

พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม



ปราโมทย์ เดชะอำไพ

พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ

ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม

พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ

ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

 สำนักพิมพ์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2568

480.-

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และไฟไนต์วอลุ่ม / ปราโมทย์ เดชะอำไพ

1. พลศาสตร์ของไหล. 2. พลศาสตร์ของไหล -- การประมวลผลข้อมูล. 3. ไฟไนต์เอลิเมนต์.

4. ไฟไนต์วอลุ่ม.

532.05

ISBN (e-book) 978-974-03-4382-0

สพจ. 719/4



สสคุณคำวิชาการ สู่สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น

ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดทำโดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2568

www.cupress.chula.ac.th [CUB6802-003]

โทร. 0-2218-3562-3

บรรณาธิการอำนวยการ : รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลวรรณ พิมพ์พันธุ์

กองบรรณาธิการฝ่ายวิชาการ : ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ปิยนถ บุนนาค

ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ศาสตราจารย์ นายแพทย์ชิษณุ พันธุ์เจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธุ์ เดชะคุปต์

ผู้ประสานงาน : วาสนา ข้าเซ็น

พิสูจน์อักษร : พัทธมนต์ คมมาน

ออกแบบปก : ไกรอัมพร พงษ์ขจร

ออกแบบรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์ขจร

สั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

<http://www.chulabook.com>

โทร. 08-6323-3703-4

customer@cubook.chula.ac.th, info@cubook.chula.ac.th

Apps: CU-eBook Store

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 4

ในการจัดพิมพ์เป็นครั้งที่ 4 นี้ ผู้เขียนได้เพิ่มการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flows) ลงเป็นบทสุดท้ายของหนังสือ ได้อธิบายเนื้อหาเฉพาะที่สำคัญและจำเป็นอย่างกระชับ เป็นการอธิบายขั้นตอนการแก้ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนเพื่อให้เกิดความเข้าใจได้โดยง่าย เมื่อเกิดความเข้าใจอย่างชัดเจนแล้ว ผู้อ่านสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานเพื่อใช้ซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ในภาคอุตสาหกรรมได้อย่างถูกต้อง

ผู้เขียนมีความภาคภูมิใจเป็นอย่างยิ่งที่องค์ความรู้ในหนังสือพลศาสตร์ของไหล ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่มเล่มนี้ ได้ถูกนำไปใช้เป็นหนังสือในชั้นเรียนและในการทำวิทยานิพนธ์สำหรับนิสิตนักศึกษาตามสถาบันต่าง ๆ อีกทั้งหนังสือฉบับภาษาไทยในการพิมพ์ครั้งก่อนหน้านี้ยังได้รับการอ้างอิงจากผู้อ่านและนักวิจัยในระดับสากล ทำให้ผู้เขียนต้องแปลขึ้นเป็นเวอร์ชันภาษาอังกฤษด้วยเช่นกัน

ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอำพร พงษ์จร ที่จัดพิมพ์เนื้อหาซึ่งปรับปรุงขึ้นมาใหม่นี้ได้อย่างมีมาตรฐาน และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์ตำราเล่มนี้ทั้งในเวอร์ชันภาษาไทยและอังกฤษ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
สาขาวิชาวิศวกรรมอากาศยาน
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
เมษายน 2568

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 3

ในการจัดพิมพ์ครั้งที่ 3 นี้ ผู้เขียนได้เพิ่มโปรแกรมคอมพิวเตอร์ลงในภาคผนวก เพื่อช่วยให้การศึกษาวาดรูปของไหลเชิงคำนวณนี้มีความสะดวกมากยิ่งขึ้น นอกจากนั้น ยังได้แทรกการใช้ซอฟต์แวร์ทั้งแมทแล็บ (MATLAB) และแมทมาทิกา (Mathematica) ที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซอฟต์แวร์เหล่านี้บ่งบอกถึงเทคโนโลยีการคำนวณ ซึ่งเริ่มกลายเป็นเครื่องมือที่ใช้กันโดยแพร่หลาย ผู้ที่ได้ศึกษาและเกิดความเข้าใจในคณิตศาสตร์ และการคำนวณ โดยเฉพาะทางด้านการไหลที่ทั้งสองศาสตร์นี้ต่างมีความซับซ้อน จึงนับได้ว่าเป็นผู้มีความรู้ลึกซึ้ง สามารถนำพาเยาวชนไทยไปสู่ทิศทางอันเป็นประโยชน์มากในอนาคต

โปรแกรมคอมพิวเตอร์และไฟล์ต่าง ๆ ที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้สามารถดาวน์โหลด (download) ได้จากเว็บไซต์ (website) ชื่อ

<https://goo.gl/57hUHE>

ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอัมพร พงษ์จร ที่จัดพิมพ์เนื้อหาซึ่งปรับปรุงขึ้นมาใหม่ได้อย่างมีมาตรฐาน และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์ตำราเล่มนี้ ซึ่งมีเนื้อหาในระดับสูงมาอย่างต่อเนื่อง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตุลาคม 2559

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2

ผู้แต่งมีความยินดีเป็นอย่างยิ่งที่เนื้อหาในตำราเล่มนี้ได้ถูกนำไปใช้ในการเรียนการสอน การทำวิทยานิพนธ์ และการอ้างอิงในบทความของงานวิจัยเป็นจำนวนมาก ในการจัดพิมพ์ครั้งที่ 2 นี้ ผู้แต่งได้ปรับปรุงเนื้อหาในตำราให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น โดยเฉพาะได้เพิ่มเนื้อหาของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite volume method) ลงในบทที่ 11 ถึง 13 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเป็นระเบียบวิธีที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายและฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ที่ใช้กันโดยแพร่หลายในปัจจุบัน

ผู้แต่งขอขอบคุณนางสาวไกรอัมพร พงษ์ขจร ที่จัดพิมพ์เนื้อหาในตำราเล่มนี้ขึ้นมาใหม่ให้มีรูปแบบในระดับสากล ขอขอบคุณ ดร.ชัชชานนท์ โพธิคุณ ผู้ตรวจสอบความถูกต้องของการพิมพ์ และ ดร.ยศกร ประทุมวัลย์ ผู้จัดหาผลลัพธ์ของสองตัวอย่างในท้ายบทที่ 12 รวมทั้ง ดร.อิทธิพงษ์ มาลาทิพย์ ที่ออกแบบหน้าปกได้อย่างสวยงาม และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์ตำราเล่มนี้มาอย่างต่อเนื่อง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ธันวาคม 2553

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1

ตำราระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหลเล่มนี้ ได้แต่งเรียบเรียงขึ้นมาจากสาเหตุหลายประการ เริ่มตั้งแต่การได้ทำงานวิจัยทางด้านนี้เพื่อออกแบบยานอวกาศความเร็วสูงข้ามทวีปในขณะดำรงตำแหน่งเป็นวิศวกรอวกาศขององค์การอวกาศนาซาที่ศูนย์วิจัยแลงลีย์ (NASA Langley Research Center) การได้ทำงานวิจัยอย่างต่อเนื่องหลังจากกลับเข้ารับราชการในประเทศไทยโดยรับทุนสนับสนุนจากองค์กรหลายแห่ง การได้สอนวิชานี้ในชั้นเรียนในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมา รวมทั้งการได้นำเสนอผลงานทางด้านนี้ให้แก่นิสิตนักศึกษา วิศวกร และผู้สนใจในประเทศไทยเมื่อได้รับเชิญไปบรรยายในวาระต่าง ๆ กัน ได้พบปะผู้ใฝ่รู้ที่ต้องการทราบถึงพื้นฐานที่มาของผลลัพธ์สภาวะการไหลผ่านรูปทรงซับซ้อนต่าง ๆ กันที่เป็นประโยชน์ต่อการออกแบบงานทางวิศวกรรม ก่อให้เกิดแรงบันดาลใจให้เขียนตำราเล่มนี้ขึ้น โดยมีจุดประสงค์หลักเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาและเพื่อแสดงศักยภาพของการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยการคำนวณ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาพลศาสตร์ของไหลผ่านรูปทรงซับซ้อนใด ๆ จัดได้ว่าค่อนข้างเป็นของใหม่เมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เดียวกันนี้ที่ใช้แก้ปัญหาอื่น ๆ ทั้งนี้ เนื่องจากปัญหาพลศาสตร์ของไหลถูกครอบคลุมด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งส่งผลทำให้ระเบียบวิธีการคำนวณต่อเนื่องมีความซับซ้อนตามไปด้วย อย่างไรก็ตาม หากสามารถหาผลลัพธ์ของสภาวะการไหลได้อย่างถูกต้องแล้ว ผู้วิเคราะห์จะพบกับความหลากหลายของผลลัพธ์ซึ่งจะก่อให้เกิดความเข้าใจ ความประทับใจ และความกระตือรือร้นอยากแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไปอีก

ตำราเล่มนี้ได้แบ่งออกเป็นสี่ส่วนใหญ่ ๆ ส่วนแรกประกอบด้วยบทที่ 1 ถึง 3 ซึ่งอธิบายภาพรวมของการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ รายละเอียดและที่มาของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ และพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รวมทั้งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่จำเป็นต้องนำมาใช้ร่วมกัน ส่วนที่สอง

ประกอบด้วยบทที่ 4 และ 5 ซึ่งอธิบายระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับใช้แก้ปัญหาการไหลเบื้องต้นในหนึ่งและสองมิติ ตามลำดับ ส่วนที่สามประกอบด้วยบทที่ 6 ถึง 9 ซึ่งอธิบายระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัว โดยเริ่มจากการไหลแบบหนืดที่ไม่รวมความเฉื่อย ไปจนถึงการไหลแบบหนืดที่รวมทั้งความเฉื่อยและการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ส่วนที่สี่สุดท้ายประกอบด้วยบทที่ 10 และ 11 ซึ่งอธิบายระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้อันประกอบด้วยคลื่นช็อกและปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นจากการเสียดสีของของไหล ในแต่ละบทได้แสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างละเอียด รวมทั้งตัวอย่างต่าง ๆ ที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจได้โดยชัดเจน อีกทั้งโปรแกรมคอมพิวเตอร์หลายโปรแกรมในภาคผนวกต่าง ๆ ได้ประดิษฐ์ขึ้นให้สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เหล่านี้ โปรแกรมคอมพิวเตอร์นำไปดัดแปลงเพื่อใช้แก้ปัญหาการไหลแบบอื่น ๆ หรือเพื่อใช้เป็นต้นแบบสำหรับการทำวิทยานิพนธ์และงานวิจัยในระดับสูงได้อีกต่อไป

เนื้อหาทั้งหมดในตำราเล่มนี้ นับตั้งแต่ข้อความทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ สมการทางคณิตศาสตร์ และรูปภาพต่าง ๆ ได้จัดทำขึ้นบนเครื่องคอมพิวเตอร์เองทั้งหมด ตัวอย่างส่วนใหญ่เป็นผลจากงานวิจัยและวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาโทและเอกของนิสิตของผู้เขียน ซึ่งผู้เขียนได้รับทุนเมธีวิจัยอาวุโสจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) จึงขอขอบคุณ สกว. เป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้ ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอัมพร พงษ์จร ผู้ช่วยวิจัยของผู้เขียนที่มีความมานะและตั้งใจพิมพ์ตำราเล่มนี้ขึ้นจนเป็นผลสำเร็จ ผู้เขียนขอขอบคุณนิสิตปริญญาโทและเอกของผู้เขียนทั้งที่จบการศึกษาไปแล้วและกำลังศึกษาอยู่ที่ช่วยกันสร้างผลงานและตรวจทานต้นฉบับอย่างละเอียด นับตั้งแต่ อาจารย์ยวีโรจน์ ลิ่มตระการ, อาจารย์นิพนธ์ วรรณโสภากย์, อาจารย์จิตติน ตริพุทธรัตน์, อาจารย์ยวสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม, นายสุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพานิช, นายสุพัฒน์พงศ์ ลิกขาบัณฑิต, นายปัญญา จันทรไพแสง, นายชัยฤทธิ์ อู่พิชิต, นายเสฏฐวรรธ สุจริตภักดีสกุล, นายอาชว์ ปวิณวัฒน์, นายสมบุญ โอตรวรรณะ และนิสิตอีกหลายคนที่ทำให้ความช่วยเหลืออย่างเต็มที่ ผู้เขียนขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้ความสนับสนุนรับจัดพิมพ์จำหน่ายหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ทำให้ผู้เขียนได้มีโอกาสไปศึกษาและสัมผัสกับความรู้ทางวิชาการด้านนี้ ตลอดจนทั้งอาจารย์และหัวหน้าหน่วยงานในขณะที่ยังเขียนดำรงตำแหน่งเป็นข้าราชการประจำอยู่ในองค์การอวกาศนาซา ที่ได้ให้ความรู้และเปิดโอกาสให้ผู้เขียนได้ทำงานวิจัย

ทางการคำนวณนี้มาโดยตลอด และท้ายสุดขอขอบคุณ ยูพา เศรษฐอำไพ ภรรยา ผู้เข้าใจถึง
ความตั้งใจของผู้เขียน โดยให้การสนับสนุนและกำลังใจ รวมทั้งเปิดโอกาสให้ผู้เขียนได้อุทิศ
เวลาให้กับตำราเล่มนี้ในวันเสาร์-อาทิตย์ได้อย่างเต็มที่ ตลอดช่วงระยะเวลาปีกว่าที่ผ่านมา

ปราโมทย์ เศรษฐอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
เมษายน 2545

สารบัญ

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 4

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 3

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 2

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 1

ส่วนที่ I	ระเบียบวิธีเชิงคํานวณและสมการพื้นฐานของการไหล	1
บทที่ 1	การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของไหลเชิงคํานวณ	3
1.1	บทนํ้า	3
1.2	กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	10
1.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	11
1.2.2	เงื่อนไขขอบเขต	13
1.2.3	ลักษณะรูปร่าง	15
1.3	องค์ประกอบความรู้ที่จำเป็น	21
1.4	บทสรุป	28
บทที่ 2	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล	31
2.1	บทนํ้า	31
2.2	ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์	32
2.3	สมการเชิงอนุพันธ์มวล	37
2.4	สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม	39
2.5	สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน	44
2.6	ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์	50

2.7	เงื่อนไขขอบเขต	54
2.8	บทสรุป	56
	แบบฝึกหัด	57
ส่วนที่ II	พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	59
บทที่ 3	ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	61
3.1	บทนำ	61
3.2	ขั้นตอนโดยทั่วไป	62
3.3	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของการไหลในท่อ	67
3.4	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์	70
3.4.1	เอลิเมนต์หนึ่งมิติ	70
3.4.2	เอลิเมนต์สองมิติ	73
3.4.3	เอลิเมนต์สามมิติ	80
3.5	ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง	83
3.6	การอินทิเกรตเชิงตัวเลข	86
3.7	การประกอบเอลิเมนต์เข้าด้วยกัน	93
3.7.1	ความหมายทางกายภาพ	93
3.7.2	วิธีการรวมสมการไฟไนต์เอลิเมนต์	94
3.8	การแก้ระบบสมการรวม	96
3.8.1	ระบบสมการเชิงเส้น	97
3.8.2	ระบบสมการไม่เชิงเส้น	100
3.9	บทสรุป	104
	แบบฝึกหัด	105

บทที่ 4	ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาหนึ่งมิติ	109
4.1	บทนำ	109
4.2	ปัญหาการแพร่กระจายความร้อน	111
4.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	112
4.2.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	113
4.2.3	ตัวอย่าง	119
4.3	ปัญหาการพาและการแพร่กระจายความร้อน	130
4.3.1	สมการเชิงอนุพันธ์	130
4.3.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	131
4.3.3	ตัวอย่าง	133
4.4	การสั่นของผลึก	139
4.4.1	ที่มาของการสั่นของผลึก	139
4.4.2	การแก้ไขการสั่นของผลึก	142
4.4.3	ตัวอย่าง	145
4.5	สมการเบอร์เกอร์	149
4.5.1	สมการเชิงอนุพันธ์	149
4.5.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	150
4.5.3	การประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน	153
4.5.4	ตัวอย่าง	158
4.6	บทสรุป	160
	แบบฝึกหัด	161
บทที่ 5	ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาสองมิติ	167
5.1	บทนำ	167
5.2	ปัญหาการแพร่กระจายความร้อน	168
5.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	168
5.2.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	170

5.2.3 การประยุกต์สู่ปัญหาอื่น ๆ	184
5.3 ปัญหาการพาและการแพร่กระจายความร้อน	193
5.3.1 สมการเชิงอนุพันธ์	194
5.3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	195
5.3.3 ตัวอย่าง	197
5.4 การไหลแบบสักซ์	201
5.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์	202
5.4.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	207
5.4.3 ตัวอย่าง	210
5.5 บทสรุป	214
แบบฝึกหัด	216
บทที่ 6 การไหลแบบหนืดโดยไม่รวมพจน์การพา	221
6.1 บทนำ	221
6.2 สมการเชิงอนุพันธ์	222
6.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	226
6.4 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์	229
6.4.1 การประดิษฐ์ในรูปแบบเมทริกซ์	231
6.4.2 การประดิษฐ์ในรูปแบบเทนเซอร์	235
6.5 ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์	237
6.5.1 ขั้นตอนการคำนวณ	238
6.5.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์	240
6.6 ตัวอย่าง	242
6.6.1 การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน	242
6.6.2 การไหลในท่อ	245
6.6.3 การไหลที่เกิดการเปลี่ยนแปลงตามความยาวท่อ	249

6.6.4 การอัครีคโลหะ	253
6.7 บทสรุป	260
แบบฝึกหัด	261
บทที่ 7 การไหลแบบหนืดโดยรวมพจน์การพา	267
7.1 บทนำ	267
7.2 สมการเชิงอนุพันธ์	269
7.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	272
7.4 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์	277
7.5 การประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน	284
7.6 ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์	287
7.6.1 ขั้นตอนการคำนวณ	287
7.6.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์	289
7.7 ตัวอย่าง	292
7.7.1 การไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม	292
7.7.2 การไหลในท่อโรงไฟฟ้า	297
7.7.3 การไหลข้ามท่อทรงกระบอก	299
7.7.4 การไหลในท่อลื่นหัวใจ	300
7.7.5 การไหลผ่านลำตัวรถ	301
7.8 บทสรุป	305
แบบฝึกหัด	307
บทที่ 8 การไหลแบบหนืดโดยรวมพจน์การพาและผลจากอุณหภูมิ	313
8.1 บทนำ	313
8.2 สมการเชิงอนุพันธ์	315
8.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	321

8.4	ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์	326
8.5	การประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน	331
8.6	ตัวอย่าง	335
8.6.1	การไหลเนื่องจากการพาความร้อนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส	335
8.6.2	การไหลเนื่องจากการพาความร้อนระหว่างผิวท่อกลม	338
8.6.3	การไหลเนื่องจากการพาความร้อนระหว่างผิวท่อกลม หลายท่อ	340
8.6.4	การไหลผ่านกล่องสี่เหลี่ยมอุณหภูมิสูงกึ่งกลาง	343
8.6.5	การไหลในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน	347
8.7	บทสรุป	349
	แบบฝึกหัด	350
บทที่ 9	การไหลแบบอัดตัวได้	357
9.1	บทนำ	357
9.2	สมการเชิงอนุพันธ์	359
9.3	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	362
9.4	ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์	371
9.4.1	เอลิเมนต์สามเหลี่ยม	371
9.4.2	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า	374
9.5	ตัวอย่าง	379
9.5.1	การไหลแบบไม่หนืดผ่านพื้นเอียง	379
9.5.2	การไหลแบบไม่หนืดผ่านผิวโค้ง	381
9.5.3	การสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ	384
9.5.4	การไหลแบบหนืดผ่านแผ่นเรียบปลายแหลม	386
9.6	บทสรุป	391
	แบบฝึกหัด	393

ส่วนที่ III	พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม	399
บทที่ 10	ไฟไนต์วอลุ่มสำหรับปัญหาหนึ่งมิติ	401
10.1	บทนำ	401
10.2	ปัญหาการแพร่กระจายความร้อน	402
10.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	403
10.2.2	สมการไฟไนต์วอลุ่ม	404
10.2.3	ตัวอย่าง	407
10.3	ปัญหาการพาและการแพร่กระจายความร้อน	411
10.3.1	สมการเชิงอนุพันธ์	411
10.3.2	สมการไฟไนต์วอลุ่ม	413
10.3.3	ตัวอย่าง	415
10.4	วิธีอัปวินด์	419
10.4.1	แนวคิด	419
10.4.2	สมการไฟไนต์วอลุ่ม	420
10.4.3	ตัวอย่าง	422
10.5	บทสรุป	428
	แบบฝึกหัด	429
บทที่ 11	ไฟไนต์วอลุ่มสำหรับปัญหาสองมิติ	435
11.1	บทนำ	435
11.2	ปัญหาการแพร่กระจายความร้อน	436
11.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	436
11.2.2	สมการไฟไนต์วอลุ่ม	438
11.2.3	ตัวอย่าง	442
11.3	ปัญหาการพาและการแพร่กระจายความร้อน	450
11.3.1	สมการเชิงอนุพันธ์	450

11.3.2	สมการไฟในตัวลุ่ม	451
11.3.3	วิธีผลต่างแบบตรงกลาง	452
11.3.4	วิธีอัปวินด์	453
11.4	ปัญหาการไหลแบบหนึ่งโดยรวมพจน์การพา	454
11.4.1	สมการเชิงอนุพันธ์	455
11.4.2	กริดเชิง	458
11.4.3	สมการไฟในตัวลุ่ม	462
11.4.4	ตัวอย่าง	469
11.5	บทสรุป	477
	แบบฝึกหัด	479
บทที่ 12	ไฟในตัวลุ่มสำหรับการไหลแบบอัดตัวได้	491
12.1	บทนำ	491
12.2	สมการเชิงอนุพันธ์	493
12.3	การไหลแบบไม่รวมความหนืด	496
12.4	การไหลแบบรวมความหนืด	502
12.5	โปรแกรมคอมพิวเตอร์	506
12.5.1	ขั้นตอนการคำนวณ	507
12.5.2	โปรแกรมคอมพิวเตอร์	508
12.6	การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	511
12.6.1	แนวความคิดพื้นฐาน	512
12.6.2	ขนาดและการวางตัวของเอลิเมนต์	513
12.6.3	การสร้างเอลิเมนต์ในโดเมน	516
12.7	ตัวอย่าง	517
12.7.1	การสะท้อนของคลื่นช็อก	518
12.7.2	การขยายตัวจากการไหลความเร็วสูง	520

12.7.3	การไหลผ่านท่อทรงกระบอก	523
12.7.4	การสะท้อนของคลื่นช็อกในช่องแคบ	525
12.7.5	การไหลแบบหนีหน้าชีพनावุธ	527
12.8	บทสรุป	530
	แบบฝึกหัด	532

ส่วนที่ IV การไหลแบบปั่นป่วน **538**

บทที่ 13 การไหลแบบปั่นป่วน **541**

13.1	บทนำ	541
13.2	ลักษณะและความสำคัญของการไหลแบบปั่นป่วน	542
13.3	สมการพื้นฐาน	545
13.3.1	สมการนาเวียร์-สโตกส์	545
13.3.2	การแยกเชิงเรย์โนลด์และแนวคิดของการเฉื่อย	547
13.3.3	สมการนาเวียร์-สโตกส์แบบเฉื่อยเชิงเรย์โนลด์	549
13.4	วิธีการแก้ปัญหการไหลแบบปั่นป่วน	552
13.4.1	การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง	552
13.4.2	การจำลองเฉพาะการหมุนวนที่มีขนาดใหญ่	554
13.4.3	การใช้โมเดลนาเวียร์-สโตกส์แบบเฉื่อยเชิงเรย์โนลด์	555
13.5	การปิดปัญหาของการไหลแบบปั่นป่วน	557
13.5.1	แนวคิดโมเดลเพื่อปิดปัญหา	558
13.5.2	โมเดลการปิดสมการ	558
13.6	ฟังก์ชันผนัง	561
13.6.1	การปั่นป่วนของของไหลในชั้นขอบเขต	562
13.6.2	ฟังก์ชันผนังสำหรับชั้นขอบเขต	564

13.7	วิธีเชิงตัวเลขเพื่อจำลองการไหลแบบปั่นป่วน	567
13.7.1	วิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้	568
13.7.2	เสถียรภาพและการลู่เข้าของผลลัพธ์	569
13.8	บทสรุป	571
	แบบฝึกหัด	573
ภาคผนวก ก	โปรแกรมย่อยเพื่อใช้แก้ระบบสมการรวม	577
ก.1	โปรแกรม Gauss โดยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์	578
ก.2	โปรแกรม LUdecom โดยระเบียบวิธีการกำจัดแบบแอลยู	579
ภาคผนวก ข	ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Stokes	
	สำหรับการไหลแบบหนืดโดยไม่รวมพจน์การพา	581
ข.1	รายละเอียดของโปรแกรม	582
ข.2	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม	587
ภาคผนวก ค	ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Navier	
	สำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมพจน์การพา	593
ค.1	รายละเอียดของโปรแกรม	594
ค.2	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม	603
ภาคผนวก ง	ไฟไนต์วอลูมโปรแกรมคอมพิวเตอร์	
	สำหรับปัญหาการแพร่กระจายและการพา	611
ง.1	ตัวอย่างการแพร่กระจายความร้อนในหนึ่งมิติ	611
ง.2	ตัวอย่างการแพร่กระจายพร้อมการพาความร้อนในหนึ่งมิติ	614
ง.3	ตัวอย่างการแพร่กระจายพร้อมการพาความร้อนด้วยวิธีอัปวินด์	618
ง.4	ตัวอย่างการแพร่กระจายความร้อนในสองมิติ	620

ภาคผนวก จ	ไฟในตู้วอลุ่มโปรแกรมคอมพิวเตอร์ SIMPLE	
	โดยรวมพจน์การพา	627
จ.1	แนวคิดของการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์	628
จ.2	รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์	633
จ.3	ตัวอย่างของผลลัพธ์	638
ภาคผนวก ฉ	ไฟในตู้วอลุ่มโปรแกรมคอมพิวเตอร์ hiflow	
	สำหรับการไหลแบบไม่หนืดแต่อัดตัวได้	641
ฉ.1	รายละเอียดของโปรแกรม	642
ฉ.2	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม	656
	บรรณานุกรม	665
	ดัชนี	673

ส่วนที่ I

ระเบียบวิธีเชิงคำนวณ

และสมการพื้นฐานของการไหล

บทที่ 1

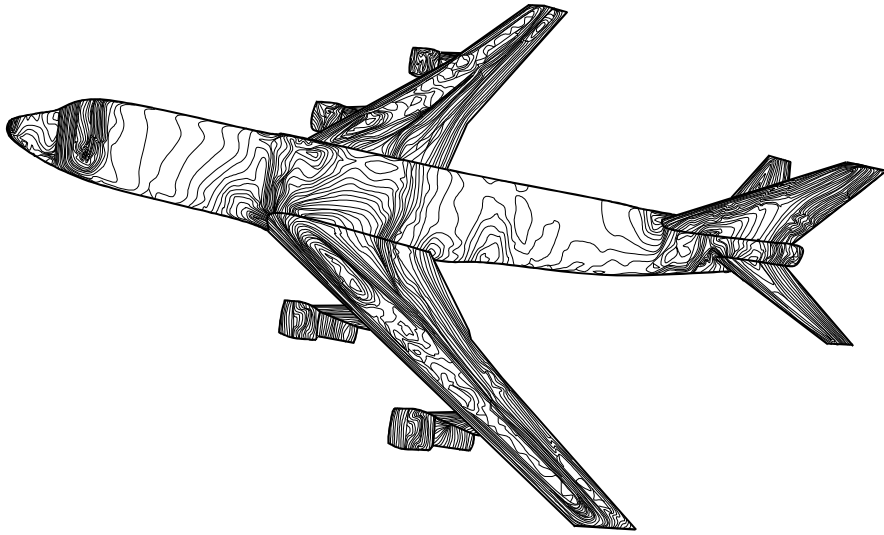
การแก้ปัญหากลศาสตร์ของไหล เชิงคำนวณ

1.1 บทนำ

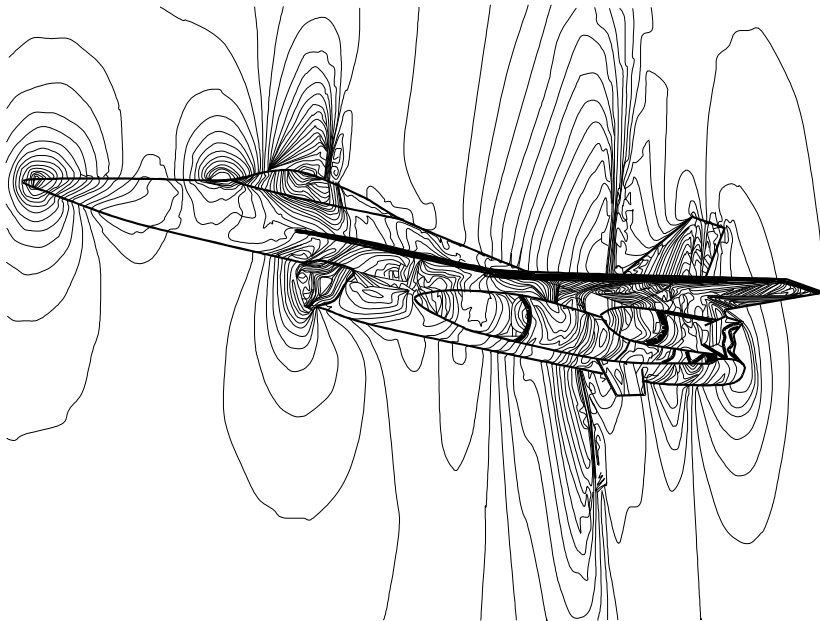
การวิเคราะห์ปัญหาการไหลเพื่อหาความเร็ว ความดัน อุณหภูมิ ฯลฯ สำหรับใช้ในการออกแบบงานทางวิศวกรรมหรือการศึกษางานทางวิทยาศาสตร์ด้วยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics ซึ่งเรียกย่อๆ โดยทั่วไปว่า CFD) ได้เข้ามามีบทบาทและก่อให้เกิดประโยชน์เป็นอย่างมากในปัจจุบัน พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณผสมผสานกับความรู้ทางด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) โดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ (computers) เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสมดุลของการไหลนั้น ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่สามารถแสดงได้ด้วยกราฟิกสี (color graphics) ทำให้นักวิเคราะห์สามารถเข้าใจในปรากฏการณ์ของการไหลได้เป็นอย่างดี เป็นผลให้สามารถปรับปรุง คัดแปลงรูปแบบของการออกแบบ จนได้ผลลัพธ์ที่น่าพอใจบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ก่อนนำไปสร้างจริงหรือทำการทดลองอีกต่อหนึ่งเพื่อให้เกิดความมั่นใจในการออกแบบนั้น

กระบวนการออกแบบด้วยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณดังกล่าว ช่วยลดค่าใช้จ่ายและเวลาลงไปเป็นอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการทดลองแต่เพียงอย่างเดียวที่เคยทำกันมาในอดีต ยกตัวอย่างเช่น ในการออกแบบเครื่องบินโบอิงรุ่นแรก ๆ ที่ใช้บินในเชิงพาณิชย์ข้ามทวีป วิศวกรต้องสร้างรูปแบบเครื่องบินที่แท้จริงขึ้นด้วยไม้ แล้วจึงนำไปทดลองในอุโมงค์ลมเพื่อตรวจสอบการไหลผ่านส่วนต่าง ๆ ของเครื่องบิน รวมทั้งแรงยก (lift) ที่ปีกและบริเวณใต้ท้องเครื่องบิน กระบวนการดังกล่าวเสียค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากกำลังคนและอุปกรณ์ในการทดลองเป็นจำนวนมาก รวมทั้งระยะเวลาจากการเริ่มสร้างและทำการทดลองนั้นนานนับเป็นปี ๆ นอกจากนั้นหากวิศวกรพบจากการทดลองว่า การออกแบบส่วนนั้นไม่เหมาะสม เช่น ปีกกว้างหรือยาวน้อยไป การแก้ไขนั้นทำได้ลำบาก จำเป็นต้องใช้เวลาในการคิดแปลงและทดลองมากขึ้นไปอีก ซึ่งส่วนใหญ่ได้นำไปสู่การปรับปรุงที่ดีขึ้น แต่ในบางกรณีก็ไม่สามารถก่อให้เกิดการปรับปรุงดังที่คาดหวังไว้

เวลาที่ใช้ในการออกแบบและค่าใช้จ่ายสำหรับการทดลองสามารถลดลงไปได้เป็นอย่างมากด้วยการใช้พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ วิศวกรที่มีความรู้และประสบการณ์ทางด้านนี้ในปัจจุบัน สามารถสร้างรูปแบบจำลองของเครื่องบินโบอิง และทำการคำนวณหาสถานะการไหลได้โดยสะดวกดังเช่นแสดงในรูป 1.1 ข้อดีที่เกิดขึ้นก็คือหากต้องการแก้ไขขนาดของปีกหรือส่วนอื่นใด ๆ ก็สามารถทำได้ในเวลาอันสั้น รวมทั้งหากต้องการทราบรายละเอียดของสถานะการไหล (detailed flow field) ในบริเวณใดบริเวณหนึ่ง ก็สามารถทำได้อย่างรวดเร็วอีกเช่นกัน ซึ่งในกรณีหลังนี้ อาจทำได้ยากมากหรือใช้เวลาดัดแปลงแก้ไขนาน หากยังใช้การทดลอง ยิ่งไปกว่านั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประคิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์สถานะของการไหลรอบเครื่องบินโบอิงนี้ ยังสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาของการไหลผ่านรูปทรงที่มีลักษณะซับซ้อนแบบอื่น ๆ อีกได้เช่นกัน เช่น การคำนวณสถานะของอากาศผ่านเครื่องบินขับไล่ ดังแสดงในรูป 1.2 เป็นต้น รูปดังกล่าวแสดงให้เห็นประโยชน์ของพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณโดยเด่นชัด ซึ่งสามารถบ่งบอกถึงรายละเอียดของความดันที่เกิดขึ้นในบริเวณต่าง ๆ ของเครื่องบิน นับตั้งแต่ที่บริเวณส่วนหน้า บริเวณปีก และบริเวณรอบฟิวเจอริบได้ปีก เป็นต้น

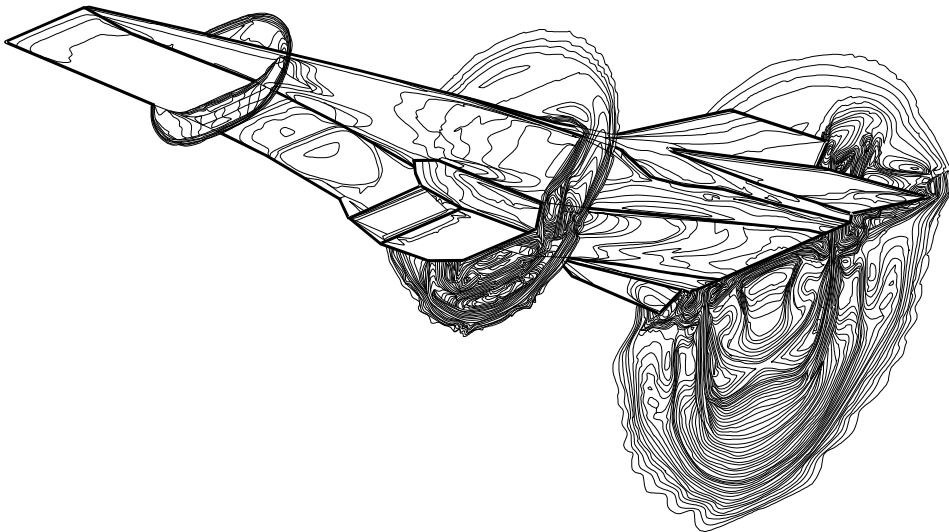


รูป 1.1 เส้นชั้นแสดงลักษณะการกระจายของความดันของอากาศบนผิวของเครื่องบินโบอิง



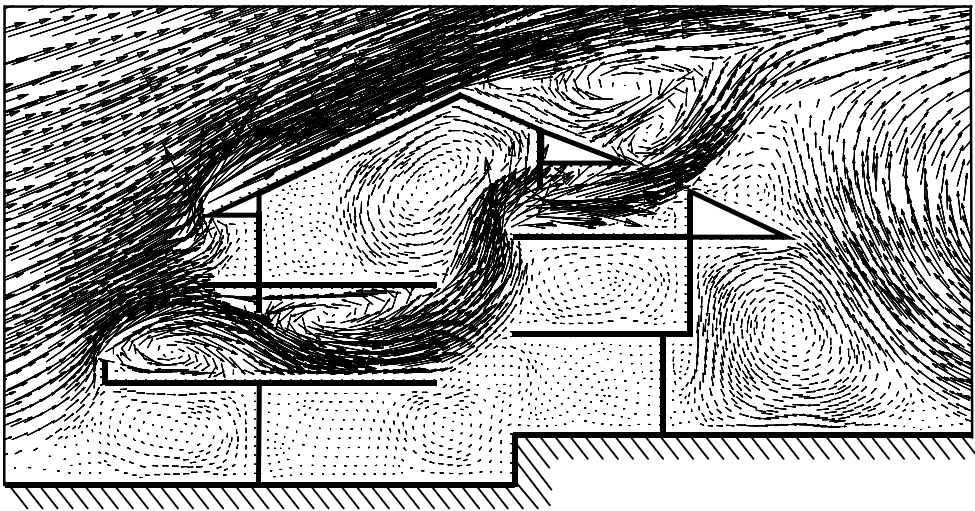
รูป 1.2 เส้นชั้นแสดงลักษณะการกระจายของความดันของอากาศบนผิวและบริเวณรอบเครื่องบินขับไล่

การออกแบบปัญหาสมัยใหม่หลายปัญหาในปัจจุบันยังไม่สามารถทำการทดลองได้ หรือหากทำได้ก็จำเป็นต้องใช้ค่าใช้จ่ายสูงมาก ยกตัวอย่างเช่น การออกแบบยานอวกาศความเร็วสูงข้ามทวีป (aerospace plane) ดังแสดงในรูป 1.3 ให้สามารถบินครึ่งรอบโลกได้ ภายในเวลาเพียง 2 ชั่วโมง โดยบินด้วยความเร็วสูงสุดถึง 25 เท่าของความเร็วเสียง ที่ความเร็วสูงมากเช่นนี้ ปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นจากการเสียดสีกับบรรยากาศนั้นมีค่าสูงสุดถึง 70,000 Btu/ft²-sec ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับปริมาณความร้อนที่ตกกระทบตัวเราในขณะที่ยืนตากแดด ในวันที่มีแดดจัดนั้นมีค่าเพียง 0.12 Btu/ft²-sec เท่านั้น ปริมาณความร้อนจากการเสียดสีกับบรรยากาศที่สูงมากเช่นนี้ สามารถหลอมละลายผิวยานภายนอกได้ การทดลองบนพื้นโลกทำได้เนื่องได้นานที่สุดเพียง 2 นาที ด้วยความเร็วสูงสุดเพียง 8 เท่าของความเร็วเสียงในอุโมงค์ลมของอาคารองค์การอวกาศนาซา (NASA) ที่ผู้เขียนเคยนั่งทำงานอยู่ ในการทดลองแต่ละครั้ง จำเป็นต้องใช้พลังงานมหาศาลเพื่อขับเคลื่อนแก๊สร้อนให้เกิดความเร็วสูงผ่านชิ้นส่วนของยานที่ต้องการทำการทดลอง ทำให้ทั้งอาคารเกิดการสั่นสะเทือนเป็นอย่างมากจนต้องหยุดทำงานอื่น ๆ ในช่วงเวลาของการทดลอง 2 นาทีนั้น รวมทั้งเสียค่าใช้จ่ายค่าอุปกรณ์และกำลังคนเฉลี่ยเกือบหนึ่งหมื่นเหรียญดอลลาร์สหรัฐสำหรับการทดลองในแต่ละครั้ง

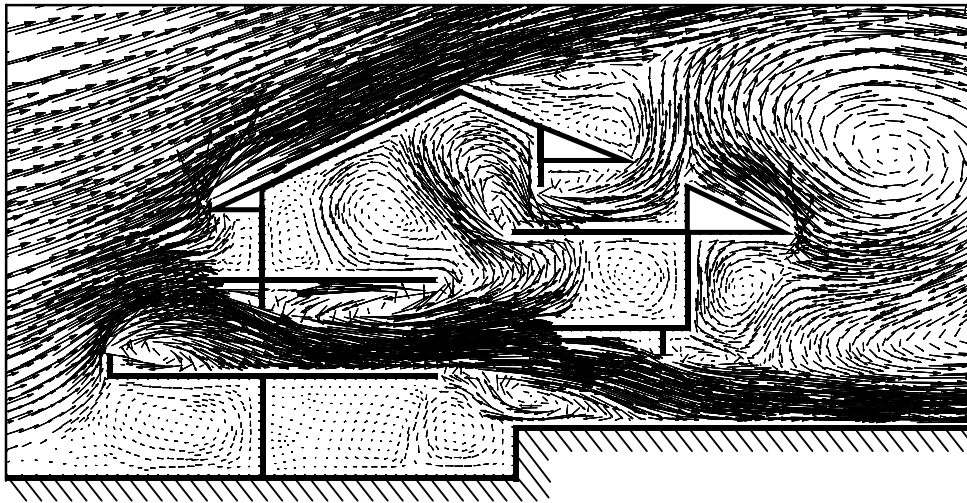


รูป 1.3 เส้นชั้นแสดงลักษณะการกระจายของความดันของอากาศรอบยานอวกาศความเร็วสูงข้ามทวีป

นอกเหนือจากปัญหาที่เห็นได้โดยชัดเจนดังตัวอย่างอธิบายมาข้างต้นนี้แล้ว พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณได้ถูกประยุกต์เข้าแก้ปัญหาอื่น ๆ ที่ช่วยยกระดับคุณภาพความเป็นอยู่ในปัจจุบัน เช่น การศึกษาประสิทธิภาพของการระบายอากาศภายในอาคารประหยัดพลังงาน ซึ่งได้ทำการทดลองภายใต้สภาวะของการเปิดหน้าต่างเพื่อระบายอากาศในลักษณะต่าง ๆ กัน รูป 1.4 แสดงสภาวะของอากาศที่ได้มาจากการคำนวณ โดยอากาศไหลมาปะทะทางด้านซ้ายของตัวอาคาร ส่วนหนึ่งของอากาศนั้นไหลผ่านข้ามหลังคา ในขณะที่อีกส่วนหนึ่งไหลผ่านเข้าประตูระเบียงด้านซ้ายของชั้นสองซึ่งเปิดไว้ ผ่านภายในอาคารแล้วจึงไหลออกขึ้นเพดานผ่านหน้าต่างที่เปิดไว้ทางด้านขวาของหลังคา ในขณะที่การไหลของอากาศในห้องอื่น ๆ ของตัวอาคารนั้นค่อนข้างหยุดนิ่ง ส่วนรูป 1.5 แสดงการเปิดประตูหน้าต่างของอาคารเช่นเดียวกับในกรณีแรกแต่ได้เปิดประตูชั้นล่างทางด้านขวาเพิ่มขึ้นอีกบานหนึ่งเพื่อให้การถ่ายเทอากาศดีขึ้น ผลลัพธ์ของสภาวะการไหลในรูป 1.4 และ 1.5 นี้ ได้มาโดยใช้พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ ซึ่งสามารถทำการคำนวณได้ภายในระยะเวลาอันสั้นเพื่อหาสภาวะของการไหลจากการปิดเปิดหน้าต่างแบบต่าง ๆ กัน

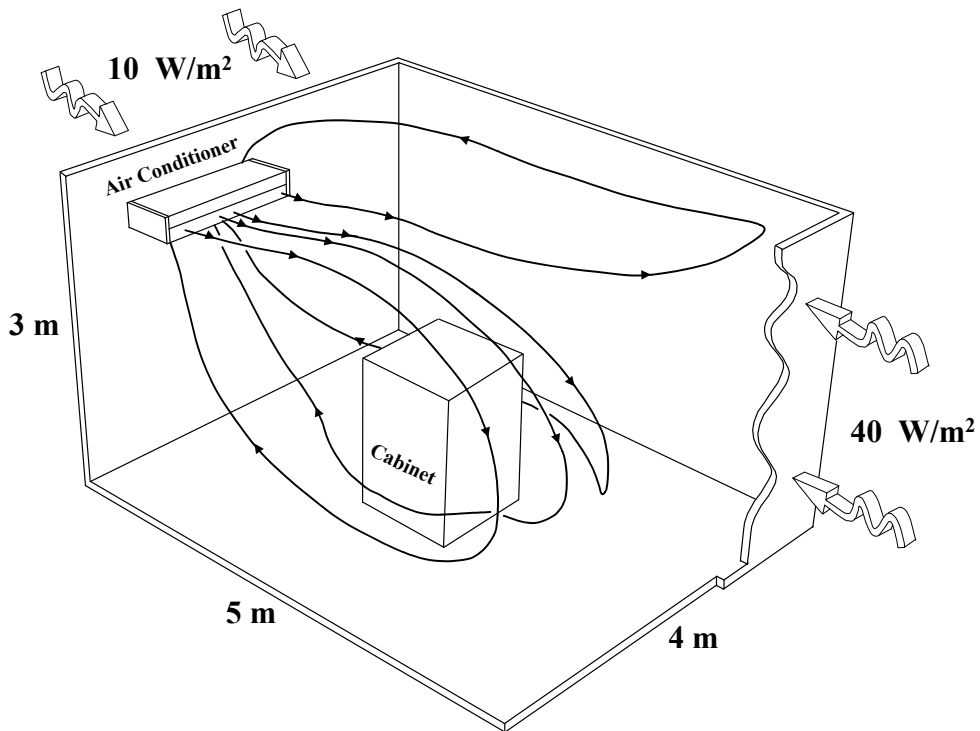


รูป 1.4 เวกเตอร์แสดงขนาดและทิศทางความเร็วของอากาศถ่ายเทผ่านบ้าน
เมื่อเปิดหน้าต่างชั้นบนบานเดียว



รูป 1.5 เวกเตอร์แสดงขนาดและทิศทางความเร็วของอากาศถ่ายเทผ่านบ้าน
เมื่อเปิดหน้าต่างชั้นบนและชั้นล่างพร้อมกัน

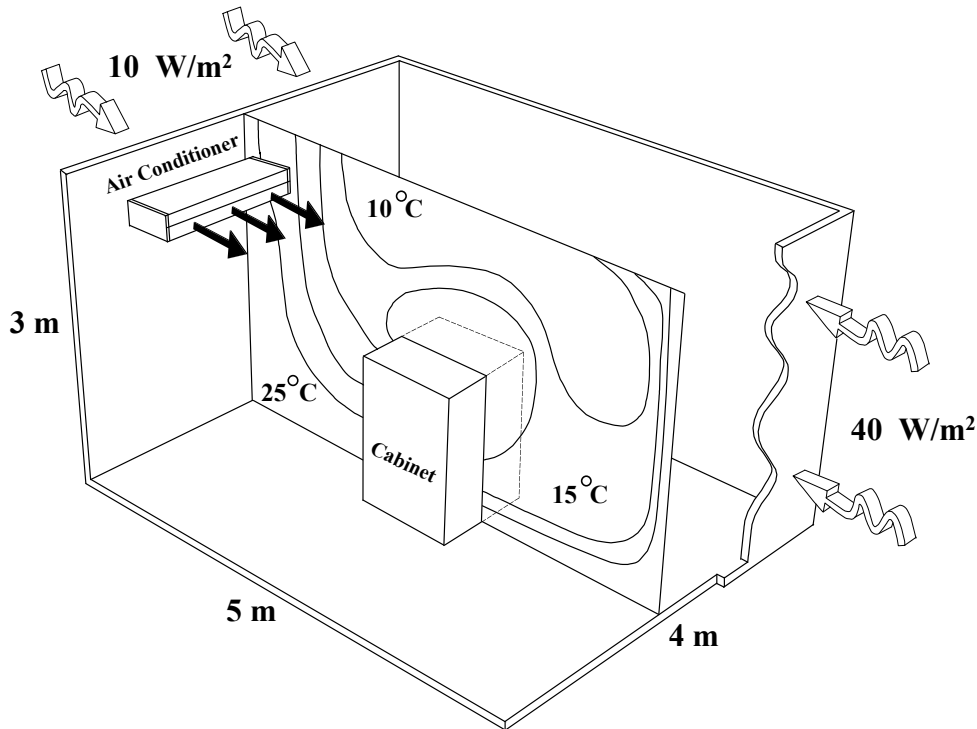
พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณได้นำมาประยุกต์เข้ากับงานทางวิศวกรรมเป็นจำนวนมาก ทั้งในระดับวิจัยและพัฒนาเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของงานในทางปฏิบัติ เช่น การศึกษาสภาวะการไหลผ่านใบพัดในปั๊มน้ำเพื่อปรับปรุงรูปทรงของใบพัดก่อให้เกิดกำลังส่งสูงสุด การศึกษาการกระจายของน้ำมันเพื่อการจุดระเบิดที่สม่ำเสมออย่างสมบูรณ์ในห้องเสื้อสูบ การศึกษาออกแบบรูปร่างของท้องเรือเพื่อลดความต้านทานจากน้ำในขณะแล่น การศึกษาการแพร่กระจายของน้ำเสียขณะไหลในแม่น้ำ การศึกษาการระบายอากาศผ่านไมโครชิปในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เพื่อควบคุมไม่ให้เกิดอุณหภูมิที่สูงมากเกินไป การทำนายสภาวะอากาศของกรมอุตุนิยมวิทยาบนพื้นที่กว้างหลายหมื่นตารางกิโลเมตร หรือการทำนายสภาวะอากาศเพียงแคในห้องปรับอากาศเล็ก ๆ ในที่ทำงานเป็นต้น รูป 1.6 แสดงลักษณะการไหลของอากาศที่ได้จากการคำนวณในห้องปรับอากาศยาว 5 เมตร กว้าง 4 เมตร และสูง 3 เมตร มีผู้สูง 1.5 เมตร วางขวางอยู่กลางห้อง ผนังของห้องได้รับปริมาณความร้อนที่ต่างกัน โดยใต้เพดานมุมหนึ่งของห้องได้ติดตั้งเครื่องปรับอากาศซึ่งจ่ายอากาศที่อุณหภูมิ 10°C



รูป 1.6 เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค (particle tracing) ในห้องปรับอากาศที่มีตู้วางวางอยู่กลางห้อง

รูป 1.7 แสดงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิผ่านพื้นที่หน้าตัดกลางห้อง ผลลัพธ์สภาวะของการไหลดังแสดงในรูปเหล่านี้สามารถทำการคำนวณได้โดยง่ายด้วยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ นอกจากนี้ พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณยังได้นำไปประยุกต์เข้ากับงานทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์อื่น ๆ ในอีกหลายแขนงที่ไม่สามารถทำการทดลองได้หรืออาจเป็นอันตรายหากทำการทดลอง เช่น การจำลองการไหลในเส้นเลือดและหัวใจ หรือการไหลผสมกันระหว่างสารเคมีซึ่งมีอันตราย เป็นต้น

จากตัวอย่างของปัญหาต่าง ๆ ที่ได้อธิบายมาข้างต้นนี้ แสดงให้เห็นว่า พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณก่อให้เกิดประโยชน์ในการวิเคราะห์งานต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการไหลเป็นจำนวนมาก นับตั้งแต่ช่วยลดเวลาและค่าใช้จ่ายเป็นอย่างมากในการออกแบบ ช่วยในการวิเคราะห์และลดขั้นตอนที่จำเป็นต้องใช้ในการทดลองหรือในกรณีที่ไม่สามารถทำการทดลองได้ รวมทั้งสามารถวิเคราะห์หลังไปในรายละเอียดของการไหลในบางบริเวณเพื่อหาผลลัพธ์และ



รูป 1.7 การกระจายของอุณหภูมิในห้องปรับอากาศที่มีตู้วางขวางกลางห้อง

ข้อมูลที่ต้องการความสมบูรณ์ และที่สำคัญที่สุด ตัวอย่างต่าง ๆ นี้ ยังแสดงให้เห็นว่าพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ ยังเปิดโอกาสเพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอื่น ๆ ได้อีกเป็นจำนวนมากทั้งทางด้านการประยุกต์ใช้หรือทางด้านการวิจัยและพัฒนา

1.2 กระบวนการแก้ปัญหา

การวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ทางวิศวกรรม ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) เช่น การหาค่าความเค้นในโครงสร้างและชิ้นงานกลใด ๆ หรือปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อน เช่น การหาการกระจายของอุณหภูมิในครีบบระบายความร้อนของหม้อแปลงและมอเตอร์ไฟฟ้า หรือปัญหาทางด้านการไหล เช่น การไหลของอากาศในห้องปรับอากาศ หรือปัญหาในศาสตร์อื่น ๆ ก็ตาม ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการวิเคราะห์ปัญหา

เหล่านี้ขึ้นอยู่กับปัจจัยหรือองค์ประกอบใหญ่ ๆ 3 องค์ประกอบ กล่าวคือ (ก) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ที่อธิบายความเป็นจริงของปัญหานั้น (ข) เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) สำหรับปัญหาที่ทำการศึกษานั้น และ (ค) ลักษณะรูปร่าง (geometry) ของปัญหานั้น ทั้ง 3 องค์ประกอบนี้ หากองค์ประกอบใด องค์ประกอบหนึ่งเปลี่ยนแปลงไป ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก็จะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ความเข้าใจโดยลึกซึ้งในองค์ประกอบทั้งสามนี้มีความจำเป็นอย่างยิ่งต่อการวิเคราะห์ปัญหาด้วยการคำนวณ ความสำคัญในแต่ละองค์ประกอบที่จำเป็นต้องทำความเข้าใจสามารถอธิบายในภาพรวมได้ ดังต่อไปนี้

1.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ปัญหาในงานวิศวกรรมต่างมีความลึกซึ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แตกต่างกันออกไป สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจัดได้ว่าเป็นหัวใจซึ่งแสดงถึงความเป็นจริงที่เกิดขึ้นในปัญหานั้น ๆ ยกตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์ปัญหากลศาสตร์ของแข็งนั้นจำเป็นต้องเริ่มจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อธิบายความสมดุลของแรงใน 3 ทิศทางซึ่งถูกต้องอยู่เสมอ ณ ตำแหน่งใด ๆ ในปัญหานั้น การวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนจำเป็นต้องเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อธิบายความสมดุลของการถ่ายเทความร้อน หรือการวิเคราะห์ปัญหาการไหลนั้นจำเป็นต้องเริ่มจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แสดงถึงการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน เป็นต้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ ล้วนประกอบด้วยพจน์ต่าง ๆ ที่อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ (derivative terms) ซึ่งใช้สัญลักษณ์คล้าย “เลขหกกลับทาง” ยกตัวอย่างเช่น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลแบบหนืดภายใต้สภาวะอยู่ตัวในสองมิติ โดยไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ (รายละเอียดและความหมายในแต่ละพจน์จะนำเสนอในบทถัดไป) ประกอบด้วย

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

เป็นต้น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 3 สมการนี้ ประกอบด้วยตัวแปรตาม (dependent variable) ที่ไม่รู้ค่า 3 ตัวซึ่งแปรผันไปตามตัวแปรต้น (independent variable) x และ y ตัวแปรตามทั้ง 3 ตัวนี้ประกอบด้วย ความเร็ว u ในแนวแกน x ; ความเร็ว v ในแนวแกน y ; และความดัน p ที่ต่างเป็นฟังก์ชันของทั้ง x และ y ; ส่วน ρ และ μ คือค่าความหนาแน่น (density) และค่าความหนืด (viscosity) ของของไหลนั้น ตามลำดับ

การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังแสดงข้างต้นนี้สำหรับปัญหาการไหลผ่านรูปร่างซับซ้อนโดยทั่วไปเพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) นั้น อาจกล่าวได้ว่าเป็นไปไม่ได้เลย ทั้งนี้สืบเนื่องจากเหตุผลหลัก 2 ประการ ประการแรกคือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ต่างขึ้นอยู่แก่กันและกัน (coupled equations) ซึ่งอาจอธิบายได้อีกนัยหนึ่งว่าผลลัพธ์ เช่น ความเร็ว u และ v ที่หาได้จำเป็นต้องสอดคล้อง (satisfy) ถูกต้องในทุกสมการ การเรียนวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงในปัจจุบัน ส่วนใหญ่มักมุ่งความสนใจไปยังการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพียงสมการเดียว เพราะเพียงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพียงสมการเดียวสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ง่าย ๆ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก็มักอยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อนมากอยู่แล้ว การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ประกอบด้วยหลายสมการจึงแทบเป็นไปไม่ได้ ความยากประการที่สองคือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (1.2) และ (1.3) นี้ต่างเป็นสมการย่อยแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) กล่าวคือ ตัวแปรตาม u และ v ที่ไม่รู้ค่า นั้นปรากฏเป็นสัมประสิทธิ์อยู่ในพจน์แรกของสมการทั้งสอง ซึ่งไม่เพียงแต่ทำให้การหาผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นเป็นไปไม่ได้แล้ว ยังทำให้การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อเข้าแก้ปัญหานั้นมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไปอีกด้วย

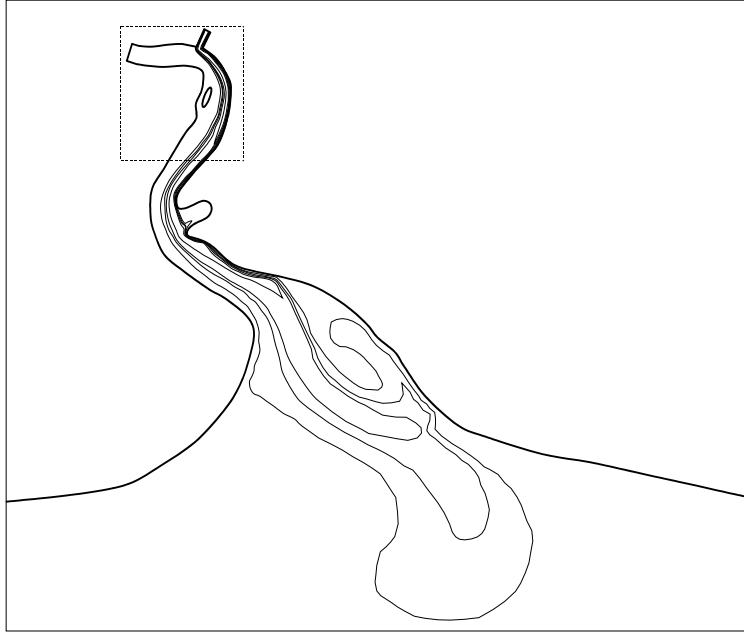
เหตุผล 2 ประการหลักนี้เอง ทำให้วิธีการแก้ปัญหของไหลนั้นพัฒนาไปได้ช้ากว่าการแก้ปัญหของแข็งหรือปัญหาทางด้านความร้อนมาก ความเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นในปัญหาของไหลสามารถก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความซับซ้อนเป็นอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับปัญหาของแข็งหรือปัญหาทางด้านความร้อนซึ่งมักเป็นปัญหาเชิงเส้น (linear) ซึ่งมีการกระจายของผลลัพธ์ในรูปแบบที่ง่ายและไม่ซับซ้อน ยกตัวอย่างเช่น เมื่อออกแรงค่า ๆ หนึ่งกดลงบนคาน จะก่อให้เกิดค่าความเค้น (stress) สูงสุดบนคานนั้นตามมา หากเพิ่มแรงกดลงบนคานให้มากขึ้น ค่าความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นบนคานก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปในทิศทางเดียวกันด้วย แต่หากเป็นปัญหาของการไหลที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบ

ไม่เชิงเส้น ยกตัวอย่างเช่น การเปิดความเร็วลมของเครื่องปรับอากาศที่ระดับต่ำในห้องหนึ่ง ก่อให้เกิดลักษณะการหมุนเวียนของอากาศในห้องนั้นด้วยความเร็วในรูปแบบ (pattern) หนึ่ง แต่หากเปิดความเร็วลมของเครื่องปรับอากาศที่ระดับสูงขึ้น ลักษณะการหมุนเวียนของอากาศในห้องนั้นอาจเปลี่ยนรูปแบบไปจากเดิมโดยสิ้นเชิง กล่าวคือ ไม่ใช่ว่าการหมุนเวียนยังคงอยู่ในรูปแบบเดิมโดยมีความเร็วสูงขึ้น เป็นต้น ความเข้าใจในความหมายของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อจึงมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ผู้ที่ต้องการแก้ปัญหาจำเป็นต้องทำความเข้าใจและคุ้นเคยกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อเหล่านี้ก่อนลงมือแก้ปัญหา และไม่มองสมการเหล่านี้เป็นแค่เพียงสมการทางคณิตศาสตร์ แต่จำเป็นต้องมองให้เกิดความหมายทางกายภาพ (physical meaning) และมีทัศนคติที่ดีที่ว่า หากสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อเหล่านี้ได้อย่างถูกต้องแล้ว จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความหมายและความลึกซึ้งซึ่งสามารถนำไปสู่ความเข้าใจในปัญหานั้น ๆ ได้ดียิ่งขึ้น

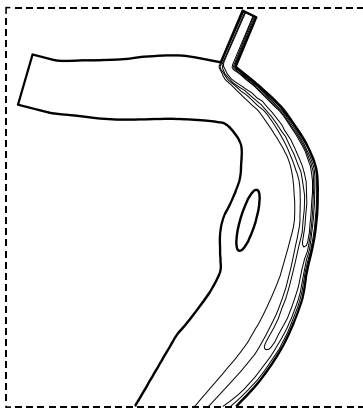
1.2.2 เงื่อนไขขอบเขต

ในกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อนั้นเงื่อนไขขอบเขตเป็นองค์ประกอบสำคัญซึ่งนำไปสู่ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน หากปัญหาที่ทำการวิเคราะห์เป็นปัญหาแบบไม่อยู่ตัว (unsteady) เงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) จำเป็นต้องถูกประยุกต์เข้าด้วยกัน เช่นกัน เงื่อนไขขอบเขตที่เปลี่ยนแปลงไปก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เปลี่ยนแปลงไปด้วยเช่นกัน รูป 1.8 แสดงการกระจายของอุณหภูมิบริเวณปากอ่าวของแม่น้ำเจ้าพระยาในฤดูน้ำหลาก เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้คือการกำหนดให้น้ำในแม่น้ำเจ้าพระยาไหลมาจากด้านมุมซ้ายบนด้วยความเร็ว 3 เมตร/วินาที ที่อุณหภูมิ 25°C โดยทางด้านขวามือน้ำร้อนที่อุณหภูมิ 40°C ถูกปล่อยจากโรงงาน ทำให้อุณหภูมิปลายน้ำนั้นมีค่าสูงขึ้น ซึ่งอาจมีผลต่อความเสียหายของการทำประมงสัตว์น้ำซึ่งเลี้ยงอยู่บริเวณปลายน้ำได้ รูป 1.9 (ก) แสดงรายละเอียดเส้นชั้นของระดับอุณหภูมิในกรอบเล็กของรูป 1.8 ซึ่งเป็นบริเวณที่น้ำร้อนจากโรงงานถูกปล่อยมาผสมกับน้ำเย็นในแม่น้ำใกล้เกาะผีเสื้อ เนื่องจากเป็นฤดูน้ำหลาก น้ำร้อนจากโรงงานจึงถูกพัดผ่านไปได้อย่างค่อนข้างรวดเร็ว รูป 1.9 (ข) แสดงผลลัพธ์ของการกระจายของอุณหภูมิจากการผสมของน้ำบริเวณเกาะผีเสื้ออีกเช่นกันแต่เป็นกรณีของฤดูแล้ง กล่าวคือกำหนดให้น้ำเย็นในแม่น้ำ

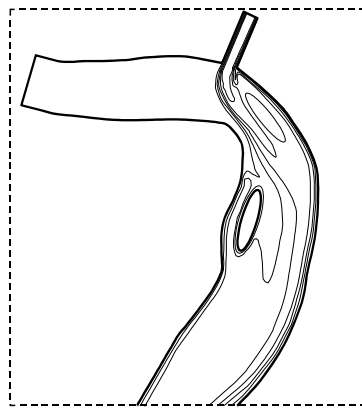
เจ้าพระยาไหลมาจากด้านมุมซ้ายบนของภาพด้วยความเร็วลดลงเป็น 1.5 เมตร/วินาที ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของน้ำที่มีอุณหภูมิสูงขึ้นโดยรวมในบริเวณกว้าง



รูป 1.8 เส้นชั้นแสดงการกระจายของอุณหภูมิในบริเวณปากอ่าวแม่น้ำเจ้าพระยา
เนื่องจากโรงงานปล่อยน้ำร้อนในฤดูน้ำหลาก



(ก) กรณีฤดูน้ำหลาก



(ข) กรณีฤดูแล้ง

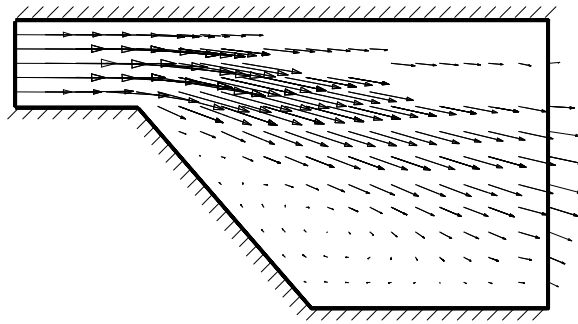
รูป 1.9 รายละเอียดของเส้นชั้นแสดงการกระจายของอุณหภูมิจากการผสมของน้ำ
ที่อุณหภูมิต่างกัน ในบริเวณเกาะผีเสื้อก่อนปากแม่น้ำเจ้าพระยา

การกระจายของอุณหภูมิที่ต่างกันดังแสดงในรูป 1.9 เป็นผลมาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกัน การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการไหลในทางการคำนวณนั้นขึ้นอยู่กับชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ ว่าเป็นแบบเอลลิปติก (elliptic); พาราโบลา (parabolic); หรือไฮเพอร์โบลา (hyperbolic) ซึ่งขึ้นอยู่กับความเร็วของการไหล อีกต่อหนึ่ง ยกตัวอย่างเช่น การไหลที่ความเร็วมากกว่าเสียงผ่านรูปทรงผิวโค้งมน (blunt body) จะก่อให้เกิดคลื่นช็อกโค้ง (bow shock) วางตัวอยู่หน้ารูปทรงผิวโค้งมนนั้น ส่วนในบริเวณระหว่างคลื่นช็อกโค้งและรูปทรงผิวโค้งมน ความเร็วของการไหลนั้นมีค่าต่ำกว่าเสียง ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์อยู่ในรูปแบบเอลลิปติก ในขณะที่ถัดจากบริเวณดังกล่าวนั้นออกไปเล็กน้อย ความเร็วของการไหลเพิ่มขึ้นจนมีค่ามากกว่าความเร็วเสียง สมการเชิงอนุพันธ์จึงกลายมาอยู่ในรูปแบบไฮเพอร์โบลา เป็นต้น ปัญหาในลักษณะเช่นนี้ เคยเป็นปัญหาที่ยากแก่การแก้เพื่อหาผลลัพธ์ในอดีต เนื่องจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเปลี่ยนจากชนิดหนึ่งไปสู่อีกชนิดหนึ่งได้ภายในโดเมนของการคำนวณ (computational domain) เดียวกัน ดังนั้น ในบทของการไหลชนิดต่าง ๆ กันที่จะนำเสนอต่อไป การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจะอธิบายโดยชัดเจนเพื่อให้เกิดความเข้าใจและเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตได้อย่างถูกต้องเหมาะสมกับการไหลชนิดนั้น ๆ

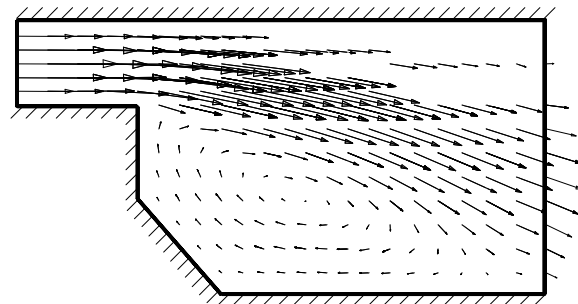
1.2.3 ลักษณะรูปร่าง

ในการแก้ปัญหาพื้นฐานโดยทั่วไปในชั้นเรียน ลักษณะรูปร่างของปัญหามักไม่ได้ถูกนำมาพิจารณา การศึกษาส่วนใหญ่เป็นการเน้นเพียงขั้นตอนของกระบวนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ หรือหากกำหนดลักษณะรูปร่างมาให้ ก็มักเป็นเพียงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้น การไม่นำรูปร่างลักษณะของปัญหาเข้ามาร่วมพิจารณา ทำให้นิสิตนักศึกษามองข้ามความยากลำบากของการแก้ปัญหาอันสืบเนื่องมาจากลักษณะรูปร่างของปัญหาโดยเกือบสิ้นเชิง ปัญหาโดยทั่วไปในงานวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ล้วนถูกออกแบบให้มีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อนอยู่เสมอ เช่น การไหลผ่านบ้านที่มีห้องในระดับต่าง ๆ กันได้หลังคาเอียง ดังแสดงในรูป 1.4 และ 1.5 หรือปัญหาอาจมีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อนในตัวเองโดยธรรมชาติ เช่น การไหลในบริเวณปากอ่าวแม่น้ำเจ้าพระยาในรูป 1.8-1.9 เป็นต้น ลักษณะรูปร่างซึ่งครอบคลุมพื้นที่ของการไหลที่เปลี่ยนแปลงไป ทำให้ผลลัพธ์

ของการไหลที่เกิดขึ้นนั้นเปลี่ยนแปลงไปด้วยเช่นกันถึงแม้ว่าระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและเงื่อนไขขอบเขตยังคงเดิม รูป 1.10 แสดงการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบเชิงเส้น ก่อให้เกิดการหมุนวน (circulation) บริเวณล่างซ้ายเป็นพื้นที่เพียงเล็กน้อย รูป 1.11 แสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและเงื่อนไขขอบเขตบริเวณปากทางเข้าเช่นเดียวกับรูป 1.10 แต่ลักษณะรูปร่างบริเวณล่างซ้ายของปัญหาได้ขยายเพิ่มมากขึ้น ก่อให้เกิดพื้นที่ของการหมุนวนนั้นเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย



รูป 1.10 เวกเตอร์ความเร็วแสดงลักษณะการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบเชิงเส้น



รูป 1.11 เวกเตอร์ความเร็วลักษณะการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวซับซ้อนขึ้น

จากตัวอย่างต่าง ๆ เหล่านี้จะเห็นได้ว่า ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนั้นมีความหลากหลาย โดยขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลักทั้ง 3 ประการดังกล่าวมาข้างต้น ตัวอย่างต่าง ๆ เหล่านี้ยังแสดงให้เห็นว่า หากสามารถหาวิธีที่ได้มาซึ่งผลลัพธ์ของปัญหาเหล่านี้อย่างมีประสิทธิภาพแล้ว ผู้วิเคราะห์สามารถดัดแปลงเงื่อนไขขอบเขตหรือรูปร่างของปัญหา อันจะก่อให้เกิดผลลัพธ์

ตามที่ต้องการได้ ความคิดเช่นนี้เองทำให้พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณมีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อการออกแบบงานต่าง ๆ ในปัจจุบัน

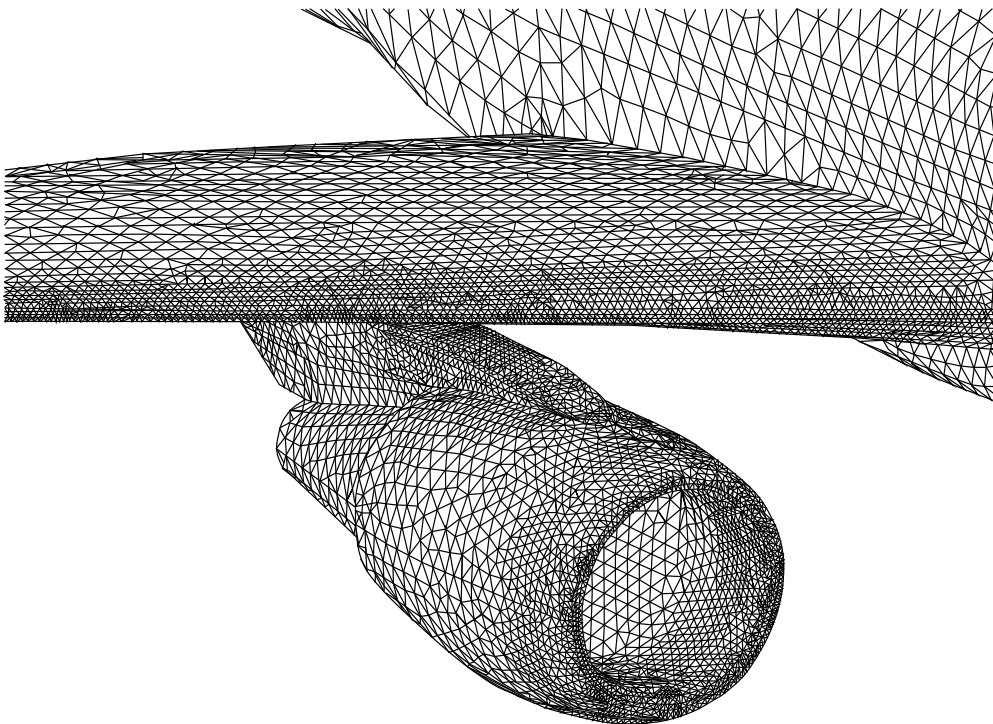
ความรู้ในวิธีการแก้ปัญหาผสมผสานกับศักยภาพของการแก้ปัญหาด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ ก่อให้เกิดโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (computer programs) ซึ่งได้ผลออกมาจำหน่ายในปัจจุบันเป็นจำนวนมาก หน้าที่หลักของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้คือการหาผลลัพธ์ด้วยการแก้องค์ประกอบหลักทั้งสามดังอธิบายมาข้างต้น โปรแกรมเหล่านี้ล้วนมีราคาสูง ผู้ใช้จำเป็นต้องมีความรู้ทั้งทางด้านคณิตศาสตร์และการคำนวณที่เพียงพอ จึงจะเกิดความมั่นใจว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้โปรแกรมเหล่านั้นนั้นถูกต้อง ผู้เขียนขอย้ำว่าโปรแกรมเหล่านี้ไม่เหมือนโปรแกรมกราฟิกที่ใช้วาดรูปหรือเขียนแบบที่พบเห็นกันโดยทั่วไป การใช้โปรแกรมกราฟิกเพื่อวาดวงกลมบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ แล้วเห็นเป็นวงกลมที่ต้องการ ผู้ใช้ย่อมรู้ว่าตนเองได้ผลลัพธ์เป็นรูปวงกลมที่ต้องการ แต่การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่คำนวณหาผลลัพธ์สถานะของการไหลซึ่งผลที่ได้นั้นแสดงในรูปแบบของเวกเตอร์ของความเร็วและระดับสีของความดันในลักษณะต่าง ๆ กัน หากผู้ใช้ไม่มีความรู้ว่โปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นทำอะไรอยู่ภายใน ก็ไม่สามารถยืนยันได้ว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนั้นถูกต้อง ดังนั้น จึงอาจก่อให้เกิดผลเสีย หากผู้ใช้ไม่มีความรู้เบื้องลึกในโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณแล้ว นำผลลัพธ์ไปใช้ออกแบบงานทางวิศวกรรม

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณเหล่านี้ได้ถูกสร้างขึ้นเพื่อใช้แก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล โดยมีเงื่อนไขขอบเขตและลักษณะรูปร่างของปัญหาที่สามารถกำหนดได้โดยสะดวก โดยทั่วไปแล้วทุก ๆ โปรแกรมจึงประกอบด้วย 3 ขั้นตอนใหญ่ ๆ คือ (ก) ขั้นตอนการสร้างลักษณะรูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งเป็นขั้นตอนของกระบวนการขั้นต้น (pre-processor); (ข) ขั้นตอนการวิเคราะห์แก้ปัญหา (analysis) ซึ่งเป็นหัวใจของโปรแกรม; และ (ค) ขั้นตอนของกระบวนการขั้นท้าย (post-processor) เพื่อการแสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการคำนวณ

(ก) กระบวนการขั้นต้น กระบวนการขั้นต้นเริ่มจากการสร้างโดเมนของการไหลที่ต้องการทำการวิเคราะห์ ประกอบด้วยขั้นตอนนับตั้งแต่การสร้างเส้นขอบ (line) การสร้างพื้นผิว (surface) รวมไปถึงการสร้างปริมาตร (volume) หากเป็นการไหลในสามมิติ จากนั้นจึงแบ่งโดเมนของการไหลที่ได้สร้างขึ้นนี้ออกเป็นเอลิเมนต์ (element) เล็ก ๆ หรือ

ออกเป็นตาราง (mesh) ย่อย ๆ โดยเส้นตารางเหล่านี้ตัดกันที่จุดต่อ (grid หรือ node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณค่าผลลัพธ์ของการไหล ได้แก่ ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ เป็นต้น แล้วจึงกำหนดคุณสมบัติของของไหล และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหานั้น ตามลำดับ

กระบวนการขั้นต้นนี้ ถึงแม้สามารถดำเนินการได้โดยง่ายในโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปที่ผลิตขึ้นมาจำหน่ายในปัจจุบัน แต่มักใช้เวลาในการสร้างค่อนข้างมาก เนื่องจากลักษณะรูปร่างของปัญหาของการไหลโดยทั่วไปในทางปฏิบัตินั้นมีความซับซ้อน ยกตัวอย่างเช่น การไหลผ่านเครื่องยนต์ได้ปีกที่ต่อกับลำตัวของเครื่องบิน ดังแสดงในรูป 1.12 โดเมนของการไหลจำเป็นต้องสร้างให้มีขนาดรูปร่างที่ถูกต้อง โดยที่ผิวของโดเมนของการไหลนี้ จำเป็นต้องสัมผัสไปกับผิวโค้งของเครื่องยนต์ได้ปีก ผิวโค้งของลำตัวเครื่องบิน รวมทั้งส่วนของผิวโค้งต่าง ๆ เหล่านี้ที่ตัดกันในสามมิติ จากนั้นจึงค่อยทำการแบ่งโดเมนของการไหลนี้ออกเป็นเอลิเมนต์เล็ก ๆ หรือตารางย่อย ๆ เพื่อใช้ในการคำนวณในขั้นตอนต่อไป



รูป 1.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จำลองเครื่องยนต์ได้ปีกที่ต่อกับลำตัวเครื่องบิน

(ข) ขั้นตอนการวิเคราะห์ ขั้นตอนการวิเคราะห์จัดได้ว่าเป็นหัวใจของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปเหล่านี้ การแบ่งโดเมนของการไหลออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดเล็กหรือเป็นตารางที่มีความถี่มากจนเกินไป ก่อให้เกิดจำนวนจุดต่อซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า (unknowns) มากขึ้นตามไปด้วย อันเป็นผลต่อเนื่องต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (computational time) และปริมาณหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ (computer memory) ที่จำเป็นต้องจัดหาให้ แต่ในทางตรงกันข้าม จะนำไปสู่ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำ (solution accuracy) สูงมากขึ้น นักวิเคราะห์ผู้มีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาจึงจำเป็นต้องชั่งน้ำหนักระหว่างผลได้และผลเสียนี้ก่อนทำการคำนวณ

แนวความคิดของการแบ่ง (discretization) โดเมนของการไหลออกเป็นเอลิเมนต์หรือตารางเล็ก ๆ ก็เพื่อสามารถใช้ฟังก์ชันแบบง่าย ๆ (simple functions) สำหรับแทน (represent) ลักษณะของการไหลผ่านเอลิเมนต์หรือตารางเล็ก ๆ นั้น ฟังก์ชันดังกล่าวจะถูกแทนลงไปในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล ผสมเข้ากับกระบวนการทางคณิตศาสตร์บางอย่างเพื่อทำการลดค่าผิดพลาด (error) ก่อให้เกิดระบบสมการทางพีชคณิต (system of algebraic equations) ขนาดใหญ่ซึ่งจำเป็นต้องแก้โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ต่อไป

วิธีการวิเคราะห์ซึ่งเป็นที่นิยมใช้กันมากคือ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) ระเบียบวิธีทั้งสามนี้ในปัจจุบันได้ถูกนำมาสอนแทรกเพื่อช่วยแก้ปัญหาในหลาย ๆ วิชาในระดับปริญญาบัณฑิตและบัณฑิตศึกษาสำหรับสาขาต่าง ๆ ทั้งในวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ในภาพรวม ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง เป็นการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) เพื่อประมาณพจน์เชิงอนุพันธ์ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยค่าที่จุดต่อ ณ ตำแหน่งที่พิจารณาและที่จุดต่อข้างเคียง ก่อให้เกิดระบบสมการทางพีชคณิตที่จำเป็นต้องแก้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขดังกล่าวข้างต้น ระเบียบวิธีนี้ประกอบด้วยขั้นตอนที่ไม่ซับซ้อนและง่ายแก่การทำความเข้าใจ แต่มีขีดจำกัดคือ ไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างซับซ้อนได้โดยสะดวก

ในขณะเดียวกัน หากใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หรือระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างซับซ้อนใด ๆ สามารถแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม ด้านไม่เท่า ฯลฯ ได้โดยง่าย เอลิเมนต์เหล่านี้ไม่จำเป็นต้องเรียงตัวกันอย่างเป็นระเบียบดังเช่น ตารางสี่เหลี่ยมที่ต้องสร้างขึ้นในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง จุดเด่นของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มนี้เอง ทำให้ได้รับความนิยมเพิ่มมากขึ้นในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมต่าง ๆ ซึ่งล้วนแล้วแต่มีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อน อย่างไรก็ตาม ระเบียบวิธีทั้งสองนี้ เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นประกอบด้วยขั้นตอนการประดิษฐ์สมการภายในที่ซับซ้อนกว่าโดยเริ่มจากการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) การประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) ซึ่งประกอบด้วยการอินทิเกรต (integration) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equations) สำหรับเอลิเมนต์นั้น ๆ ก่อนนำสมการเหล่านี้มาประกอบกันเข้า (assembling of element equations) ขึ้นเป็นระบบสมการรวมขนาดใหญ่ ซึ่งจำเป็นต้องแก้โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่อไปด้วยเช่นกัน

(ค) กระบวนการขึ้นท้าย ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากขั้นตอนของการวิเคราะห์การไหลนั้น โดยปกติมักประกอบด้วย ความเร็วย่อยในทิศทางต่าง ๆ ความดัน และอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งใด ๆ ในโดเมนของการไหลนั้น ผลลัพธ์ที่คำนวณได้เหล่านี้มีจำนวนมากซึ่งขึ้นโดยตรงกับจำนวนของจุดต่อและต่างล้วนอยู่ในรูปแบบของค่าตัวเลข ดังนั้น จึงแทบเป็นไปไม่ได้ที่จะดูเพียงแค่ตัวเลขเหล่านี้แล้วก่อให้เกิดความเข้าใจในความหมายทางกายภาพของสถานะการไหลโดยเฉพาะหากเป็นปัญหาในสามมิติ การสร้างผลลัพธ์เหล่านี้ออกมาในรูปของกราฟจึงมีความจำเป็นเป็นอย่างยิ่ง ซึ่งสามารถแสดงได้ในหลายรูปแบบ เช่น การพล็อตเวกเตอร์ ณ ทุก ๆ จุดต่อตลอดทั้งโดเมนของการไหลเพื่อแสดงลักษณะทิศทางของการไหลและสถานะการหมุนวนในบริเวณต่าง ๆ ดังเช่นแสดงในรูป 1.4 และ 1.5 ของอากาศที่ไหลผ่านบ้าน การพล็อตด้วยเส้นชั้น (contour lines) เช่นตัวอย่างของการกระจายของอุณหภูมิในห้องปรับอากาศ ดังแสดงในรูป 1.7 และในบริเวณปากอ่าวแม่น้ำเจ้าพระยา ดังแสดงในรูป 1.8 และ 1.9 การพล็อตเหล่านี้อาจแสดงด้วยสีต่าง ๆ กัน (color contours) บนหน้าจอคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยให้เกิดความเข้าใจในปัญหาโดยเร็วและดียิ่งขึ้น นอกจากนี้ การแสดงผลยังอาจแสดงในรูปแบบของเส้นทางการเดินของอนุภาค (particle tracing) ดังเช่นแสดงในรูป 1.6 เป็นต้น

ผลลัพธ์ในรูปแบบต่าง ๆ เหล่านี้สามารถแสดงให้เห็นได้ในหลาย ๆ ทิศทาง (view) รวมไปถึงการแสดงในเชิงของการไหลที่มีการเคลื่อนไหว (fluid motion) เพื่อให้เกิดความรู้สึกที่เป็นจริงมากขึ้นด้วย

1.3 องค์ประกอบความรู้ที่จำเป็น

ศักยภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้คำนวณพลศาสตร์ของการไหลดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่แล้ว มักทำให้ผู้วิเคราะห์เข้าใจว่าสามารถใช้โปรแกรมเหล่านี้เพื่อหาผลลัพธ์ของการไหลสำหรับปัญหาใด ๆ ได้โดยง่าย แต่ในความเป็นจริงนั้น เนื่องจากโปรแกรมเหล่านี้ตั้งอยู่บนความรู้ทางคณิตศาสตร์และขั้นตอนการคำนวณที่ค่อนข้างลึกซึ้ง ผู้ที่สามารถใช้โปรแกรมเหล่านี้ได้ถูกต้องอย่างมีประสิทธิภาพจำเป็นต้องมีความรู้ที่เพียงพอ องค์ประกอบของความรู้ที่ต้องการนี้อาจจำแนกออกเป็น 5 ประการ คือ (ก) ความรู้ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (set of partial differential equations) และความเข้าใจความหมายทางกายภาพ (physical meaning) ของสมการเหล่านี้; (ข) ความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods); (ค) ความรู้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หรือไฟไนต์วอลุ่ม (finite element or finite volume method); (ง) ความรู้พื้นฐานในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนของ การวิเคราะห์; และ (จ) ประสบการณ์ในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่พอเพียง ความรู้ทั้ง 5 ประการนี้ เปรียบเสมือนประตูทั้ง 5 บาน ซึ่งทุกบานจำเป็นต้องเปิด หากประตูใดประตูหนึ่งปิด จะปิดกั้นศักยภาพของผู้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้ลง นับตั้งแต่การใช้เวลานานหรือหน่วยความจำมากกว่าที่ควรเป็นในการวิเคราะห์ปัญหา การใช้โปรแกรมอย่างไม่ถูกต้องผิดประเภท การไม่รู้ว่าโปรแกรมทำอะไรอยู่ขณะทำงานอยู่กับโปรแกรมนั้น การได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงต่ำและไม่สามารถหาวิธีที่เหมาะสมเพื่อปรับปรุงผลลัพธ์นั้น และที่ร้ายแรงที่สุดคือการได้ผลลัพธ์ที่ผิดหรือได้ผลลัพธ์แล้วไม่สามารถอธิบายได้ว่าผลลัพธ์นั้นถูกต้องอย่างไร ความรู้ทั้ง 5 ประการดังกล่าวข้างต้นจะช่วยให้ผู้ใช้โปรแกรมเกิดความเข้าใจในกระบวนการแก้ปัญหาและมั่นใจในผลลัพธ์ที่คำนวณได้ พื้นฐานความรู้ทั้ง 5 ประการนี้ สามารถอธิบายในภาพรวมได้ดังต่อไปนี้

(ก) ความรู้ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณล้วนตั้งอยู่บนการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยระบบใดระบบหนึ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องศึกษาว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นถูกสร้างขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหของการไหลที่ครอบคลุม (governed) ด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยประเภทใด นอกจากนั้น ความเข้าใจทางกายภาพในแต่ละพจน์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นก็มีความสำคัญมากเช่นกันในการบ่งบอกศักยภาพ (capability) และขีดจำกัด (limitation) ของโปรแกรมเอง พจน์ต่าง ๆ ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนี้ยังบ่งบอกต่อไปอีกว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ต้องการความลึกซึ้งของระเบียบวิธีการคำนวณมากน้อยเพียงใด และจะเป็นผลต่อเนื่องต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณปัญหานั้น ๆ อย่างไร ดังนั้น ความเข้าใจในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจึงมีความสำคัญที่จำเป็นต้องทำความเข้าใจก่อนเริ่มลงมือใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้น

(ข) ความเข้าใจในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งในปัจจุบันได้กลายมาเป็นวิชาบังคับในการเรียนวิศวกรรมศาสตร์หลายสาขานั้น เป็นความรู้พื้นฐานและองค์ประกอบหนึ่งที่สำคัญสำหรับการคำนวณ ความรู้พื้นฐานในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้ประกอบด้วย ความรู้ในฟังก์ชันของการประมาณภายใน (interpolation functions) การหาค่าอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical differentiations and integrations) ความรู้พื้นฐานในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations) รวมทั้งสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) และที่สำคัญที่สุดคือความรู้ในระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ใช้แก้ระบบสมการพีชคณิต (system of algebraic equations) ซึ่งมักอยู่ในรูปแบบของเชิงเส้นที่ประกอบด้วย n สมการ

$$\underset{(n \times n)}{[A]} \underset{(n \times 1)}{\{X\}} = \underset{(n \times 1)}{\{B\}} \quad (1.4)$$

โดย $\{X\}$ เป็นเวกเตอร์ (vector or column matrix) ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; $\{B\}$ เป็นเวกเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวรู้ค่าจำนวน n ค่า; และในกรณีนี้ $[A]$ เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ซึ่งเป็นตัวเลขจำนวน $n \times n$ ค่า ในการแก้ปัญหามานานแล้ว เวลาที่ใช้ไปในการแก้ระบบสมการนี้จะมากกว่าเวลาที่ใช้ไปสำหรับการคำนวณในส่วนอื่น ๆ มากทีเดียว ยกตัวอย่างง่าย ๆ เช่น หากปัญหานั้นเป็นปัญหาของการไหลใน 3 มิติ ซึ่งอาจประกอบด้วยเพียง 50,000 สมการ (10,000 จุดต่อ โดยแต่ละจุดต่อมีตัวไม่รู้ค่า 5 ชนิด คือ

ความเร็วใน 3 แกน ความดัน และอุณหภูมิ) ซึ่งจัดได้ว่าเป็นปัญหาค่อนข้างเล็กน้อยในปัจจุบัน เมทริกซ์ $[A]$ จะประกอบด้วยสัมประสิทธิ์รวม 2,500 ล้านค่า สมมุติว่าเขียน 50,000 สมการ เช่นนี้ลงบนกระดาษด้วยมือทีละสมการ โดยใช้เวลาเขียนเพียง 1 วินาทีต่อค่าสัมประสิทธิ์ 1 ค่า จำเป็นใช้เวลาเขียนทั้งหมดนี้รวมประมาณ 80 ปี ทั้งนี้และทั้งนั้นยังไม่ได้เริ่มทำการแก้ระบบสมการชุดนี้เลย

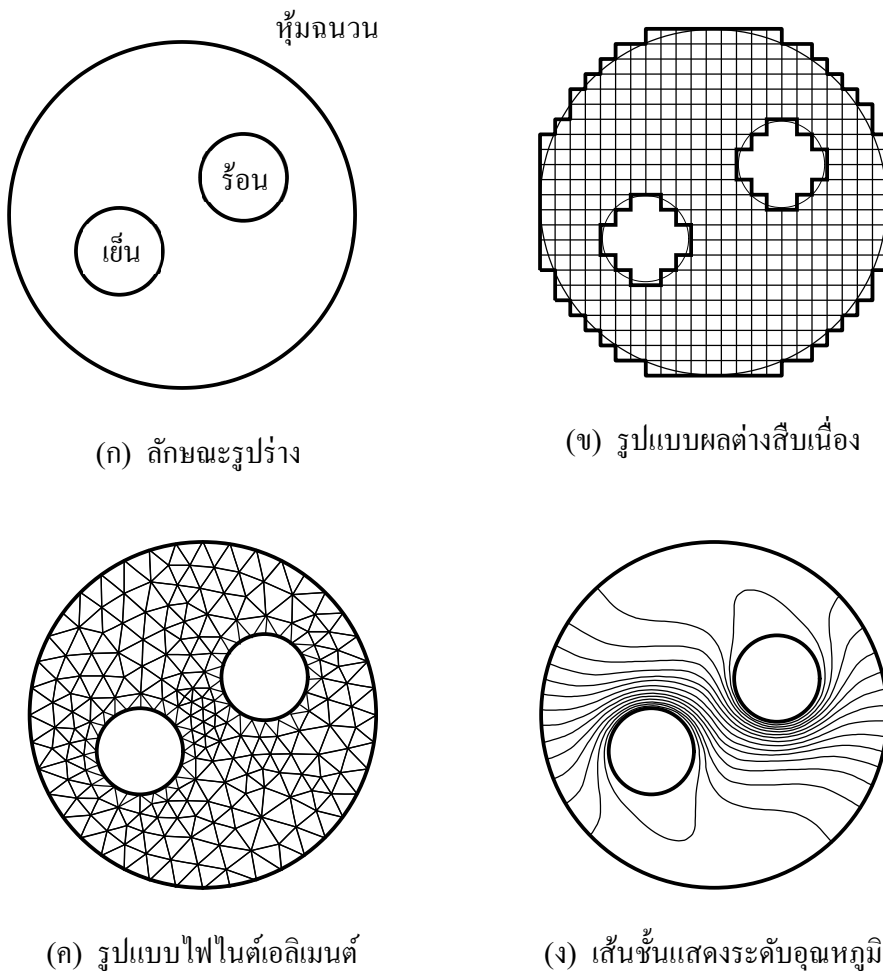
ตัวอย่างที่กล่าวขึ้นมาี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งสามารถนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพบนเครื่องคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน อนึ่ง เนื่องจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลโดยทั่วไป ดังเช่นแสดงในสมการ (1.1-1.3) ส่วนประกอบด้วยพจน์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear terms) ระบบสมการที่เกิดขึ้นจึงอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นด้วย

$$\underset{(n \times n)}{[A(x)]} \underset{(n \times 1)}{\{X\}} = \underset{(n \times 1)}{\{B\}} \quad (1.5)$$

ทำให้ต้องแก้ระบบสมการแบบไม่เชิงเส้นชุดดังกล่าวหลายครั้งด้วยกระบวนการทำซ้ำ (iteration technique) เช่น ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration method) เป็นต้น พื้นฐานของระเบียบวิธีการแก้ระบบสมการแบบไม่เชิงเส้นนี้ในปัจจุบันได้บรรจุอยู่ในการเรียนวิชาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยเช่นกัน

(ค) ความรู้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หรือไฟไนต์วอลุ่ม การวิเคราะห์ปัญหาใด ๆ ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 1.2 ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนั้นขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลัก 3 ประการ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ครอบคลุมปัญหานั้น เงื่อนไขขอบเขต และลักษณะรูปร่างของปัญหานั้น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเป็นระเบียบวิธีที่ตอบสนองทำให้องค์ประกอบหลักทั้งสามที่ต้องการนี้มีความสมบูรณ์ เริ่มจากการแทนลักษณะรูปร่างของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กทำให้การสร้างโดเมนของการคำนวณมีความเที่ยงตรงมากกว่าการติดาราสี่เหลี่ยมที่ใช้กับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง รูป 1.13 (ก) แสดงโดเมนของการคำนวณบนหน้าตัดของท่อทรงกระบอกใหญ่ที่ห่อหุ้มด้วยฉนวน โดยภายในมีท่อทรงกระบอกเล็ก 2 ท่อที่อุณหภูมิสูงและต่ำ ระหว่างผิวท่อทรงกระบอกนี้ได้รับบรรจุของไหลไว้ จุดประสงค์คือการศึกษาสภาวะการไหลและอุณหภูมิของของไหลนี้ รูป 1.13 (ข) แสดงการติดาราสี่เหลี่ยมเพื่อใช้กับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ขอบเขตของโดเมน

การคำนวณไม่สามารถถูกแทนได้อย่างเที่ยงตรง โดยเห็นเป็นชั้นบันไดตลอดผิวโค้งของท่อ หากต้องการให้ชั้นบันไดนี้มีขนาดเล็กลง จำเป็นต้องติดตารางสี่เหลี่ยมให้ถี่ขึ้น เป็นผลให้จำนวนจุดต่อและตัวไม่รู้ค่าเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย ในขณะที่ รูป 1.13 (ค) แสดงเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นสำหรับใช้กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสามารถแทนส่วนโค้งของท่อได้ดีกว่า ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้น รูป 1.13 (ง) แสดงเส้นชั้นของระดับอุณหภูมิที่คำนวณได้โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ รายละเอียดของผลลัพธ์เหล่านี้จะนำเสนอในบทที่ 8 ต่อไป

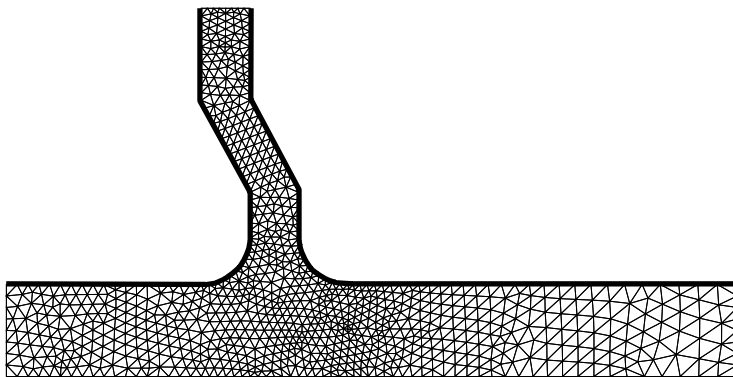


รูป 1.13 อุณหภูมิของของไหลเนื่องจากการไหลบนหน้าตัดของท่อที่มีอุณหภูมิต่างกัน

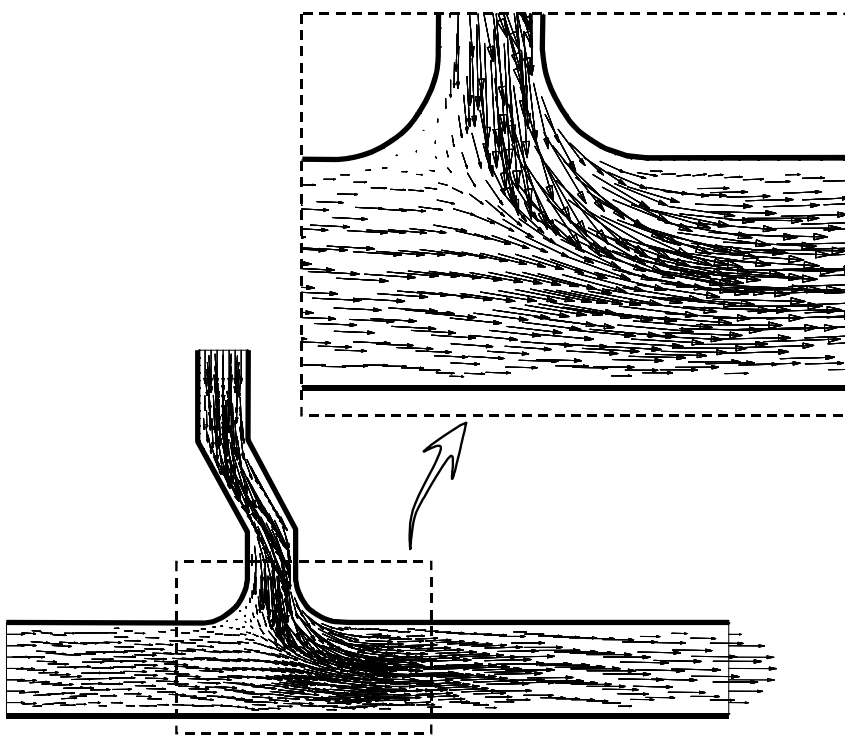
หลังจากแบ่งโดเมนของการคำนวณออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยแล้ว ขั้นตอนต่อไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ สมการเหล่านี้ถูกสร้างขึ้นมาจากการใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ครอบคลุมปัญหาที่พิจารณาอยู่นั้น ผสมผสานกับการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเพื่อสมมุติลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นั้น กระบวนการขั้นตอนนี้จะอธิบายโดยละเอียดในบทที่ 3 จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมานี้มาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็เปรียบเสมือนกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบต่อกันเข้าขึ้นเป็นรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของปัญหานั้น แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ของปัญหาลงในระบบสมการชุดใหญ่นี้ที่อยู่ในรูปแบบของสมการ (1.4) หรือ (1.5) ก่อนทำการแก้ทั้งระบบสมการด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่อไป

จากคำอธิบายดังกล่าวข้างต้นนี้จึงเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ตอบสนองความต้องการขององค์ประกอบหลักทั้ง 3 ประการ อันได้แก่ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เงื่อนไขขอบเขต และลักษณะรูปร่างของปัญหาได้โดยสมบูรณ์ นอกจากนั้นเนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) โดยการสมมุติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์บนเอลิเมนต์ด้วยฟังก์ชันพื้นฐาน ดังนั้น จึงหมายความว่า จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก โดยเฉพาะในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง

รูป 1.14 แสดงการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาของการไหลในท่อที่มาบรรจบกัน ลักษณะของปัญหาประกอบด้วยท่อใหญ่ที่วางตัวในแนวนอนซึ่งมีการไหลเข้ามาจากทางด้านซ้าย ในช่วงตอนกลางของท่อใหญ่นี้มีท่อเล็กที่มีความโค้งไปมาวิ่งมาบรรจบและมีการไหลวิ่งเข้ามาจากทางด้านบน รูป 1.14 (ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์ชนิดสามเหลี่ยมต่าง ๆ ที่สามารถแทนลักษณะรูปร่างที่โค้งไปมาได้เป็นอย่างดี เนื่องจากความซับซ้อนของการไหลนั้นเกิดขึ้นในบริเวณที่ท่อทั้งสองนี้มาบรรจบกัน ดังนั้น ขนาดของเอลิเมนต์ในบริเวณนี้จึงมีขนาดเล็กเพื่อนำไปสู่ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ในบริเวณนี้ รูป 1.14 (ข) แสดงสถานะของการไหลด้วยเวกเตอร์ความเร็ว โดยรายละเอียดของการไหลในบริเวณที่ท่อมาบรรจบกันนั้นได้แสดงในกรอบสี่เหลี่ยมขาวบน



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) ผลลัพธ์จากการคำนวณแสดงโดยเวกเตอร์ความเร็ว

รูป 1.14 การไหลในท่อที่มาบรรจบกันด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

(ง) ความเข้าใจในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ความรู้ความเข้าใจในขั้นตอนของการคำนวณซึ่งถูกประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันนั้นมีความสำคัญมากต่อการวิเคราะห์ปัญหา มีผู้ใช้จำนวนไม่น้อยที่พยายามใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปเพื่อแก้ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าจำนวนมาก การคำนวณอาจใช้เวลาต่อเนื่องนานหลายวัน ความเข้าใจในขั้นตอนของการคำนวณในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้สามารถนำไปสู่แนวทางเพื่อลดเวลาในการคำนวณได้เป็นอย่างมากโดยก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเท่าเทียมกัน ความไม่เข้าใจในขั้นตอนการคำนวณที่ใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์บางครั้งอาจนำไปสู่การไม่ได้มาซึ่งผลลัพธ์เลยหลังจากใช้เวลาคำนวณอย่างต่อเนื่องเป็นเวลานาน หรือหากได้ผลลัพธ์ อาจเป็นผลลัพธ์ที่ไม่มีความเที่ยงตรงก็เป็นได้

สาเหตุต่าง ๆ ข้างต้นนี้เป็นการบังคับผู้ใช้โปรแกรมในทางอ้อมให้ต้องมีความรู้ความเข้าใจที่ค่อนข้างลึกซึ้งในขั้นตอนของการวิเคราะห์ปัญหา ความรู้ความเข้าใจเหล่านี้อาจหาได้จากชั้นเรียน หรือจากการได้เคยแก้ปัญหาในทำนองเดียวกันมาหลายครั้ง ดังนั้น ในการจัดซื้อโปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้มาจากผู้จำหน่าย ผู้จำหน่ายจึงมักรวมการเข้าชั้นเรียนเพื่อฝึกฝน (training classes) เพื่อให้อย่างน้อยเกิดความเข้าใจพื้นฐานในการใช้โปรแกรมได้อย่างถูกต้อง อย่างไรก็ตาม วิธีที่ดีที่สุดยังคงเป็นการสะสมความรู้พื้นฐานในวิชาต่าง ๆ จากชั้นเรียน ซึ่งถึงแม้ว่าอาจใช้เวลานานแต่จะทำให้เกิดความเข้าใจในกระบวนการต่าง ๆ ที่มีความลึกซึ้งได้อย่างถาวรและสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ได้อีกต่อไป

(จ) ประสบการณ์ในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ความสามารถในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้น อาจกล่าวได้ว่าขึ้นอยู่กับเวลาที่ใช้ในการฝึกฝนที่หน้าจอคอมพิวเตอร์ การใช้เวลาฝึกฝนที่หน้าจอคอมพิวเตอร์นานมากเท่าใดก็จะก่อให้เกิดประสบการณ์มากขึ้นเท่านั้น ประสบการณ์เหล่านี้ไม่สามารถเกิดขึ้นจากการนั่งฟังในชั้นเรียน แต่จะเกิดขึ้นจากการลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง สิ่งใดที่ทำแล้วไม่เกิดผลดีดังที่ตั้งใจไว้จึงเป็นบทเรียนอย่างดีในการแก้ปัญหาครั้งต่อไป เมื่อแก้ปัญหาทางด้านการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์นานมากขึ้น ประสบการณ์ก็จะสั่งสมพอกพูนมากขึ้น จนอาจไปถึงจุดที่ว่าไม่มีความมั่นใจในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใด ๆ จนกว่าจะพิสูจน์ได้ด้วยเหตุผลบางอย่างจากประสบการณ์ของตนเอง

จากองค์ประกอบของความรู้ทั้ง 5 ประการ ดังที่ได้อธิบายมาข้างต้นนี้ จึงสามารถเข้าใจได้ว่า การแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลด้วยระเบียบวิธีเชิงคำนวณนั้น ไม่ใช่ต้องมีความรู้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หรือไฟไนต์วอลุ่มเท่านั้น แต่จำเป็นต้องประกอบด้วยความรู้พื้นฐานรอบด้านอีกหลายประการ ซึ่งต้องสั่งสมมาอย่างน้อยในช่วงระยะเวลาหนึ่ง ความรู้ต่าง ๆ ดังกล่าวนี้นี้ ไม่เพียงแต่ใช้ในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลได้เท่านั้น แต่ยังเปิดโอกาสในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์อื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมากที่ครอบคลุมด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต และลักษณะรูปทรงที่แตกต่างกัน

1.4 บทสรุป

การแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณได้เข้ามามีบทบาทเป็นอย่างมากต่อทั้งการศึกษาและการออกแบบงานต่าง ๆ ทางวิศวกรรมในปัจจุบัน นับตั้งแต่การคำนวณสภาวะการไหลผ่านเครื่องบิน ผ่านรถยนต์หรือรถบรรทุก รวมทั้งผ่านได้ท่อน้ำเพื่อวิเคราะห์แรงยกและแรงดูด การไหลผ่านใบพัดในปั๊มน้ำ การไหลของอากาศและระดับอุณหภูมิในห้องปรับอากาศหรือในอาคารขนาดใหญ่ การทำนายสภาวะอากาศผ่านพื้นที่กว้าง หรือเพียงควบคุมสภาวะของอากาศที่ไหลผ่านไมโครชิปเพื่อลดระดับอุณหภูมิของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีขนาดเล็ก ประโยชน์ของการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลด้วยการคำนวณนี้ ก่อให้เกิดการค้นคว้าวิจัยอย่างกว้างขวาง และนำมาสู่โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปที่จำหน่ายกันในราคาสูง

บทที่ 1 นี้ ได้อธิบายในภาพกว้างถึงปัจจัยหลักที่สำคัญ 3 ประการ อันนำไปสู่ผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน ไม่ว่าจะเป็นปัญหาของไหล ปัญหาของแข็ง ปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรือปัญหาอื่น ๆ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนั้นขึ้นอยู่กับ (ก) สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายความเป็นจริงของปัญหานั้น; (ข) เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้; และ (ค) ลักษณะรูปร่างของปัญหา การแก้ปัญหาในทางปฏิบัติโดยทั่วไปนั้น ปัจจัยทั้งสามนี้ล้วนมีความซับซ้อนในตัวเอง เช่น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ และเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อนในปัญหาการไหล ประกอบกับความซับซ้อนในลักษณะรูปร่างของปัญหา ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง

ได้ในทำนองเดียวกันกับที่เคยหาได้ในการเรียนบางวิชา ซึ่งเป็นสาเหตุทำให้บัณฑิตศึกษาไม่ค่อยได้ตระหนักถึงศักยภาพและประโยชน์เบื้องต้นของพลศาสตร์การไหลเท่าที่ควร

ดังนั้น การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขผสมผสานกับการใช้คอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ จึงเป็นวิธีเดียวที่ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความหมายและคุณค่าในทางปฏิบัติได้ แต่กระบวนการที่จะนำไปสู่ผลลัพธ์ดังกล่าวนี้ ผู้วิเคราะห์จำเป็นต้องมีองค์ประกอบของความรู้ในหลาย ๆ ด้านซึ่งสามารถจำแนกออกได้เป็น 5 ประการ คือ (ก) ความรู้ความเข้าใจในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยรวมทั้งความหมายทางกายภาพ; (ข) ความรู้ในพื้นฐานของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องใช้ประกอบในระหว่างทำการคำนวณ; (ค) ความรู้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หรือไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งสามารถจำลองรูปร่างของปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้โดยง่าย แต่ในขณะเดียวกันก็มีความซับซ้อนในตัวเองเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีผลต่างสลับเนื่อง; (ง) ความเข้าใจโดยสังเขปในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยปรับปรุงประสิทธิภาพของการคำนวณและความมั่นใจในความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้; และ (จ) ประสบการณ์ในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งขึ้นอยู่กับการศึกษาด้วยตนเอง องค์ประกอบทั้ง 5 ประการนี้ ไม่เพียงแต่จะทำให้ผู้วิเคราะห์สามารถแก้ปัญหาพลศาสตร์ของการไหลด้วยการคำนวณได้เท่านั้น แต่ยังเปิดโอกาสให้ผู้ผู้นั้นสามารถวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์อื่น ๆ ด้วยระเบียบวิธีในการคำนวณได้อีกด้วยเช่นกัน

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล

2.1 บทนำ

การวิเคราะห์ปัญหาใด ๆ ทางวิศวกรรมศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์ ลักษณะของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 1 โดยปกติขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลัก 3 ประการ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้น และลักษณะรูปร่างของปัญหา สำหรับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณนั้น ความเข้าใจในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลนับได้ว่าเป็นหัวใจที่สำคัญ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้อธิบายถึงความเป็นจริงของการไหลซึ่งต้องเกิดการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน สมการเหล่านี้ล้วนประกอบด้วยพจน์ที่อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ต่าง ๆ กัน ดังนั้น จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องทำความเข้าใจและคุ้นเคยกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ก่อน โดยไม่มองสมการเหล่านี้เพียงแต่ในแง่ลักษณะของสมการทางคณิตศาสตร์ แต่จำเป็นต้องเข้าใจถึงความหมายทางกายภาพของพจน์ต่าง ๆ ในสมการเหล่านี้ด้วย ความเข้าใจดังกล่าวไม่เพียงที่จะนำไปสู่ความสำเร็จในการแก้ปัญหานั้น แต่ยังช่วยทำให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ และสามารถอธิบายได้ ซึ่งจะนำไปสู่ความเข้าใจในปัญหาได้ดียิ่งขึ้น

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในความหมายทางกายภาพ (physical meaning) ของแต่ละพจน์ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้โดยง่าย รวมทั้งที่มาของพจน์เหล่านี้ บทนี้จะแสดง

ขั้นตอนการประดิษฐ์สมการสำหรับการไหลใน 2 มิติ ซึ่งช่วยลดจำนวนพจน์ต่าง ๆ และความยาวของสมการลงไปได้อย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับ การไหลใน 3 มิติ อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจที่เกิดขึ้น สามารถนำไปขยายต่อในการประดิษฐ์สมการสำหรับการไหลใน 3 มิติได้โดยตรง เพียงแต่ใช้เวลามากขึ้นเนื่องจากสมการต่าง ๆ เหล่านั้นมีความยาวและประกอบด้วยพจน์ต่าง ๆ เพิ่มขึ้นไปอีกหนึ่งมิติเท่านั้น พจน์ต่าง ๆ ในสมการเหล่านี้ต่างอยู่ในรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์ (derivative) ซึ่งอาจไม่ค่อยรู้สึกคุ้นเคยในการเริ่มศึกษาใหม่ ๆ แต่ความเข้าใจในความหมายทางกายภาพของพจน์ต่าง ๆ เหล่านี้ล้วนมีความจำเป็นและสำคัญต่อการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณมาก เพราะหัวใจของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในปัจจุบันคือการลงโปรแกรมสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในลักษณะเช่นนี้ทั้งนั้น ดังนั้นความถูกต้องและความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจึงจำเป็นต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้เป็นอย่างมาก

2.2 ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์

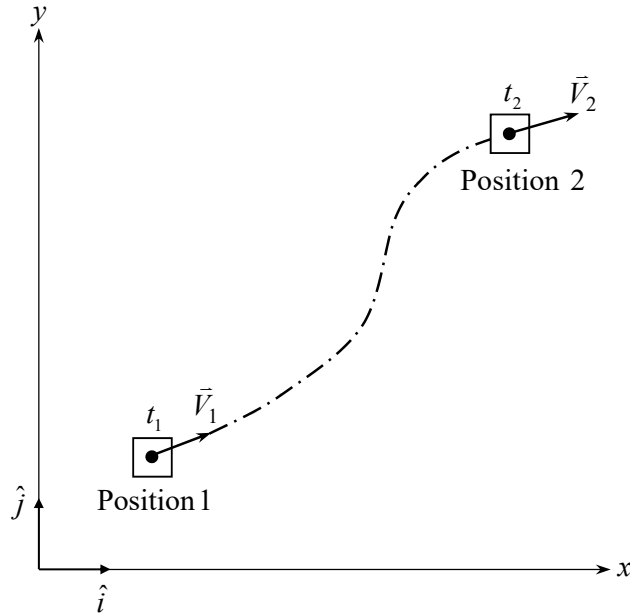
ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (substantial derivative) เป็นสิ่งที่จำเป็นต้องทำความเข้าใจในความหมายก่อนเริ่มทำการประดิษฐ์ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล เพื่ออธิบายความหมายของค่านี้ รูป 2.1 แสดงเส้นทางเดินของก้อนของไหลก้อนเล็ก ๆ จากตำแหน่ง 1 ที่เวลา t_1 ไปยังตำแหน่ง 2 ที่เวลา t_2 บนระนาบ x - y โดยบนระนาบนี้ กำหนดให้ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ในทิศแกน x และ y ตามลำดับ ก้อนของไหลนี้มีความเร็ว $\vec{V}_1$ ที่ตำแหน่ง 1 และ $\vec{V}_2$ ที่ตำแหน่ง 2 ความเร็วเหล่านี้ต่างเป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้คือ

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} \quad (2.1)$$

โดย u และ v เป็นความเร็วย่อยในทิศแกน x และ y ตามลำดับ ความเร็วย่อย u และ v นี้ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของโคออร์ดิเนต x, y และเวลา t คือ

$$u = u(x, y, t) \quad (2.2ก)$$

$$v = v(x, y, t) \quad (2.2ข)$$



รูป 2.1 เส้นทางเดินของของไหลก้อนเล็ก ๆ จากตำแหน่ง 1 ที่เวลาเวลา t_1 ไปยังตำแหน่ง 2 ที่เวลา t_2

ในขณะที่ก้อนของไหลนี้เคลื่อนที่ไปนั้น ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของก้อนของไหลนี้ก็จะเปลี่ยนแปลงไปโดยขึ้นอยู่กับตำแหน่งโคออร์ดิเนตและเวลาด้วย ยกตัวอย่างเช่น ค่าความหนาแน่น (density)

$$\rho = \rho(x, y, t) \quad (2.3ก)$$

โดยที่ค่าความหนาแน่นของก้อนของไหลที่ตำแหน่ง 1 นี้ คือ

$$\rho_1 = \rho(x_1, y_1, t_1) \quad (2.3ข)$$

และเมื่อก้อนของไหลเคลื่อนไปถึงตำแหน่ง 2 ค่าความหนาแน่นคือ

$$\rho_2 = \rho(x_2, y_2, t_2) \quad (2.3ค)$$

และเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงนี้เป็นไปอย่างต่อเนื่อง (continuous) ค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่ง 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่ง 1 โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ดังนี้

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \Delta x + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \Delta y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 \Delta t + H.O.T. \quad (2.4)$$

โดย $H.O.T.$ แทนพจน์ต่าง ๆ ที่ประกอบด้วย Δx , Δy และ Δt ที่มีอันดับสูงขึ้นไป (Higher Order Terms) หากย้าย ρ_1 มายังด้านซ้ายของสมการ แล้วทำการหารตลอดด้วย Δt จะได้

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 + H.O.T. \quad (2.5)$$

และเมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ กล่าวคือ ตำแหน่ง 2 นั้น เลื่อนเข้าสู่ตำแหน่ง 1 พจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2.5) จะมีค่าดังต่อไปนี้

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} = \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.6)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = u \quad (2.7)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = v \quad (2.8)$$

และพจน์ $H.O.T.$ ซึ่งยังประกอบด้วย Δx , Δy และ Δt ต่างเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น สมการ (2.5) จึงกลายมาเป็น

$$\frac{D\rho}{Dt} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.9)$$

แต่ละพจน์ในสมการ (2.9) นี้ต่างมีความหมายทางกายภาพ พจน์ $D\rho/Dt$ ทางด้านซ้ายของสมการแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าความหนาแน่นในขณะที่ย้อนของไหลนั้นเคลื่อนผ่านตำแหน่งที่ 1 กล่าวคือ ผู้สังเกตจับตามองตามก้อนของไหลนี้ไปตลอด และเห็นการเปลี่ยนแปลงโดยรวมของค่าความหนาแน่นในก้อนของไหลนี้ พจน์ดังกล่าวซึ่งมีความหมายทางกายภาพเช่นนี้อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ D/Dt ซึ่งมีคำจำกัดความ (definition) ของการเปลี่ยนแปลงโดยสมบูรณ์ไปตลอดการไหลผ่านตำแหน่งใด ๆ ค่าอนุพันธ์สมบูรณ์ เช่น $D\rho/Dt$ นี้มีความหมายต่างไปจากค่าเชิงอนุพันธ์ $\partial\rho/\partial t$ ซึ่งเป็นพจน์สุดท้ายทางด้านขวาของสมการ (2.9) ค่า $\partial\rho/\partial t$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าความหนาแน่นในของไหลก้อนใด ๆ ที่ไหลผ่านตำแหน่งที่ 1 นั้น กล่าวคือ คราวนี้ผู้สังเกตจับตานิ่งอยู่ที่ตำแหน่ง 1 ตลอดเวลาเพื่อดูการเปลี่ยนแปลงของค่าความหนาแน่นของก้อนของไหลต่าง ๆ ที่ไหลผ่านไป จากคำอธิบายนี้จึงเห็นได้ว่าพจน์เชิงอนุพันธ์ D/Dt และ $\partial/\partial t$ นี้มีความหมายทางกายภาพที่ต่างกัน และมีค่าที่ต่างกันดังเห็นได้ชัดจากสมการ (2.9)

ความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการ (2.9) สามารถประยุกต์เข้ากับค่าของคุณสมบัติอื่น ๆ ดังนั้น จึงสามารถเขียนสมการของความสัมพันธ์นี้โดยทั่วไปได้ว่า

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.10)$$

หรือ
$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \quad (2.11)$$

โดย
$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \quad (2.12)$$

สมการ (2.11) สามารถช่วยไขความเข้าใจในคำอธิบายในย่อหน้าที่แล้วมากยิ่งขึ้น พจน์ท้ายทางด้านขวาของสมการนี้ คือ

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) &= (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \\ &= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.13)$$

ซึ่งประกอบด้วย 2 พจน์ย่อยที่มีความเร็วในแต่ละแนวแกนคูณนำหน้าอยู่ ความหมายทางกายภาพจึงเกี่ยวข้องกับการพา และเนื่องจากพจน์ทั้งสองนี้ประกอบด้วยค่าอนุพันธ์ จึงเรียกพจน์ดังกล่าวนี้ว่าเป็นพจน์เชิงอนุพันธ์เนื่องจากการพา (convective derivative) เราจะพบว่าพจน์ดังกล่าวนี้มีบทบาทเป็นอย่างยิ่งในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลด้วยการคำนวณบทบาทอย่างแรกที่สามารถเห็นได้โดยชัดเจนในเบื้องต้นนี้ก็คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์นี้ประกอบด้วยความเร็ว u และ v ซึ่งต่างเป็นตัวไม่รู้ค่าในการแก้ปัญหากลศาสตร์ของไหล ดังนั้น เมื่อพจน์เช่นนี้ปรากฏอยู่ในสมการใด สมการนั้นจึงเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) อันเป็นผลโดยตรงต่อความซับซ้อนยากลำบากในการแก้ปัญหามาก ไม่ว่าจะเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) หรือระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ใด ๆ

เมื่อเราจับตามองก้อนของไหลก้อนหนึ่งเคลื่อนตัวไปโดยตลอด ค่าคุณสมบัติของก้อนของไหลนี้เปลี่ยนแปลงไปโดยตลอดเช่นกัน ไม่ว่าจะเป็นค่าของความหนาแน่น ρ , ความเร็ว u และ v และอุณหภูมิ T ก่อให้เกิดค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ $D\rho/Dt$, Du/Dt , Dv/Dt และ DT/Dt ที่สอดคล้องกันขึ้นตามลำดับ ยกตัวอย่างเช่น ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของอุณหภูมิ

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T) \quad (2.14)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

หมายถึง อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปทั้งหมด (พจน์ทางด้านซ้ายมือ) ของก้อนของไหลหนึ่งซึ่งเราจับตามองไปตามการเคลื่อนตัวของก้อนของไหลนั้น ประกอบด้วยอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป ณ ที่ตำแหน่งหนึ่ง (พจน์แรกทางด้านขวามือ) บวกกับอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการพาในขณะที่ย้อนของไหลเคลื่อนตัวผ่านตำแหน่งนั้น (พจน์ในวงเล็บทางด้านขวามือ) เป็นต้น สมการ (2.15) นี้อาจอธิบายเพื่อให้เกิดภาพพจน์ได้ดียิ่งขึ้น ด้วยการใช้อุปมาต่อไปนี้ สมมุติว่าเรากำลังเดินผ่านประตูเข้าห้องปรับอากาศ ตัวเราจะรู้สึกเย็นลง ความรู้สึกที่เกิดขึ้นนี้คือพจน์เชิงอนุพันธ์ของการพา (convective term ในวงเล็บทางด้านขวามือ) เนื่องจากการเดินจากที่ร้อนผ่านประตูด้วยความเร็ว u และ v เข้าสู่ห้องปรับอากาศที่เย็นกว่า ในขณะที่เดียวกันที่ตำแหน่งของประตูนั้นมีละอองน้ำเย็นพ่นลงใส่ตัวด้วย ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่ลดลงไปอีก (พจน์แรกทางด้านขวามือ) ดังนั้น ความรู้สึกของอุณหภูมิที่ลดลงทั้งหมด (พจน์ทางด้านซ้ายมือ) จึงประกอบด้วย การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิขณะเดินเข้าห้องที่เย็นนั้น ผสมผสานกับความเย็นจากละอองน้ำที่ประตูพ่นเข้าใส่ตัว เป็นต้น

สมการ (2.14) เป็นสมการที่เคยพบเห็นกันมาโดยตลอดในการเรียนวิชาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ในระดับปริญญาตรี กล่าวคือ อุณหภูมิของก้อนของไหลนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งโคออร์ดิเนตและเวลา ดังนี้

$$T = T(x, y, t) \quad (2.16)$$

หากประยุกต์กฎลูกโซ่ (chain rule) ลงในสมการนี้ จะได้

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (2.17)$$

แล้วทำการหารสมการนี้ตลอดด้วย dt จะได้

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

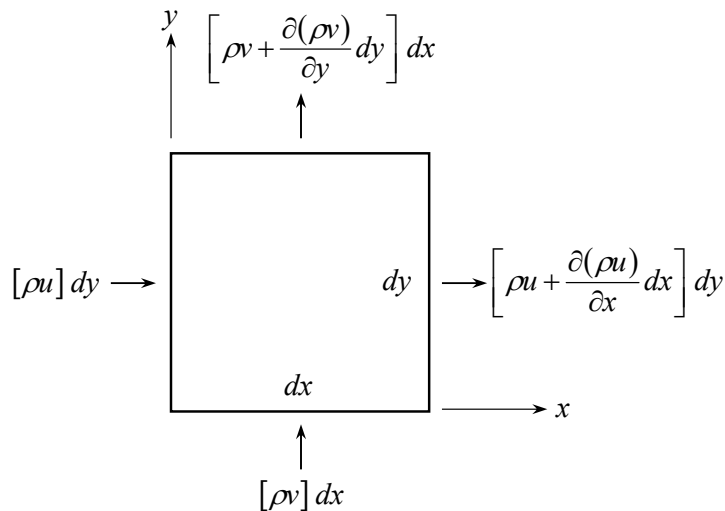
แต่เพราะว่า $dx/dt = u$ และ $dy/dt = v$ ดังนั้น

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.19)$$

โดย dT/dt ทางด้านซ้ายของสมการนี้เรียกว่าค่าอนุพันธ์รวม (total derivative) ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกันกับค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (substantial derivative) ที่กล่าวมาข้างต้นเพราะพจน์ต่าง ๆ ทางด้านขวาของสมการ (2.19) และ (2.15) นั้นเหมือนกัน อย่างไรก็ตาม การอธิบายค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในสมการ (2.15) ก่อให้เกิดภาพพจน์ของความหมายทางกายภาพที่สามารถเข้าใจได้ดีกว่า อันจะนำไปสู่ความเข้าใจในการประดิษฐ์ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่าง ๆ รวมทั้งกระบวนการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลด้วยการคำนวณต่อไป

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์มวล

สมการต่าง ๆ ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลต้องแสดงถึงความเป็นจริงที่มีความหมายทางกายภาพและสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย สมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลนี้เป็นสมการของการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) ซึ่งมีความหมายให้เข้าใจได้ง่าย ๆ ว่า มวลนั้นไม่สูญหายไป การประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์นี้สามารถทำได้โดยง่ายหากพิจารณาการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ ขนาดกว้าง dx และ dy ซึ่งมีความลึกหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูป 2.2 ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งในโดเมนของการไหล



รูป 2.2 รูปแบบแสดงฟลักซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็กที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล เพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์มวล

ตลอดขอบซ้าย dy ของกรอบเล็ก ๆ นี้มีปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลเข้าเท่ากับ $[\rho u]dy$ เนื่องจากทั้งความหนาแน่น ρ และความเร็ว u นั้นเปลี่ยนแปลงไปตลอด ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลออกทางด้านขวาของกรอบคือ $[\rho u + (\partial(\rho u)/\partial x)dx]dy$ นั่นคือ ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในทิศแกน x ผ่านขอบ dy ของการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ นี้คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy - [\rho u] dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy \quad (2.20)$$

ทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในการไหลผ่านขอบ dx ล่างไปยังขอบบนคือ

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx - [\rho v] dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy \quad (2.21)$$

และเนื่องจากปริมาณมวลในกรอบเล็ก ๆ นี้คือ $\rho dx dy$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวล หรือปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลงไปคือ

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy \quad (2.22)$$

แต่เนื่องจากมวลในกรอบเล็ก ๆ นี้ต้องไม่เกิดการสูญหาย ดังนั้น จึงหมายความว่าปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ dx และ dy จำเป็นต้องเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลในกรอบเล็ก ๆ ที่ลดลงในนั้น นั่นคือ

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy$$

ทำการหารสมการนี้ตลอดด้วย $dx dy$ แล้วย้ายข้างจะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.23)$$

หรือ

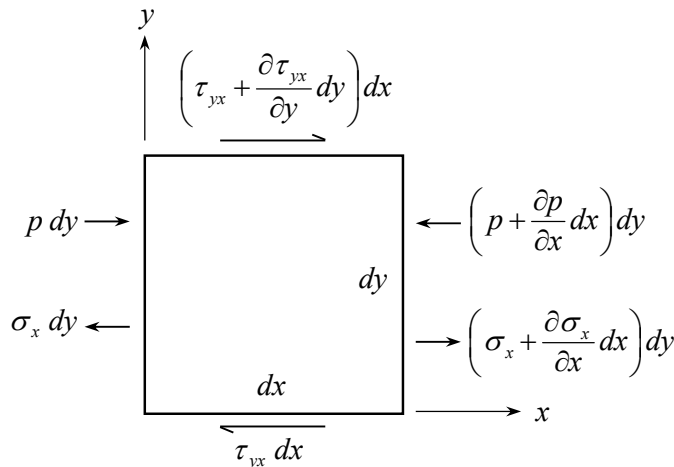
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.24)$$

สมการ (2.24) นี้คือสมการเชิงอนุพันธ์มวล ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของความเป็นจริงสมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล โดยบ่งบอกว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหายไปไหน สมการดังกล่าวนี้อยู่ในรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า (unknown) ถึง 3 ค่า คือ ρ, u และ v ซึ่งต่างเปลี่ยนแปลงไปได้ตลอดโดเมนของ

การไหล ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์มวลนี้เพียงสมการเดียวจึงไม่สามารถใช้แก้ปัญหาได้ และจำเป็นต้องประดิษฐ์สมการของความเป็นจริงอื่น ๆ ในการไหลเพิ่มเติมขึ้นอีก

2.4 สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

ความเป็นจริงชนิดที่สองของการไหลโดยทั่วไปที่สามารถนำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพิ่มเติมได้นั้นมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ที่กล่าวว่า แรงเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร่ง ดังนั้น ในการใช้กฎข้อที่สองของนิวตันที่ต้องมีความสัมพันธ์กับการเร่ง เราจะพิจารณามวลซึ่งมีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูป 2.3 ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูป 2.3 รูปแบบแสดงแรงต่าง ๆ ในทิศแกน x ที่กระทำบนก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

เพื่อให้่ายแก่การทำความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการต่อไป รูป 2.3 นี้แสดงแรงต่าง ๆ ที่กระทำในทิศแกน x เท่านั้น กฎข้อที่สองของนิวตันเมื่อพิจารณาในทิศแกน x คือ

$$F_x = ma_x \quad (2.25)$$

โดย F_x คือแรงรวมในทิศแกน x , m คือมวลของก้อนของไหลนี้ และ a_x คือความเร่งของมวลในทิศแกน x

แรงรวมในทิศแกน x ประกอบด้วยแรงที่กระทำที่ผิวต่าง ๆ (surface forces) และแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง (body force) สำหรับแรงที่กระทำที่ผิวนั้นยังประกอบด้วยแรงอันเนื่องมาจากความดัน p , ความเค้นตั้งฉาก (normal stress) σ_x และความเค้นเฉือน (shear stress) τ_{yx} สำหรับความเค้นเฉือนนี้ตัวห้อยแรก (y ในที่นี้) ระบุด้านที่ตั้งฉากกับแกน y ซึ่งมีความเค้นเฉือนนี้กระทำอยู่ ส่วนตัวห้อยหลัง (x ในที่นี้) ระบุทิศทางของความเค้นเฉือนที่กระทำ ดังนั้น แรงรวมที่กระทำที่ผิวต่าง ๆ ในทิศแกน x ของก้อนมวลนี้คือ

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx \quad (2.26)$$

ส่วนแรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวเองในทิศแกน x คือ

$$\rho f_x (dx dy) \quad (2.27)$$

ดังนั้น แรงรวมทั้งหมดในทิศแกน x ที่เกิดจากพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2.26) และ (2.27) คือ

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] dx dy + \rho f_x dx dy \quad (2.28)$$

ในขณะที่มวลของก้อนของไหลนี้คือ

$$m = \rho (dx dy) \quad (2.29)$$

ค่าความเร่ง a_x ของมวลในสมการ (2.25) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต่อเวลา เนื่องจากเรากำลังจับตาเฝ้าดูมวลนี้ที่กำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล ดังนั้น ความเร่ง a_x นี้คือ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของ u กล่าวคือ

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.30)$$

แทนสมการ (2.28)-(2.30) ลงในกฎข้อที่สองของนิวตันสมการ (2.25) แล้วหารตลอดด้วย $dx dy$ จะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.31ก)$$

ในทำนองเดียวกัน กฎข้อที่สองของนิวตันในทิศแกน y ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกัน ดังนี้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.31ข)$$

สมการ (2.31ก-ข) นี้เรียกว่าสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) เพื่อเป็นเกียรติแก่ชาวฝรั่งเศสชื่อ M. Navier และชาวอังกฤษชื่อ G. Stokes ซึ่งต่างประดิษฐ์สมการนี้ขึ้นมาได้เช่นเดียวกัน

สมการนาเวียร์-สโตกส์ (2.31ก-ข) ต่างอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์อันเนื่องมาจากการประดิษฐ์สมการโดยการจับตามองก้อนมวลของไหลที่เคลื่อนตัวไป ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์นี้สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาซึ่งเปรียบเสมือนผู้สังเกตจับตาดูอยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วเฝ้ามองการเปลี่ยนแปลงของของไหลที่เคลื่อนที่ผ่านไป โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.11) ประยุกต์เข้ากับความเร็ว u ดังนี้

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u \quad (2.32)$$

ดังนั้น

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u \quad (2.33)$$

นั่นคือ พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถแทนด้วยพจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ (2.33) นี้ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดา และสามารถนำไปใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์มวล (2.24) เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ เพราะทุกพจน์ในสมการต่าง ๆ เหล่านี้ล้วนอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาแล้ว อย่างไรก็ตาม พจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ (2.33) นี้ยังสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายและสะดวกมากขึ้นอีกโดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการดังต่อไปนี้

เนื่องจาก

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ดังนั้น

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.34)$$

และเนื่องจาก

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) = u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \vec{\nabla} u$$

ดังนั้น

$$\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) - u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.35)$$

แทนสมการ (2.34) และ (2.35) ลงในสมการ (2.33) จะได้

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho u \bar{V}) - u \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V}) \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V}) \right] + \bar{\nabla} \cdot (\rho u \bar{V})\end{aligned}\quad (2.36)$$

แต่เนื่องจากผลรวมของ 2 พจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมการเชิงอนุพันธ์มวล (2.24) ดังนั้น สมการ (2.36) จึงกลายมาเป็น

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho u \bar{V}) \quad (2.37)$$

แทนสมการ (2.37) นี้ลงในสมการ (2.31ก) จะได้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho u \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.38ก)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการ (2.31ข) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho v \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.38ข)$$

สมการ (2.38ก-ข) นี้เรียกว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษณ์ (conservation form)

พจน์ทางด้านขวามือของสมการนาเวียร์-สโตกส์นี้ ประกอบด้วยค่าความเค้นตึงลากและความเค้นเฉือน ซึ่งจำเป็นต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วในแกนต่าง ๆ กัน ในปลายคริสต์ศตวรรษที่ 17 ไอแซก นิวตัน (Isaac Newton) ได้เสนอว่า ค่าความเค้นเหล่านี้แปรผันโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (velocity gradient) ข้อเสนอแนะนี้พบที่สามารถใช้ได้กับของไหลทั่วไปในทางปฏิบัติ ทำให้เป็นที่ยอมรับและเรียกของไหลที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่า ของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) ข้อเสนอดังกล่าวก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเร็ว ดังนี้

$$\sigma_x = \lambda(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.39ก)$$

$$\sigma_y = \lambda(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.39ข)$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2.39ค)$$

โดย μ แทนค่าความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity) หรือบางครั้งถูกเรียกว่าค่าความหนืดที่หนึ่ง (first viscosity) และ λ คือค่าความหนืดที่สอง (second viscosity) ซึ่งสโตกส์ได้ตั้งสมมติฐาน (Stokes's hypothesis) ไว้ว่า

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.40)$$

และพบว่าสมมติฐานดังกล่าวนี้ใช้ได้ดีหากของไหลนั้นเป็นแก๊ส (gas) แต่หากของไหลนั้นเป็นของเหลว (liquid) ซึ่งโดยมากการไหลสำหรับปัญหาทั่ว ๆ ไปนั้นจะไม่เกิดการอัดตัว (incompressible) กล่าวคือ ค่าความหนาแน่น ρ นั้นคงที่ สมการอนุพันธ์มวล (2.24) จึงลดรูปลงเป็น $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ หรือ $\text{div } \vec{V} = 0$ ทำให้ค่าความหนืดที่สอง λ นี้ไม่ได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณ และความเค้นตึงจากในสมการ (2.39ก-ข) จึงมีค่าเป็น 2 เท่าของค่าความหนืดพลศาสตร์คูณกับค่าการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้เอง ทำให้การค้นคว้าหาความจริงของค่าความหนืดที่สอง λ ไม่ค่อยได้รับความสนใจ จึงไม่เกิดความชัดเจนและไม่ได้รับการยืนยันโดยแน่ชัดตราบนานเท่านี้

เมื่อแทนค่าความเค้นต่าง ๆ ที่อยู่ในรูปของความเร็วจากสมการ (2.39ก-ค) ลงในสมการ (2.38ก-ข) ก่อให้เกิดสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบอนุพันธ์ ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้ดังนี้

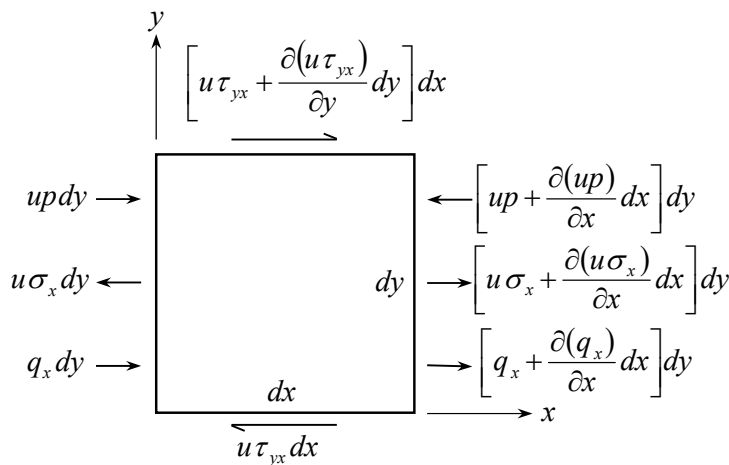
$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \rho f_x \end{aligned} \quad (2.41ก)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho f_y \end{aligned} \quad (2.41ข)$$

สมการ (2.41ก-ข) นี้ แสดงถึงความซับซ้อนของสมการนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งพจน์ต่าง ๆ นั้นอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ของตัวไม่รู้ค่า ยิ่งไปกว่านั้น พจน์ที่สองและสามทางด้านซ้ายมือของสมการทั้งสองนี้ต่างเป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear terms) ซึ่งก่อให้เกิดความซับซ้อนต่อเนื่องในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเช่นนี้ไม่ว่าจะด้วยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใด ๆ ก็ตาม

2.5 สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

การไหลหลายชนิด เช่น การไหลผ่านยานอวกาศที่ขับเคลื่อนด้วยความเร็วสูงหลายเท่าของเสียง ไปจนถึงการไหลของอากาศร้อนได้หลังคานั้น ความเร็วของการไหลและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปในของไหลนั้นต่างขึ้นอยู่กับกันและกัน ดังนั้น ความจริงชนิดที่สามของการไหลใด ๆ ที่สามารถนำมาใช้เพื่อประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพิ่มเติมได้อีกหนึ่งคือ กฎที่ว่าพลังงานนั้นไม่สูญหายไป (conservation of energy) รูป 2.4 แสดงมวลที่มีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูป 2.4 รูปแบบแสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในทิศแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวล ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงานสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยใช้กฎข้อแรกของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนั้น นั่นคือ

อัตราการเปลี่ยนแปลง ของพลังงานใน ก้อนมวล	=	ปริมาณฟลักซ์ ความร้อนที่ให้ แก่มวล	+	อัตราของงานที่เกิดขึ้น เนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนั้น	(2.42)
หรือ A	=	B	+	C	(2.42)

โดย A, B และ C แทนความหมายต่าง ๆ ดังแสดงในสมการ (2.42) นี้

หากเริ่มต้นพิจารณาที่พจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนี้ แรงชนิดแรกคือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลเอง ซึ่งเมื่อคูณกับความเร็วของการไหลในทิศทางนั้น ก่อให้เกิดอัตราของงานคือ

$$\rho \bar{f} \cdot \bar{V} (dx dy)$$

จากรูป 2.4 อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy = - \frac{\partial(up)}{\partial x} dx dy$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นตึงจาก σ_x ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx \right] dy - u\sigma_x dy = \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx dy$$

และอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right] dx - u\tau_{yx} dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลในทิศแกน y ก็สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้เช่นกัน ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนี้คือ

$$C = \left[- \left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \right) + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right] dx dy + \rho \bar{f} \cdot \bar{V} dx dy \quad (2.43)$$

สำหรับพจน์ B ซึ่งแทนปริมาณพลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลนั้นประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกคือปริมาณพลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนมวล ยกตัวอย่างเช่น ปริมาณพลักซ์ความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เองภายในก้อนมวลนั้น (internal heat generation) หากกำหนดให้ $\bar{Q}$ แทนปริมาณพลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นเองต่อมวลหนึ่งหน่วย ดังนั้น ปริมาณพลักซ์ที่เกิดขึ้นเองสำหรับก้อนมวลนี้คือ

$$\rho \bar{Q} (dx dy)$$

และจากรูป 2.4 ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน x ผ่านขอบ dy ทั้งทางด้านซ้ายและด้านขวาของก้อนมวลคือ

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน y ผ่านขอบ dx ทั้งด้านล่างและด้านบนของก้อนมวลคือ

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx = - \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy$$

ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนมวลนี้คือ

$$B = \left[\rho \bar{Q} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.44)$$

แต่จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นแปรผันขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{และ} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.45)$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหล ดังนั้น พจน์ B จึงกลายมาเป็น

$$B = \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.46)$$

ส่วนพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลอันประกอบด้วย พลังงานภายใน (internal energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนไหวของโมเลกุลภายในของไหล นั้น และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากของไหลนั้นเกิดการไหล หาก e แทนพลังงานภายใน และ $V^2/2$ คือพลังงานจลน์ที่ก้อนมวลนั้นไหลด้วยความเร็ว V ดังนั้น พลังงานรวม (total energy) คือ $e + V^2/2$ ซึ่งมีหน่วยต่อหนึ่งหน่วยมวล เนื่องจากปริมาณมวลทั้งหมดของก้อนมวลนี้คือ $\rho dx dy$ ดังนั้น พจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลนี้คือ

$$A = \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy \quad (2.47)$$

ทำการแทนพจน์ A ซึ่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจากสมการ (2.47) นี้ และพจน์ B ซึ่งคือปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวลจากสมการ (2.46) รวมทั้งพจน์ C ซึ่งคืออัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนั้นจากสมการ (2.43) ลงในสมการ (2.42) แล้วหารตลอดด้วย $dx dy$ ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน ดังนี้

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = & \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} \\ & + \frac{\partial (u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\sigma_y)}{\partial y} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.48)$$

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน (2.48) ที่ประติมากรรมขึ้นมานี้ อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (substantial derivative) ซึ่งจำเป็นต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาจึงสามารถใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์มวล (2.24) และสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม (2.41) ได้ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในสมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน (2.48) นี้กระทำบนทั้งพจน์ของพลังงานภายใน e และพจน์ของพลังงานจลน์ $V^2/2$ ดังนั้น เพื่อให้ง่ายแก่ความเข้าใจในการประติมากรรมต่อไป จึงขอแสดงขั้นตอนการแปลงรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียวก่อน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนในการแปลงรูปแบบค่าอนุพันธ์เริ่มจากการคูณสมการ (2.31ก) และ (2.31ข) ด้วยความเร็ว u และ v ตามลำดับ จะได้

$$\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x \quad (2.49ก)$$

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho v f_y \quad (2.49ข)$$

นำทั้งสองสมการนี้มารวมกัน และเนื่องจาก $u^2 + v^2 = V^2$ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} = & -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \\ & + \rho (u f_x + v f_y) \end{aligned} \quad (2.50)$$