซ์ย่อยขึ้นมาเป็นเมทริกซ์ระบบรวมดังอธิบายโดยสมการ (2.30)-(2.34) ได้นำไปใช้ในการประดิษฐ์คอมพิวเตอร์โปรแกรมเช่นเดียวกัน เพราะเป็นหลักการที่ง่าย ๆ และสามารถทำได้โดยสะดวก วิธีการดังกล่าวอาจดูเป็นสิ่งที่ง่ายโดยเฉพาะในตัวอย่างนี้ แต่ในทางปฏิบัติแล้วทั้งเอลิเมนต์และจุดต่อมีจำนวนมากโดยตัวเลขอาจเป็นอะไรก็ได้ ดังตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์หมายเลข ⑦6 อาจประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1024 และ 582 หลักการดังอธิบายมานี้ก็ยังใช้ได้เช่นเดียวกัน

2.3.2 คุณสมบัติของเมทริกซ์ระบบรวม

หากเราสังเกตลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวมในสมการ (2.34) เราจะเห็นได้ว่า เมทริกซ์ระบบรวมนี้ประกอบด้วย สัมประสิทธิ์ที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ในบริเวณแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังในรูป 2.13 อีกทั้งสำหรับปัญหาของเรื่องสปริงนี้เรายังพบว่า เมทริกซ์ระบบรวมยังเป็นเมทริกซ์ที่มีความสมมาตร ซึ่งหมายความว่า ในการประดิษฐ์คอมพิวเตอร์โปรแกรมเราสามารถเก็บเพียงค่าต่าง ๆ ตั้งแต่แนวทแยงมุมของเมทริกซ์ขึ้นไปก็เพียงพอเพื่อใช้ในการคำนวณ เช่น หากเราต้องการแก้ปัญหาที่มี 1,000 จุดต่อ เมทริกซ์ระบบรวมจะประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ทั้งหมด $1,000 \times 1,000 = 1,000,000$ ค่า ซึ่งก็หมายความว่าเราสามารถเก็บค่าประมาณ 5 แสนค่าก็เพียงพอเพื่อใช้ในการคำนวณแล้ว



รูป 2.13 ลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวม และครึ่งของความกว้างแถบ

ลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวมในรูป 2.13 ยังแสดงให้เห็นว่า ค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์นั้นอยู่ภายในกรอบขอบเขต ซึ่งมีความกว้างเท่ากับความกว้างแถบ BW (bandwidth) โดยค่านอกกรอบออกไปล้วนเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีความจำเป็นต้องเก็บไว้ในหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ นั่นหมายความว่า สามารถเก็บค่าสัมประสิทธิ์เพียงแค่ครึ่งหนึ่งในกรอบขอบเขตดังแสดงในรูป 2.13 กล่าวคือ ครึ่งหนึ่งของความกว้างแถบ (half-bandwidth) คูณกับจำนวนสมการก็เพียงพอเพื่อใช้ในการคำนวณ ยกตัวอย่างเช่น หากครึ่งของความกว้างแถบเท่ากับ 2 และเรามีจำนวนจุดต่อทั้งหมด 1,000 จุดต่อ เราก็สามารถเก็บค่าเพียง $2 \times 1,000 = 2,000$ ค่า ไว้ในหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ก็เพียงพอเพื่อใช้ในการคำนวณ

จากรูป 2.13 และคำอธิบายข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่า ค่าครึ่งของความกว้างของแถบ (HBW) นั้นมีบทบาทต่อการคำนวณและการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นอย่างมาก ค่าครึ่งความกว้างของแถบนี้นั้นขึ้นตรงอยู่กับการกำหนดหมายเลขของจุดต่อ ซึ่งอาจคำนวณได้จากสมการ

$$HBW = (1 + NDIF) \times NDOF$$

โดย HBW แทนครึ่งความกว้างแถบ (half-bandwidth), $NDIF$ แทนค่าแตกต่างระหว่างหมายเลขของจุดต่อ ซึ่งเป็นค่าที่สูงสุดจากทุก ๆ เอลิเมนต์ และ $NDOF$ แทนจำนวนระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ของแต่ละจุดต่อนั้น โดยสำหรับปัญหาใน 1 มิติ ค่า $NDOF$ เท่ากับ 1 เป็นต้น จากรูป 2.8 เราสามารถคำนวณหาครึ่งความกว้างของแถบได้ คือ

$$HBW = (1+1) \times 1 = 2$$

ซึ่งก็สอดคล้องกับที่พบในสมการ (2.34) และแสดงในรูป 2.13

หากทำการสลับหมายเลขของจุดต่อระหว่างหมายเลข 2 และหมายเลข 4 ในรูป 2.8 นี้ จะพบว่า $NDIF = 4 - 1 = 3$ เกิดขึ้นที่เอลิเมนต์หมายเลข ① ดังนั้น

$$HBW = (1+3) \times 1 = 4$$

และลักษณะของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในรูป 2.13 จะกลายเป็น

$$[K]_{sys} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

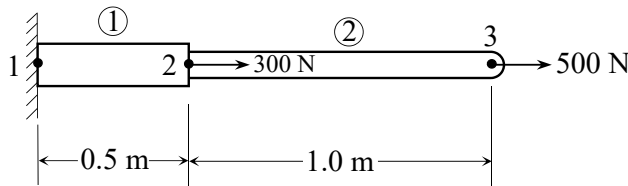
คราวนี้กรอบขอบเขตของแถบนั้นขยายเพิ่มขึ้น ซึ่งหมายถึงว่า จำเป็นต้องเก็บค่าสัมประสิทธิ์ในหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์เพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า การกำหนดหมายเลขจุดต่อให้แก่วัสดุแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ถึงแม้จะไม่มีผลต่อผลลัพธ์ แต่ส่งผลกระทบต่อประสิทธิภาพในการคำนวณ เช่น อาจทำให้ต้องใช้หน่วยความจำและเวลาในการคำนวณมากขึ้น ข้อที่ควรตระหนักไว้ตลอดเวลาก็คือ ความแตกต่างระหว่างหมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์ต่าง ๆ ($NDIF$) ควรให้มีค่าต่ำที่สุด อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติเมื่อรูปร่างลักษณะของชิ้นงานนั้นซับซ้อนและมีจำนวนเอลิเมนต์รวมทั้งจุดต่อเป็นจำนวนมากนั้นเป็นการยากมากที่พยายามให้ค่า $NDIF$ นี้มีค่าต่ำที่สุด ในปัจจุบันมีโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขนาดเล็กหลายโปรแกรมที่ช่วยเปลี่ยนหมายเลขของจุดต่อซึ่งช่วยทำให้ค่าความกว้างของแถบที่เกิดขึ้นนั้นต่ำสุด (bandwidth optimization programs) อันเป็นผลต่อเนื่องให้ใช้หน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลดลง รวมทั้งเวลาที่ใช้ในการคำนวณก็ลดลงตามไปด้วย

2.3.3 ตัวอย่างการแก้ปัญหาหนึ่งมิติ

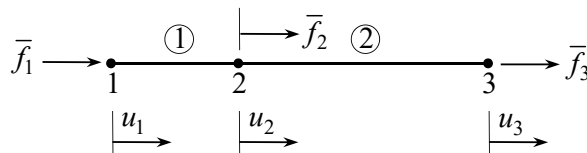
หลังจากที่ได้เรียนรู้ลักษณะของสมการเอลิเมนต์ เช่น เอลิเมนต์วัสดุท่อนของปัญหาทางโครงสร้างหนึ่งมิติ ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 2.2.1 และการประกอบสมการจากเอลิเมนต์ย่อยขึ้นเป็นสมการระบบรวมดังอธิบายในหัวข้อ 2.3.1 เราสามารถนำความรู้นี้มาแก้ปัญหาที่วางตัวในหนึ่งมิติได้ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1 แท่งโลหะสองชนิดมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น 5×10^7 และ 10×10^7 N/m² ยาว 0.5 m และ 1 m มีพื้นที่หน้าตัด 20 cm^2 และ 10 cm^2 ตามลำดับ ต่อกันที่จุดต่อหมายเลข 2 โดยที่จุดต่อหมายเลข 1 ถูกยึดติดกับฝาผนัง และมีแรงกระทำที่จุดต่อหมายเลข 2 และ 3 เท่ากับ 300 N และ 500 N ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 2.14 ให้คำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของจุดต่อหมายเลข 2 และ 3 รวมทั้งค่าความเค้นและแรงที่เกิดขึ้นภายในแท่งโลหะทั้งสองนี้



รูป 2.14 แท่งโลหะ 2 ชนิด จำลองด้วยสองเอลิเมนต์และสามจุดต่อ

วิธีทำ จากรูป 2.14 ที่กำหนดมาให้ เราสามารถนำมาเขียนเป็นแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element model) ซึ่งประกอบด้วยสองเอลิเมนต์และสามจุดต่อได้ ดังแสดงในรูป 2.15



รูป 2.15 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแท่งโลหะ 2 ชนิด

โดยที่จุดต่อหมายเลข 1, 2 และ 3 มีค่าเคลื่อนตัวเท่ากับ u_1 , u_2 , u_3 ตามลำดับ และมีแรงกระทำซึ่งอาจหมายถึงแรงจากภายนอก (external force) หรือแรงปฏิกิริยา (reaction force) เท่ากับ $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ และ $\bar{f}_3$ ตามลำดับเช่นกัน

จากสมการของเอลิเมนต์ (2.4) ในหัวข้อย่อย 2.2.1 เราได้สร้างเมทริกซ์ของความแข็งแรงของเอลิเมนต์ที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ A ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ E และความยาวเท่ากับ L ไว้แล้ว คือ