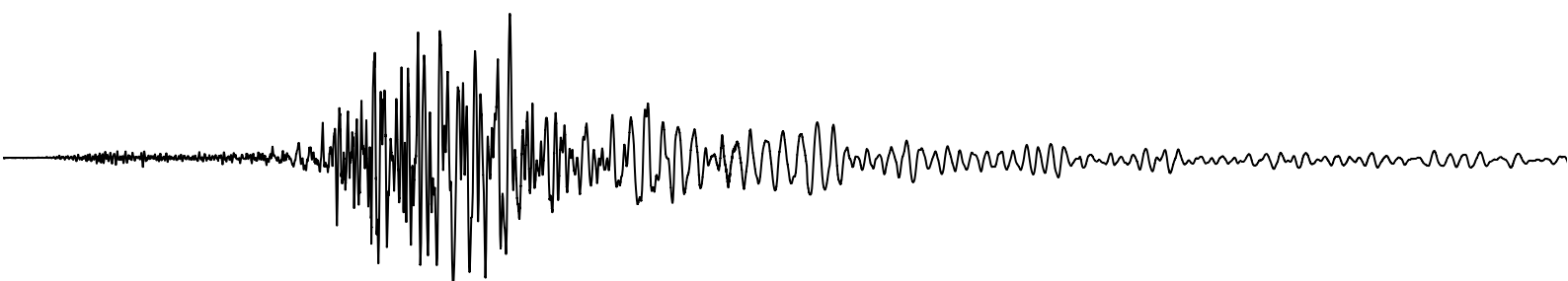


พลศาสตร์โครงสร้างพื้นฐาน

สำหรับการออกแบบต้านทานแรงลมและแรงเนื่องจากแผ่นดินไหว

ศาสตราจารย์ ดร.นคร ภู่วโรดม



พลศาสตร์โครงสร้างพื้นฐาน

สำหรับการออกแบบต้านทานแรงลมและแรงเนื่องจากแผ่นดินไหว

โดย นคร ภู่วโรดม

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสือ : 978-616-455-743-7

จัดทำโดย นคร ภู่วโรดม

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี

<https://sites.google.com/view/nakhorn/>

พลศาสตร์โครงสร้างเป็นหนึ่งในศาสตร์สำคัญสำหรับการวิเคราะห์และออกแบบให้โครงสร้างมีความปลอดภัยและเหมาะสมในการใช้งาน และเป็นแกนหลักในมาตรฐานการออกแบบโครงสร้างต้านทานแรงลม และแรงเนื่องจากแผ่นดินไหว ซึ่งเป็นมาตรฐานที่เริ่มใช้ในประเทศมาไม่นาน จึงถือเป็นเรื่องใหม่สำหรับวิศวกรโดยทั่วไป และด้วยความสำคัญของเนื้อหาจึงทำให้สถาบันการศึกษาหลายแห่งเริ่มสอนในระดับปริญญาตรีและปริญญาโท รวมถึงที่สถาบันที่ผู้แต่งทำการสอนอยู่ด้วย

จากประสบการณ์ของผู้แต่งที่ได้บรรยายให้กับนักศึกษาในวิชาพลศาสตร์โครงสร้าง และวิชาการออกแบบโครงสร้างต้านทานแรงลมและแรงเนื่องจากแผ่นดินไหว รวมทั้งการบรรยายให้กับวิศวกรในการอบรมในเรื่องที่เกี่ยวข้องนี้ พบว่า เนื้อหาที่สำคัญของพลศาสตร์โครงสร้างที่จำเป็นต่อการนำมาใช้งานแม้มืออยู่ในหนังสือภาษาต่างประเทศหลายเล่ม แต่เป็นการยากที่จะให้นักศึกษาหรือวิศวกรที่มีพื้นฐานและประสบการณ์ต่าง ๆ กัน ทำการศึกษาและเข้าใจด้วยตนเองเพื่อนำไปใช้ประโยชน์ต่อไปได้ดี และด้วยการที่มาตรฐานการออกแบบใหม่ ๆ มีที่มาอยู่บนพื้นฐานของพลศาสตร์โครงสร้างเป็นหลักประกอบกับผลจากการศึกษาวิจัยในประเทศ แต่ยังไม่มีการอธิบายไว้อย่างแพร่หลาย และหลักการเหล่านั้นสามารถใช้กับมาตรฐานของประเทศอื่น ๆ ที่เป็นสากล ดังนั้นจึงควรที่จะมีหนังสือเพื่อช่วยให้ผู้ที่ใช้งานมีความเข้าใจในหลักการ มากกว่าเป็นเพียงผู้คำนวณตามขั้นตอนหรือสมการที่กำหนดในมาตรฐานเหล่านั้น

หนังสือเล่มนี้อธิบายเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานสำหรับพลศาสตร์โครงสร้าง โดยผู้แต่งพยายามอธิบายความหมายทางกายภาพและใช้รูปแบบคณิตศาสตร์ที่จำเป็น และเสริมด้วยผลการวิจัยสำคัญที่เกี่ยวข้อง โดยเนื้อหาแบ่งเป็นสองส่วนหลัก ส่วนที่หนึ่งคือทฤษฎีเบื้องต้นของพลศาสตร์โครงสร้าง และส่วนที่สองเป็นการประยุกต์พลศาสตร์โครงสร้างเพื่อการออกแบบโครงสร้างต้านทานแรงลมและแรงเนื่องจากแผ่นดินไหว โดยมุ่งหวังให้เป็นประโยชน์กับนักศึกษาในสาขาวิศวกรรมโยธาที่ใช้ประกอบการเรียนและการวิจัย และเป็นประโยชน์ต่อวิศวกรผู้ที่ต้องใช้การวิเคราะห์เชิงพลศาสตร์ในการแก้ปัญหาเชิงวิศวกรรม

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา และอาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ความรู้กับผู้แต่งมาในทุกระดับการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ศาสตราจารย์ กิตติคุณ ดร.ปณิธาน ลักคุณะประสิทธิ์ ศาสตราจารย์ ดร. เป็นหนึ่ง วานิชชัย และ Professor Hiroki Yamaguchi ผู้เป็นครูสอนวิชาพลศาสตร์โครงสร้างให้กับผู้แต่ง ขอขอบคุณคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่สนับสนุนให้ผู้แต่งได้ทำการสอน วิจัยและบริการวิชาการ ขอขอบคุณหน่วยงานต่าง ๆ และเพื่อนร่วมงานในวงการวิชาการและภาคปฏิบัติทุกท่านที่ได้ร่วมกันพัฒนาองค์ความรู้ มาตรฐานการออกแบบ และแนวทางปฏิบัติที่เหมาะสมของประเทศ และขอขอบคุณนักศึกษาจำนวนมาก โดยเฉพาะ นายณัฐพล มากเทพพงษ์ นายอมรเทพ จิรศักดิ์จำรูญศรี นายภคพงศ์ ภัทราคม และ นายวีระ ชูปทอง ที่ช่วยงานวิจัยหลายด้าน

และสิ่งสนับสนุนที่สำคัญที่สุดต่อผู้แต่งคือ ครอบครัวที่มีภรรยาและลูกทั้งสองที่ทำให้กำลังใจ เสบียง ความรื่นเริง และการสนับสนุนทุกด้านเสมอมา

ผู้แต่งหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผู้อ่านจะได้รับประโยชน์และสนุกกับพลศาสตร์โครงสร้างด้วยหนังสือเล่มนี้

นคร ภู่วโรดม

เนื้อหา	หน้า
คำนำ	i
สารบัญ	iii
บทที่ 1 บทนำ	1-1
1.1 ความสำคัญของพลศาสตร์โครงสร้าง	1-1
1.2 ลักษณะของปัญหาเชิงพลศาสตร์	1-1
1.3 ระดับชั้นความเสรี	1-2
1.4 วิธีระบุระดับชั้นความเสรี	1-4
1.5 สมการการเคลื่อนที่	1-6
1.6 สรุปเนื้อหาประจำบท	1-7
บทที่ 2 ระบบที่มีระดับชั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง	2-1
2.1 แบบจำลองของระบบโครงสร้างอย่างง่าย	2-1
2.2 องค์ประกอบพื้นฐานของระบบพลศาสตร์	2-1
2.3 สมการของการเคลื่อนที่ของระบบ SDOF	2-6
2.4 สมการของการเคลื่อนที่สำหรับโครงสร้างภายใต้แผ่นดินไหว	2-8
2.5 ผลของแรงโน้มถ่วงโลก	2-10
2.6 มวลของการหมุนรอบแกน	2-10
2.7 สรุปเนื้อหาประจำบท	2-17
แบบฝึกหัด	2-18
บทที่ 3 การสั่นอิสระ	3-1
3.1 สมการการเคลื่อนที่ของการสั่นอิสระ	3-1
3.2 การสั่นอิสระของระบบที่ไม่มีมวลหน่วง	3-1
3.3 การสั่นอิสระของระบบที่มีมวลหน่วง	3-8
3.4 การหาค่าอัตราส่วนความหน่วงจากการสั่นแบบอิสระ	3-11
3.5 การหาคำตอบของการสั่นอิสระในรูปจำนวนเชิงซ้อน	3-15
3.6 สรุปเนื้อหาประจำบท	3-20
แบบฝึกหัด	3-20

เนื้อหา	หน้า
บทที่ 4 การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์มอนิก	4-1
4.1 สมการการเคลื่อนที่ของระบบภายใต้แรงภายนอกแบบฮาร์มอนิก	4-1
4.2 ระบบที่ไม่มี ความหน่วง	4-1
4.3 ระบบที่มีความหน่วง	4-6
4.4 การส่งผ่านของแรงและระบบแยกการสั่นสะเทือน	4-14
4.5 การวิเคราะห์ในรูปจำนวนเชิงซ้อน	4-19
4.6 สรุปเนื้อหาประจำบท	4-20
แบบฝึกหัด	4-21
บทที่ 5 ผลตอบสนองต่อแรงพลศาสตร์ทั่วไป	5-1
5.1 การสั่นเนื่องจากแรงที่มีคาบเกิดซ้ำ	5-1
5.2 การสั่นเนื่องจากแรงกระตุ้น	5-8
5.3 วิธีการทางตัวเลขสำหรับการสั่นเนื่องจากแรงในรูปแบบใด ๆ	5-13
5.4 สรุปเนื้อหาประจำบท	5-19
แบบฝึกหัด	5-19
บทที่ 6 ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง	6-1
6.1 การสร้างสมการการเคลื่อนที่	6-2
6.2 การสร้างเมทริกซ์คุณสมบัติของระบบ MDOF	6-10
6.3 หลักการของการวิเคราะห์เชิงโหมด	6-13
6.4 ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว	6-15
6.5 คุณสมบัติเชิงตั้งฉากของเมทริกซ์คุณสมบัติ	6-18
6.6 การวิเคราะห์ผลตอบสนองโดยวิธีการวิเคราะห์เชิงโหมด	6-19
6.7 การมีส่วนร่วมเชิงโหมด	6-27
6.8 สรุปเนื้อหาประจำบท	6-34
แบบฝึกหัด	6-34
บทที่ 7 ระบบที่มีคุณสมบัติต่อเนื่อง	7-1
7.1 การสร้างสมการการเคลื่อนที่	7-1
7.2 ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว	7-4
7.3 คุณสมบัติเชิงตั้งฉากสำหรับระบบที่มีคุณสมบัติต่อเนื่อง	7-13
7.4 การวิเคราะห์เชิงโหมดสำหรับระบบที่มีคุณสมบัติต่อเนื่อง	7-15
7.5 การวิเคราะห์โดยการประมาณ	7-21

เนื้อหา	หน้า
7.6 สรุปเนื้อหาประจำบท	7-27
แบบฝึกหัด	7-27
บทที่ 8 พื้นฐานของผลกระทบของแรงลมต่อโครงสร้าง	8-1
8.1 ธรรมชาติของลม	8-1
8.2 คุณลักษณะของลมสำหรับการพิจารณาแรงลม	8-2
8.3 แรงลมที่กระทำต่อโครงสร้าง	8-4
8.4 ลักษณะของแรงลมและผลกระทบต่อโครงสร้าง	8-8
8.5 หลักการวิเคราะห์แรงลมสถิตเทียบเท่าและผลตอบสนอง	8-9
8.6 มาตรฐานการคำนวณแรงลมและผลตอบสนองของอาคาร	8-18
8.7 การรวมผลของแรงลมในทิศทางลม แรงลมในทิศตั้งฉากกับทิศทางลมและโมเมนต์บิดสถิตเทียบเท่า	8-31
8.8 ตัวอย่างการคำนวณแรงลมและผลตอบสนองของอาคารสูงตามมาตรฐาน มยผ. 1311-50	8-32
8.9 การศึกษาผลกระทบของแรงลมต่อโครงสร้างด้วยอุโมงค์ลม	8-45
8.10 สรุปเนื้อหาประจำบท	8-49
แบบฝึกหัด	8-50
บทที่ 9 พื้นฐานของการออกแบบต้านทานแรงเนื่องจากแผ่นดินไหวของโครงสร้าง	9-1
9.1 ลักษณะของการสั่นสะเทือนของพื้นดินเนื่องจากแผ่นดินไหว	9-1
9.2 สเปกตรัมผลตอบสนองแบบอีลาสติก	9-5
9.3 ผลตอบสนองแบบอินอีลาสติก	9-15
9.4 พฤติกรรมของโครงสร้างแบบอินอีลาสติกที่ใช้ในมาตรฐานการออกแบบ	9-20
9.5 กฎหมายและมาตรฐานสำหรับการออกแบบต้านทานแรงเนื่องจากแผ่นดินไหว	9-21
9.6 การวิจัยด้านพลศาสตร์สำหรับมาตรฐาน มยผ. 1302	9-22
9.7 การออกแบบโดยวิธีเชิงพลศาสตร์ (วิธีสเปกตรัมการตอบสนองแบบโหมด)	9-42
9.8 สรุปเนื้อหาประจำบท	9-53
แบบฝึกหัด	9-53
บรรณานุกรม	(1)
คำตอบของแบบฝึกหัด	(5)
ดัชนี	(9)

1.1 ความสำคัญของพลศาสตร์โครงสร้าง

ในการออกแบบโครงสร้างสำหรับงานวิศวกรรมโยธาให้สามารถรับแรงที่เกิดจากการใช้งานหรือจากสภาพแวดล้อมต่าง ๆ แบบจำลองของแรงเหล่านั้นมักถูกจำลองให้อยู่ในรูปแบบง่ายเพื่อสะดวกต่อการจำลองให้อยู่ในรูปสมการเชิงคณิตศาสตร์และวิเคราะห์ผล เช่น น้ำหนักบรรทุกคงที่ น้ำหนักบรรทุกจร ที่ถูกจำลองให้เป็นแรงแบบสถิต (Static force) ซึ่งลักษณะของแรงดังกล่าวไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาอย่างมีนัยสำคัญ หรือเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ จึงทำให้การวิเคราะห์จากแบบจำลองของแรงสถิตให้ผลที่ถูกต้องได้ อย่างไรก็ดี สำหรับแรงที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาอย่างมีนัยสำคัญ เช่น แรงลม แรงเนื่องจากการสั่นสะเทือนของแผ่นดินไหว แรงจากการจราจร แรงจากเครื่องจักร หรือแรงจากกิจกรรมของมนุษย์ เป็นต้น ซึ่งจัดเป็นแรงพลศาสตร์ (Dynamic force) แรงเหล่านี้อาจทำให้เกิดผลการตอบสนองของโครงสร้างที่แตกต่างไปอย่างมากจากการวิเคราะห์แรงแบบสถิต และในหลายกรณีที่เป็นสาเหตุให้เกิดการวิบัติของโครงสร้าง เช่น อาคารถล่มเนื่องจากแผ่นดินไหว หรือความเสียหายต่อโครงสร้างจากพายุ เป็นต้น ซึ่งเป็นปัญหาที่ต้องคำนึงถึงความปลอดภัย (Safety) ของโครงสร้าง ผลกระทบจากแรงพลศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่งที่พบทั่วไปคือผลต่อความเหมาะสมในการใช้งาน (Serviceability) ได้แก่ ระดับการสั่นสะเทือนที่สูงเกินระดับการยอมรับได้ของผู้ใช้อาคาร การสั่นสะเทือนที่มีผลต่อเครื่องมือที่ต้องการความละเอียดแม่นยำสูง ปัญหาการล้าของวัสดุ เป็นต้น ซึ่งในการวิเคราะห์ผลของแรงพลศาสตร์ต้องคำนึงถึงการสร้างแบบจำลองของโครงสร้าง แบบจำลองของแรง และกระบวนการวิเคราะห์ เพื่อให้สามารถแสดงพฤติกรรมที่มีผลเปลี่ยนแปลงตามเวลาให้ได้สมบูรณ์ที่สุด

สามารถกล่าวได้ว่า วัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์เชิงพลศาสตร์คือ เพื่อวิเคราะห์และแปลความหมายของการตอบสนองที่เกิดขึ้นกับโครงสร้างภายใต้การกระทำของแรงแบบพลศาสตร์ สำหรับการตรวจสอบความปลอดภัย และ/หรือ ความเหมาะสมในการใช้งานของโครงสร้าง

1.2 ลักษณะของปัญหาเชิงพลศาสตร์

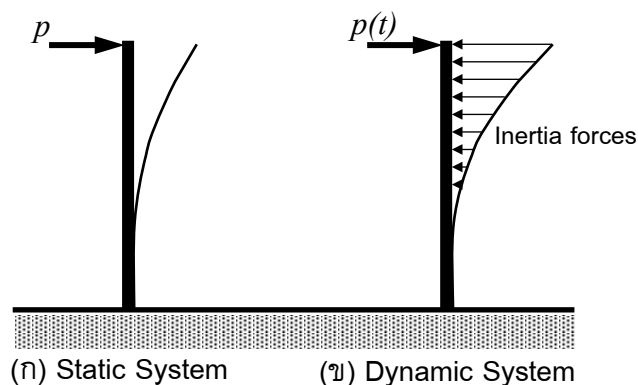
นิยามของ “พลศาสตร์” ในที่นี้คือ สิ่งที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้น แรงพลศาสตร์จึงหมายถึง แรงที่ขนาด ทิศทาง และ/หรือ ตำแหน่งที่กระทำ เปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งทำให้เกิดผลตอบสนองเชิงพลศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ เช่น แรงภายใน การเปลี่ยนรูป ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วยเช่นกัน

ลักษณะของปัญหาเชิงพลศาสตร์ที่ต่างจากปัญหาเชิงสถิตยศาสตร์มี 2 ประเด็นหลัก คือ

1) ปัญหาเชิงพลศาสตร์มีลักษณะเปลี่ยนแปลงตามเวลาทั้งแรงและผลตอบสนอง ทำให้คำตอบของปัญหาไม่มีเพียงแค่ค่าเดียว ดังนั้น คำตอบจึงต้องอยู่ในรูปลำดับตามเวลาในช่วงที่สนใจ หรือผลตอบสนองตามประวัติเวลา (Response time history)

2) เมื่อเปรียบเทียบระหว่างปัญหาแบบสถิตยศาสตร์และพลศาสตร์ดังรูปที่ 1.1 กล่าวได้ว่า ในปัญหาแบบสถิตยศาสตร์ในรูป (ก) ระบบโครงสร้างจะอยู่ในสภาวะสมดุลระหว่างแรงภายนอกและแรงภายในที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ผลตอบสนองของโครงสร้างในรูปของการกระจัด (Displacement) มีความสัมพันธ์กับแรงภายในผ่านกลไกของความยืดหยุ่นของโครงสร้าง แต่ในปัญหาแบบพลศาสตร์ที่ผลตอบสนองมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลานั้นทำให้เกิดเป็นอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลา คือ ความเร็ว (Velocity) และความเร่ง (Acceleration) ของการเคลื่อนที่ ซึ่งทำให้แรงภายในโครงสร้างมีความสัมพันธ์กับค่าผลตอบสนองในทั้ง 3 รูปแบบนี้ด้วย การวิเคราะห์เชิงพลศาสตร์จึงมีความซับซ้อนขึ้นเนื่องจากการมีอยู่ของแรงเหล่านี้ ดังนั้นลักษณะที่สำคัญของปัญหาเชิงพลศาสตร์ คือ การมีอยู่ของแรงภายในที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งหากแรงภายนอกมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาอย่างมีนัยสำคัญแล้วจะส่งผลให้เกิดการตอบสนองเชิงพลศาสตร์ที่ชัดเจน

จากตัวอย่างในรูปที่ 1.1 (ข) หากพิจารณาว่าที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของเสามีมวลและเกิดความเร่งขึ้น แรงที่เกิดจากการเคลื่อนที่แบบมีความเร่งตามกฎหมายของนิวตันมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลกับความเร่งที่แต่ละตำแหน่ง และเกิดแรงต้านการเคลื่อนที่นี้คือแรงภายในในรูปแบบของ แรงเฉื่อย (Inertia force) ซึ่งกระจายอยู่ที่มวลตลอดทั้งโครงสร้าง ดังนั้น สมดุลของแรงพลศาสตร์จึงมีผลจากแรงเฉื่อย และแรงอื่น ๆ ที่เป็นผลจากการเคลื่อนที่รวมอยู่ด้วย จึงควรสังเกตว่า จากที่เข้าใจว่าตำแหน่งที่มีมวลคือตำแหน่งที่มีแรงเฉื่อย ดังนั้นตำแหน่งที่ควรพิจารณาแรงเฉื่อยควรต้องเป็นตำแหน่งที่มีมวลหลักของโครงสร้าง ซึ่งนำไปสู่เรื่องการพิจารณาระดับขั้นความเสรี ในหัวข้อต่อไป



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างเปรียบเทียบความแตกต่างของระบบแบบสถิตยศาสตร์และพลศาสตร์

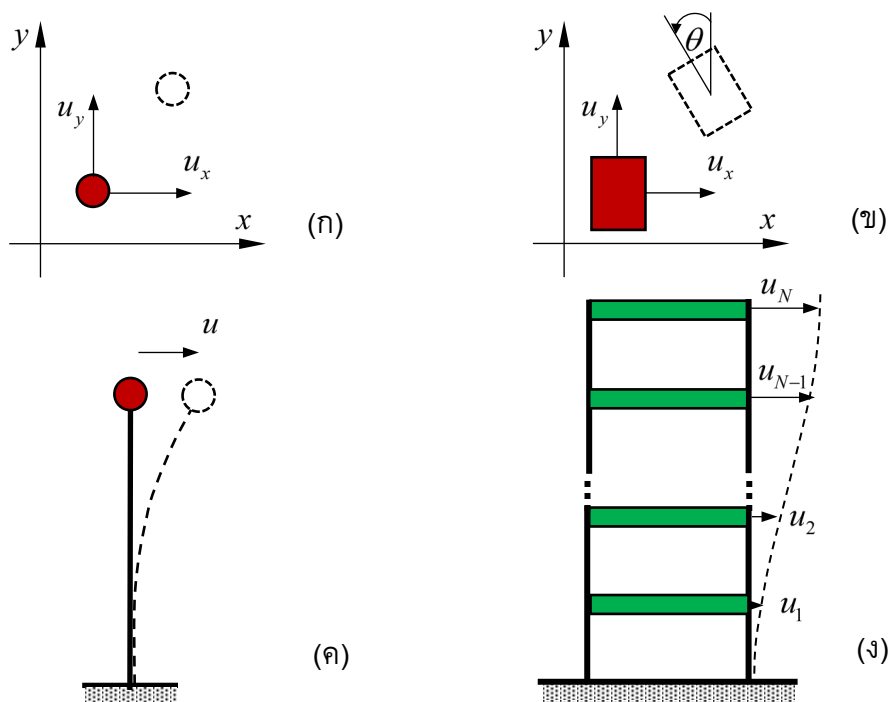
1.3 ระดับขั้นความเสรี (Degree-of-Freedom, DOF)

เมื่อพิจารณาตัวอย่างของระบบพลศาสตร์ในรูปที่ 1.1 (ข) เนื่องจากมวลของระบบมีการกระจายอยู่ตลอดทั้งความสูง จึงจำเป็นต้องพิจารณาแรงที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งต่าง ๆ นี้ให้ได้ครบสมบูรณ์ ซึ่งทำให้การวิเคราะห์เพิ่มความซับซ้อนขึ้น แต่อาจใช้การจำลองว่าแบ่งโครงสร้างออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ และกำหนดให้มวลของแต่ละชิ้นรวมกันอยู่ที่ตำแหน่งนั้น ๆ ซึ่งจะสามารถใช้การวิเคราะห์หาผลตอบสนอง

เฉพาะที่ตำแหน่งของมวลที่พิจารณาเพื่อวิเคราะห์นั้นได้ โดยจำนวนของตัวแปรของผลตอบสนองที่ต้องใช้สำหรับการวิเคราะห์สำหรับระบบหนึ่ง ๆ นี้เรียกว่า ระดับขั้นความเสรี (Degree-of-Freedom, DOF)

ระดับขั้นความเสรี คือ จำนวนของพิกัดอิสระที่สามารถใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของระบบได้อย่างสมบูรณ์ หรือ จำนวนของตัวแปรของผลตอบสนองที่ต้องใช้เพื่อพิจารณาแรงเฉื่อยที่สำคัญของระบบได้

ตัวอย่างของการพิจารณาระดับขั้นความเสรีแสดงในรูปที่ 1.2 ในรูป (ก) การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบจะต้องใช้พิกัดอิสระ x และ y ในการอธิบายการเคลื่อนที่ได้สมบูรณ์ ดังนั้นอนุภาคในระนาบมีระดับขั้นความเสรีเท่ากับสอง สำหรับในรูป (ข) แบบจำลองของระนาบพื้นในอาคาร การเคลื่อนที่ของระนาบจะต้องใช้พิกัดของมุม θ เพิ่มขึ้นในการอธิบายการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ ดังนั้นระบบนี้จึงมีระดับขั้นความเสรีเท่ากับสาม ในรูป (ค) แบบจำลองอย่างง่ายของหอสถู การเคลื่อนที่ของมวลบนปลายของเสาที่ไม่มีน้ำหนักและไม่คิดการเปลี่ยนรูปในแนวแกนของเสาสามารถอธิบายได้ด้วยระยะพิกัดในแนวราบเท่านั้น ระบบนี้ จึงมีระดับขั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง และในรูป (ง) สำหรับแบบจำลอง 2 มิติของอาคารสูง N ชั้น หากพิจารณาว่าไม่มีการเปลี่ยนรูปในแนวแกนของแต่ละชั้นส่วนและการเคลื่อนที่ของแต่ละชั้นเป็นอิสระต่อกันจึงใช้จุดศูนย์กลางของมวลในแต่ละชั้นในการอธิบายการเคลื่อนที่ของทั้งชั้น ดังนั้นระดับขั้นความเสรีของอาคารนี้จึงมีค่าเท่ากับ N



รูปที่ 1.2 ตัวอย่างระดับขั้นความเสรีของระบบต่าง ๆ

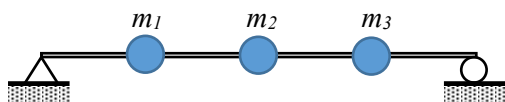
สำหรับระบบที่สามารถระบุตำแหน่งของมวลได้ชัดเจนดังตัวอย่างในรูปที่ 1.2 ระดับขั้นความเสรีสามารถถูกระบุได้โดยตรงที่ตำแหน่งของมวลเหล่านั้น อย่างไรก็ตาม สำหรับระบบที่มีมวลกระจายอยู่ทั่วโครงสร้าง จำเป็นต้องมีวิธีการระบุระดับขั้นความเสรีสำหรับการวิเคราะห์อย่างเหมาะสม

1.4 วิธีระดับชั้นความเสรี

ในระบบที่มีมวลกระจายค่าอยู่ตลอดโครงสร้าง แรงเฉื่อยจึงเกิดขึ้นที่ตำแหน่งเหล่านั้นทำให้จำนวนของระดับชั้นความเสรีเป็นค่าอนันต์ วิธีการระดับชั้นความเสรีเพื่อให้มีจำนวนจำกัดและเพื่อกำหนดตำแหน่งที่ใช้วิเคราะห์ผลตอบสนองทำได้โดยวิธีดังต่อไปนี้

1.4.1 วิธีการรวมมวล (Lumped mass method)

วิธีนี้เป็นวิธีอย่างง่าย โดยพิจารณาให้มวลที่กระจายตัวของระบบรวมไว้เป็นจุด ๆ (Lumps หรือ points) ที่กำหนดขึ้น แล้วพิจารณาเฉพาะแรงเฉื่อย ของจุดเหล่านั้นเท่านั้น วิธีนี้เหมาะกับระบบที่มีมวลส่วนใหญ่รวมตัวอยู่เป็นแห่ง ๆ และองค์ประกอบอื่นแทนด้วยชิ้นส่วนที่ไม่คิดมวลได้ ความถูกต้องของคำตอบจากการจำลองแบบนี้ขึ้นอยู่กับจำนวน และการกระจายตัวของ lumped mass ตัวอย่างสำหรับคานช่วงเดียวแสดงในรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 แบบจำลองรวมมวลสำหรับคานช่วงเดียว

1.4.2 วิธีพิกัดการกระจัดทั่วไป (Generalized displacement)

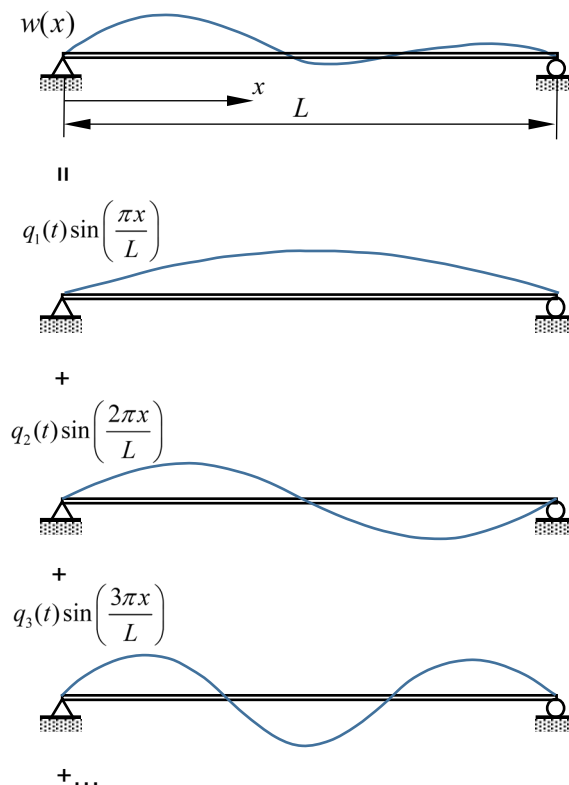
ในกรณีที่มวลของระบบกระจายตัวค่อนข้างสม่ำเสมอ วิธีในการระดับชั้นความเสรีที่เหมาะสมวิธีหนึ่งคือวิธี Generalized displacement ที่มีพื้นฐานให้พิจารณาว่าการกระจัดของโครงสร้างที่ตำแหน่งต่าง ๆ มีรูปแบบที่สามารถแทนด้วยผลรวมของฟังก์ชันในรูปแบบง่ายได้ เช่น รูปแบบอนุกรม หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น และฟังก์ชันเหล่านี้จะแสดงพิกัดของการกระจัดที่ตำแหน่งต่าง ๆ ทั้งโครงสร้างต่อไป ตัวอย่างเช่น คานช่วงเดียวที่มีรูปร่างการแอ่นตัวที่มีรูปแบบซับซ้อน สามารถอธิบายได้ด้วยผลรวมของฟังก์ชัน Sine ได้ดังสมการที่ 1.1 และรูปที่ 1.4

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1.1)$$

โดยทั่วไป รูปร่างใด ๆ สามารถถูกแทนด้วยผลรวมถึงอนันต์ชุดของฟังก์ชัน Sine ที่มีเงื่อนไขขอบเขตของที่รองรับแบบเดียวกันได้ และค่าแอมพลิจูดของฟังก์ชัน Sine คือค่าการกระจัดประจำรูปแบบนั้น ๆ ทำให้จำนวนระดับชั้นความเสรีที่เป็นอนันต์ถูกแทนได้ด้วยผลรวมของรูปแบบย่อย ๆ เหล่านี้

อย่างไรก็ดี การรวมเทอมจำนวนอนันต์ดังสมการที่ 1.1 อาจประมาณได้โดยคิดเฉพาะเทอมแรก ๆ เช่น การรวม 3 ถึง 5 เทอมแรกก็มักให้คำตอบที่ลู่เข้าหาคำตอบที่ถูกต้องได้ สมการที่ 1.1 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ดังสมการที่ 1.2 โดยที่ฟังก์ชันใด ๆ $\psi(x)$ แทนถึงรูปร่างที่มีค่าตามตำแหน่งและต้องมีเงื่อนไขขอบเขตเหมือนกับระบบจริง และเทอม $q_n(t)$ แทนถึงแอมพลิจูดที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเรียกว่า Generalized coordinate จำนวน N แทนถึงจำนวนระดับชั้นความเสรีของแบบจำลอง ความถูกต้องของคำตอบจากการจำลองแบบนี้ขึ้นอยู่กับจำนวน N ที่ใช้คำนวณ และความเหมาะสมของฟังก์ชันที่ใช้

$$w(x) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \psi_n(x) \quad (1.2)$$



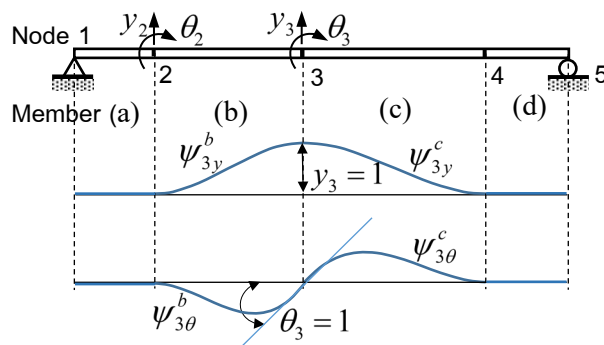
รูปที่ 1.4 ตัวอย่างการใช้วิธี Generalized displacement สำหรับคานช่วงเดียว

1.4.3 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับระบบเชิงพลศาสตร์มีพื้นฐานเกี่ยวกับหลักของการวิเคราะห์กลศาสตร์ของระบบแบบต่อเนื่อง วิธีนี้สามารถให้ผลที่แม่นยำสูงและเหมาะกับการพัฒนาเป็นโปรแกรมวิเคราะห์ด้วยคอมพิวเตอร์ หลักการพื้นฐานเริ่มจากการแบ่งโครงสร้างเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ที่มีรูปร่างและขนาดตามที่ต้องการ และแต่ละชิ้นส่วนต่อกันที่จุดต่อ (Node) ซึ่งการกระจัดหรือการหมุนที่ Node จะถูกพิจารณาเป็น Generalized coordinate ของระบบ ซึ่งทำให้สามารถอธิบายรูปร่างของการกระจัดตลอดทั้งโครงสร้างได้จากผลรวมของ Generalized coordinate ในรูปของสมการที่ 1.2 เช่นกัน ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชัน ψ เรียกว่าฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง (Interpolation function) หรือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function)

ตัวอย่างของการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการระบุระดับขั้นความเสรีสำหรับตัวอย่างคานช่วงเดียวแสดงดังรูปที่ 1.5 โดยที่แต่ละ Node มี DOF เท่ากับ 2 คือ การกระจัดในแนวตั้งฉากกับแกนคานและการหมุน เช่นที่ Node 3 มีฟังก์ชัน ψ สำหรับ 2 DOF และ 2 ชิ้นส่วนที่มาต่อกัน ข้อดีของวิธีนี้คือ การกำหนดจำนวนชิ้นส่วนทำให้สามารถเลือกระดับของความถูกต้องของคำตอบและความซับซ้อนของแบบจำลองเองได้ และเนื่องจาก Interpolation function ของแต่ละชิ้นสามารถใช้เหมือนกันได้ อีกทั้งสมการการ

วิเคราะห์มีลักษณะที่แยกตัว (Uncouple) ของ DOF ส่วนใหญ่ของระบบ เพราะการพิจารณาเป็น Node ระหว่างชิ้นส่วน จึงทำให้การวิเคราะห์หาคำตอบจึงใช้กระบวนการที่ไม่ซับซ้อนมากนักได้



รูปที่ 1.5 ตัวอย่างการพิจารณา DOF ของคานาโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.5 สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion)

ในปัญหาเชิงสถิติศาสตร์ การหาผลตอบสนองเนื่องจากแรงที่กระทำต่อระบบทำได้จากการแก้สมการควบคุม (Governing equation) ส่วนในปัญหาเชิงพลศาสตร์ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำและผลตอบสนองอยู่ในรูปของ สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion) คือ สมการที่ใช้สำหรับการอธิบายการเคลื่อนที่ของระบบ และคำตอบของสมการนี้ ซึ่งเป็นค่าการกระจัด $u(t)$ และอนุพันธ์ในรูปความเร็ว $\dot{u}(t)$ และความเร่ง $\ddot{u}(t)$ จะขึ้นกับเวลาในระหว่างการเคลื่อนที่ t สำหรับที่ DOF ต่าง ๆ การสร้างสมการการเคลื่อนที่เป็นเรื่องสำคัญที่สุดในการวิเคราะห์เชิงพลศาสตร์ และมีวิธีดังต่อไปนี้

1.5.1 หลักการสมดุลโดยตรง (Direct equilibrium)

พื้นฐานของหลักการนี้มาจาก จากกฎข้อที่สองของ Newton ที่กล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของระบบใด ๆ มีค่าเท่ากับแรงที่กระทำกับระบบนั้น” โดยแสดงได้ดังสมการที่ 1.3

$$\mathbf{p}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \quad (1.3)$$

โดยที่ $\mathbf{p}(t)$ และ $\mathbf{u}$ เป็นเซตของแรงและการกระจัดของ DOF ต่าง ๆ ของระบบที่มีมวล m โดยทั่วไปมวลไม่เปลี่ยนค่าตามเวลา ดังนั้น

$$\mathbf{p}(t) = m \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \quad (1.4)$$

สมการที่ 1.4 มีความหมายว่า แรงมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลกับความเร่ง หรือเขียนได้เป็น

$$\mathbf{p}(t) - m \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = 0 \quad (1.5)$$

เรียกพจน์ $m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}$ ว่า แรงเฉื่อย (Inertia force) ที่ต้านทานการเคลื่อนที่อย่างมีความเร่งของมวล ซึ่งแนวคิดที่ว่า การเคลื่อนที่ของมวลทำให้เกิดแรงเฉื่อยที่มีค่าเป็นสัดส่วนกับความเร่งและมีทิศตรงกันข้ามกัน เรียกว่าหลักการของ d'Alembert (d'Alembert's principle)

การเขียนสมการสมดุลของแรงพลศาสตร์คือการรวมแรงทั้งหมดที่กระทำกับมวล ในเทอมของแรง $\mathbf{p}(t)$ ที่ประกอบด้วย แรงภายนอก แรงเฉื่อย แรงจากการยึดรั้งต่าง ๆ และแรงหน่วง เป็นต้น

1.5.2 หลักการการกระจัดเสมือน (Virtual displacement principle)

สำหรับระบบที่มีความซับซ้อนในการกำหนดทิศทางของแรง เช่นมีหลายชิ้นส่วน หรือมี DOF ที่เคลื่อนที่ในแนวต่าง ๆ กัน ทำให้การพิจารณาสมดุลของแรงทำได้ยาก วิธีการกระจัดเสมือนมีความสะดวกสำหรับการเขียนสมการการเคลื่อนที่มากกว่า เนื่องจากพิจารณางานเสมือนด้วยการหาผลรวมของงานเป็นปริมาณสเกลาร์ได้ หลักการการกระจัดเสมือน คือ “สำหรับระบบที่อยู่ในสภาพสมดุลภายใต้แรงที่กระทำใด ๆ และหากมีการกระจัดเสมือนเกิดขึ้น งานเสมือนของแรงภายนอกของระบบจะต้องมีค่าเป็นศูนย์”

1.5.3 หลักการแปรผัน (Variational approach)

ในหลักการที่กล่าวมาทั้งสอง จำเป็นต้องหาแนวของแรงที่เกิดขึ้นในระบบให้ถูกต้อง ซึ่งแม้แต่การรวมงานเสมือนแบบสเกลาร์ในหัวข้อ 1.5.2 ก็จำเป็นต้องพิจารณาเวกเตอร์ของแรงให้ถูกต้อง หลักการที่สามารถใช้โดยที่ไม่ต้องพิจารณาการรวมผลแบบเวกเตอร์เนื่องจากแรงได้คือ หลักการแปรผัน ที่สามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่จากพลังงานในระบบได้โดยสะดวก ซึ่งพิจารณาผลของแรงที่กระทำในรูปแบบของพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และงานในระบบ แล้วหาค่าการแปรผันของค่าเหล่านั้น หลักการแปรผันนี้เรียกชื่อว่าหลักการของแฮมิลตัน (Hamilton's principle) ดังสมการที่ 1.6

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1.6)$$

โดยที่ T และ V คือพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ ตามลำดับ W_{nc} คืองานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์ (Non-conservative force) และสัญลักษณ์ δ แทนการแปรผันในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2

1.6 สรุปเนื้อหาประจำบท

ในบทนี้เป็นการแนะนำลักษณะของระบบเชิงพลศาสตร์ โดยเรื่องที่สำคัญคือ นิยามและวิธีการเลือกระดับชั้นความเสรีสำหรับการวิเคราะห์เชิงพลศาสตร์ และแนวทางในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นในการวิเคราะห์เชิงพลศาสตร์ โดยสรุปคือ การเริ่มวิเคราะห์ปัญหาเชิงพลศาสตร์ต้องมีการกำหนดระดับชั้นความเสรีที่เหมาะสม และสร้างสมการการคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการอธิบายการเคลื่อนที่ที่เปลี่ยนแปลงได้ตามเวลาสำหรับการวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงพลศาสตร์ โดยเนื้อหาที่ต่อเนื่องในบทที่ 2 จะแสดงเนื้อหาของการสร้างแบบจำลองและสมการสำหรับวิเคราะห์แบบจำลองเชิงพลศาสตร์อย่างง่าย

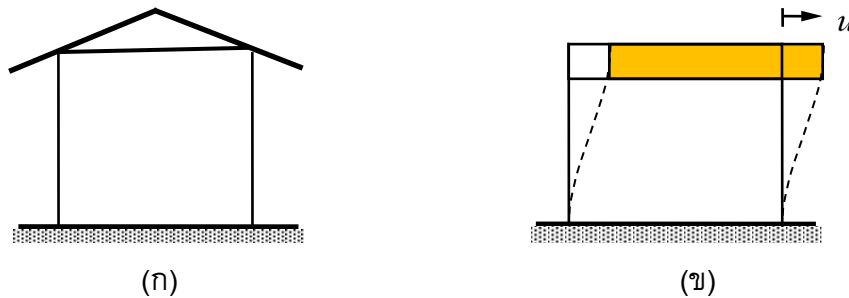
บทที่ 2

ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง

Single Degree-of-Freedom System

2.1 แบบจำลองของระบบโครงสร้างอย่างง่าย

แบบจำลองของระบบโครงสร้างอย่างง่ายที่จะใช้ในการอธิบายทฤษฎีเบื้องต้นคือระบบที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง (Single Degree-of-Freedom system, SDOF) ระบบนี้เป็นระบบพื้นฐานซึ่งสามารถใช้ในการจำลองโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อน ตัวอย่างเช่น สำหรับอาคารชั้นเดียวในรูปที่ 2.1 (ก) อาจจำลองให้เป็นระบบซึ่งประกอบด้วย มวลของหลังคา และ เสาที่ไม่คดงอที่หนีภัยยึดติดกับพื้นล่างดังรูปที่ 2.1 (ข) ซึ่งในระบบนี้จะพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่ในแนวราบ u ของมวลส่วนบนเป็นเพียง DOF เดียวของทั้งระบบ และเรียกว่า ระบบ SDOF



รูปที่ 2.1 อาคารชั้นเดียวและแบบจำลองสำหรับระบบ SDOF

2.2 องค์ประกอบพื้นฐานของระบบพลศาสตร์

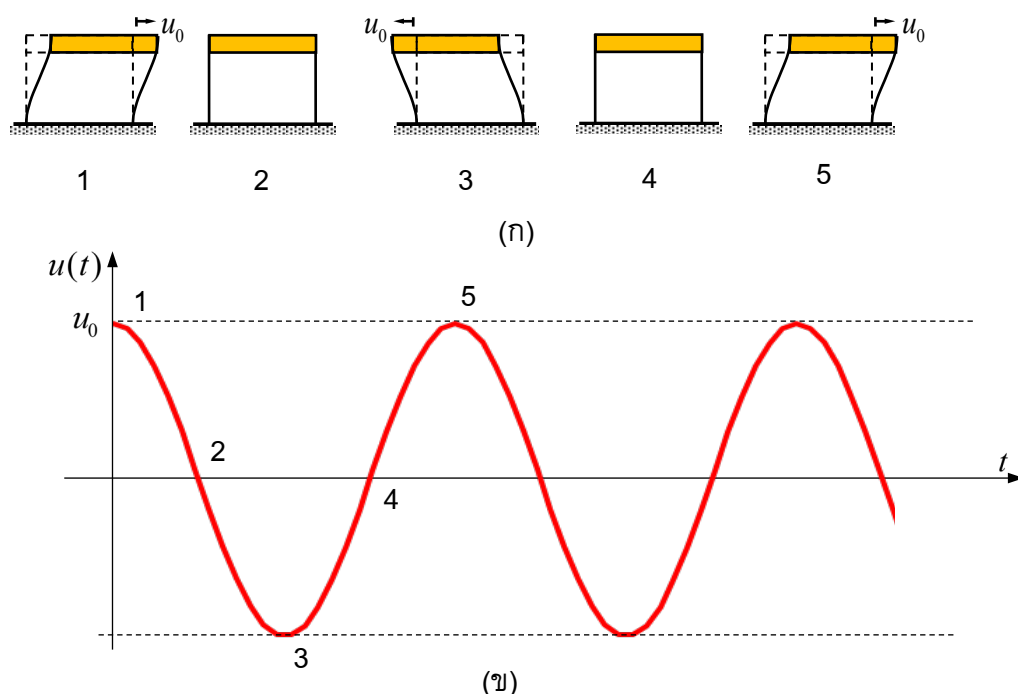
ในการศึกษาพฤติกรรมของระบบพลศาสตร์เพื่อศึกษาแรงที่เกิดขึ้นระหว่างการเคลื่อนที่ พิจารณาระบบจำลอง SDOF ที่เกิดการสั่นไหวอย่างอิสระดังตัวอย่างในรูปที่ 2.2 (ก)

(1) ตำแหน่งที่ 1 เริ่มต้นจากระบบถูกทำให้มีการกระจัดเริ่มต้นเท่ากับ u_0 ที่สภาพนี้หากระบบเริ่มจากหยุดนิ่งจะได้ว่าแรงภายนอกที่ต้องใช้ผลักระบบต้องสมดุลกับแรงภายในที่พยายามต้านการกระจัดที่เกิดจากสติฟเนสของเสาทั้งสอง ซึ่งที่ตำแหน่งนี้มีพลังงานศักย์สูงสุด

(2) หากปล่อยให้ระบบเกิดการเคลื่อนที่อย่างอิสระ ระบบจะเริ่มเคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิ่งและมีความเร็วที่ค่อย ๆ เพิ่มขึ้นเนื่องจากแรงสติฟเนสในเสาที่พยายามดึงระบบกลับเข้าสู่ตำแหน่งที่ไม่มีการกระจัด หรือตำแหน่งสมดุลแบบสถิต ที่ตำแหน่งที่ 2 ซึ่งที่ตำแหน่งนี้มีพลังงานศักย์เป็นศูนย์และได้เปลี่ยนไปเป็นพลังงานจลน์ที่มีค่าสูงสุด

(3) เมื่อระบบเคลื่อนผ่านถึงตำแหน่งที่ 2 ระบบจะยังไม่หยุดนิ่ง แต่จะเคลื่อนที่ผ่านจุดนี้ด้วยความเร็วสูงที่สุดและยังคงเคลื่อนต่อไปอีกด้านเนื่องด้วยการมีอยู่ของพลังงานจลน์ หรือแรงเฉื่อย โดยความเร็วจะค่อย ๆ ลดลงจนหยุดนิ่งที่ตำแหน่งที่ 3 โดยที่พลังงานศักย์มีค่าสูงสุดอีกครั้ง

(4) ระบบมีการกระจัดสูงสุดอีกครั้งแต่เกิดในตำแหน่งตรงกันข้ามกับจุดเริ่มต้น ณ ตำแหน่งนี้จึงเกิดแรงที่พยายามดึงกลับไปสู่ตำแหน่งสมดุลแบบสถิติอีกครั้ง ทำให้ระบบต้องเคลื่อนที่กลับมาที่จุดที่ 4 จุดที่ 5 และเกิดการเคลื่อนที่กลับไป-มา ตลอดไป หากพลังงานในระบบไม่ถูกสลายหรือเปลี่ยนไปในรูปอื่นได้ การเคลื่อนที่ในลักษณะนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว (Simple harmonic motion) ซึ่งกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ในรูปของการกระจัดในแกนตั้งกับเวลาในแกนนอน แสดงได้ดังรูปที่ 2.2 (ข)



รูปที่ 2.2 การเคลื่อนที่ของระบบ SDOF แบบ Simple Harmonic

อย่างไรก็ตามในการเคลื่อนที่ของระบบจริง อาจมีการสูญเสียพลังงานของการสั่นไหวออกนอกระบบได้ คุณสมบัติในการสลายพลังงานของระบบเรียกว่า ความหน่วง (Damping) ซึ่งทำให้ค่ากระจัดสูงสุดของการเคลื่อนที่ในแต่ละรอบลดลง จนกระทั่งหยุดนิ่งที่จุดสมดุลในที่สุด แรงที่เกิดขึ้นแบบนี้เรียกว่าแรงหน่วง (Damping force)

จากแรงสำคัญทั้ง 3 คือ แรงเฉื่อย แรงสถิติเฟนส และ แรงหน่วง ที่กล่าวมานี้ เมื่อพิจารณาคูณสมบัติของโครงสร้างที่เป็นตัวกำหนดค่าแรงทั้ง 3 ค่านี้ จะได้องค์ประกอบพื้นฐานของระบบพลศาสตร์ที่สำคัญประกอบด้วย

1) มวล (Mass)

มวลของโครงสร้างมักใช้สัญลักษณ์แทนด้วย m ในการสร้างแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ การหาค่ามวลของระบบสามารถทำได้โดยวิธีที่กล่าวไว้ในบทที่ 1 จากนั้นการเคลื่อนที่ของมวลนี้สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันของตำแหน่งนั้น จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน เมื่อมีแรงกระทำต่อมวลให้เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง แรงนั้นมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลที่คงที่กับค่าความเร่ง ดังสมการที่ 2.1

$$f = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (2.1)$$

สมการ 2.1 สามารถเขียนเป็นสมการที่ 2.2

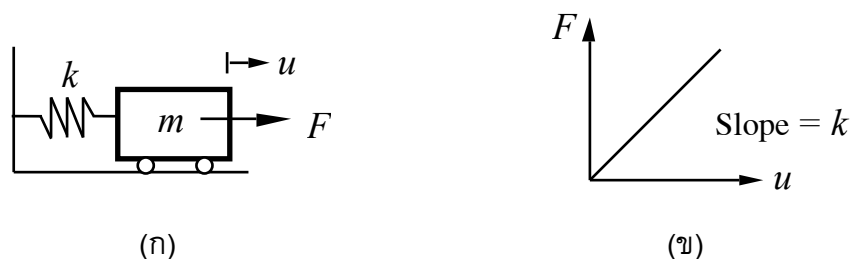
$$f - m \frac{d^2 u}{dt^2} = 0 \quad (2.2)$$

พจน์ที่ 2 ของสมการ 2.2 เรียกว่าแรงเฉื่อย (Inertia force, f_I) ที่เป็นแรงต้านทานการเคลื่อนที่แบบมีความเร่งของมวล ซึ่งหลักการที่พิจารณาว่ามวลทำให้เกิดแรงเฉื่อยที่มีค่าเป็นสัดส่วนกับความเร่งแต่มีทิศตรงกันข้ามนี้เรียกว่า d'Alembert's principle นั่นคือ

$$f_I = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (2.3)$$

2) สติฟเนส (Stiffness)

สติฟเนสของโครงสร้าง k มีนิยามคือค่าแรงที่ใช้ในการทำให้โครงสร้างเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนรูปเท่ากับหนึ่งหน่วยของการกระจัด ตัวอย่างของระบบอย่างง่ายที่ประกอบไปด้วย มวล และ สปริง ดังรูปที่ 2.3 (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างแรง F กับการกระจัด u สำหรับโครงสร้างที่มีพฤติกรรมในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic) แสดงได้ในรูปที่ 2.3 (ข)



รูปที่ 2.3 แรงสติฟเนส

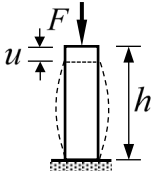
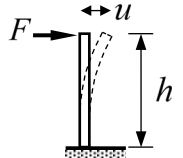
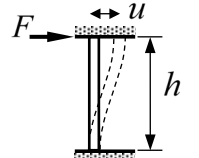
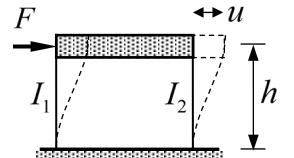
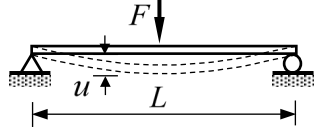
ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างแรงสติฟเนส f_s กับการกระจัด u ตามกฎของฮุก (Hook's law) คือ

$$f_s = ku \quad (2.4)$$

โครงสร้างทางวิศวกรรมโยธา เช่น โครงข้อแข็ง ที่ประกอบไปด้วยชิ้นส่วน คาน พื้น และ เสาเป็นหลัก ซึ่งค่าสติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วนนิยามขึ้นตามลักษณะการเปลี่ยนรูป เช่น การเปลี่ยนรูปตามแนวแกน การ

โก่งตัวในแนวดิ่ง หรือการโก่งตัวทางด้านข้าง เป็นต้น ค่าสตีฟเนสซึ่งสอดคล้องกับลักษณะของแรงและการเปลี่ยนรูปสามารถคำนวณได้ตามทฤษฎีโครงสร้าง ตารางที่ 2.1 แสดงถึงการเคลื่อนตัวสูงสุดและค่าสตีฟเนสของโครงสร้างภายใต้แรงในลักษณะต่างๆ

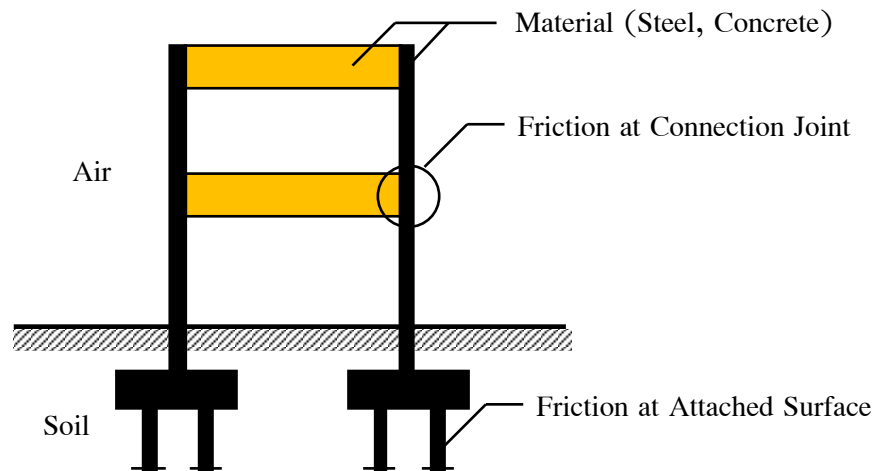
ตารางที่ 2.1 ลักษณะการเคลื่อนตัวและค่าสตีฟเนสของโครงสร้าง

ลักษณะโครงสร้าง	ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุด u	ค่าสตีฟเนส k
	$\frac{Fh}{AE}$	$\frac{AE}{h}$
	$\frac{Fh^3}{3EI}$	$\frac{3EI}{h^3}$
	$\frac{Fh^3}{12EI}$	$\frac{12EI}{h^3}$
	$\frac{Fh^3}{12E(I_1 + I_2)}$	$\frac{12E(I_1 + I_2)}{h^3}$
	$\frac{FL^3}{48EI}$	$\frac{48EI}{L^3}$

3) ความหน่วง (Damping)

จากที่ได้อธิบายมาแล้วเบื้องต้น ความหน่วงคือคุณสมบัติในการสลายพลังงานของการเคลื่อนที่ โดยการเปลี่ยนพลังงานในการเคลื่อนที่ให้เป็นพลังงานในรูปอื่น เช่น ความร้อน หรือ เสียง เป็นต้น ดังนั้นในการเคลื่อนที่ของระบบเมื่อเวลาผ่านไป พลังงานของการเคลื่อนที่จะลดลงทำให้ระยะกระจัดมีค่าน้อยลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ในที่สุด ในโครงสร้างจริงทั่วไปอาจประกอบด้วยความหน่วงจากหลายแหล่ง พิจารณาตัวอย่างของอาคารดังรูปที่ 2.4 ที่มาของความหน่วงของระบบนี้ประกอบไปด้วย ความหน่วงที่เป็นคุณสมบัติของวัสดุเนื่องจากแรงเสียดทานในเนื้อของวัสดุเอง เช่น คอนกรีต เหล็ก เป็นต้น ความหน่วง

เนื่องจากแรงเสียดทานจากรอยต่อและผิวสัมผัสที่เกิดขึ้นระหว่างชิ้นส่วนต่างๆ และความหน่วงเนื่องจากสภาพแวดล้อมที่โครงสร้างตั้งอยู่ เช่น จากดินหรืออากาศเป็นต้น

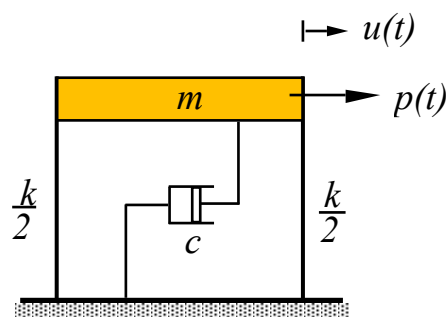


รูปที่ 2.4 ที่มาของความหน่วงในระบบโครงสร้าง

ซึ่งจากปัจจัยและสาเหตุของความหน่วงที่มีหลายรูปแบบนี้ ทำให้การคำนวณหาค่าความหน่วงทำได้ยากในทางปฏิบัติ แต่สามารถตรวจวัดได้จากการทดสอบกับโครงสร้างจริง ซึ่งจากผลการทดสอบต่างๆ ทำให้ทราบว่าสำหรับกรณีทั่วไปนั้นแรงหน่วง f_D สามารถแสดงในรูปความสัมพันธ์อย่างง่ายที่แปรผันเชิงเส้นกับความเร็วของการเคลื่อนที่ได้คือ

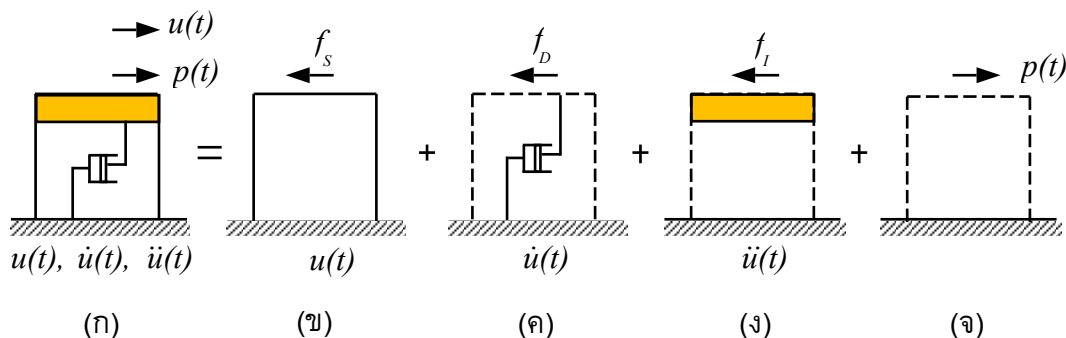
$$f_D = c \frac{du}{dt} \quad (2.5)$$

โดยที่ c คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง ที่มีหน่วยเป็นหน่วยของแรงต่อความเร็ว และในการแสดงสัญลักษณ์ตัวหน่วงในแบบจำลองนิยมใช้สัญลักษณ์ของระบบชุดลูกสูบน้ำมัน (Dash pot) ดังนั้นองค์ประกอบพื้นฐานของระบบที่มีระดับชั้นความเสรีเท่ากับหนึ่งภายใต้แรงภายนอก $p(t)$ กระทำสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แบบจำลองสำหรับระบบ SDOF

สำหรับระบบที่มีพฤติกรรมในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น องค์ประกอบของระบบดังรูปที่ 2.5 อาจแยกพิจารณาได้จากหลักการ Superposition ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 องค์ประกอบพื้นฐานสำหรับระบบพลวัต

นั่นคือระบบเชิงพลศาสตร์ที่อธิบายการเคลื่อนที่ด้วยการกระจัด ความเร็ว และความเร่งดังรูปที่ 2.6 (ก) ประกอบไปด้วย องค์ประกอบด้านสติฟเนสซึ่งสัมพันธ์กับการกระจัดดังรูปที่ 2.6 (ข) องค์ประกอบด้านความหน่วงซึ่งสัมพันธ์กับความเร็วดังรูปที่ 2.6 (ค) องค์ประกอบด้านมวลซึ่งสัมพันธ์กับความเร่งดังรูปที่ 2.6 (ง) และ องค์ประกอบเนื่องจากแรงภายนอก $p(t)$ ที่กระทำต่อระบบแปรผันตามเวลาดังรูปที่ 2.6 (จ) ความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็ว และความเร่ง อยู่ในรูปของอนุพันธ์เทียบกับเวลา คือ

$$\text{ความเร็ว} \quad \dot{u}(t) = \frac{du}{dt} \quad (2.6)$$

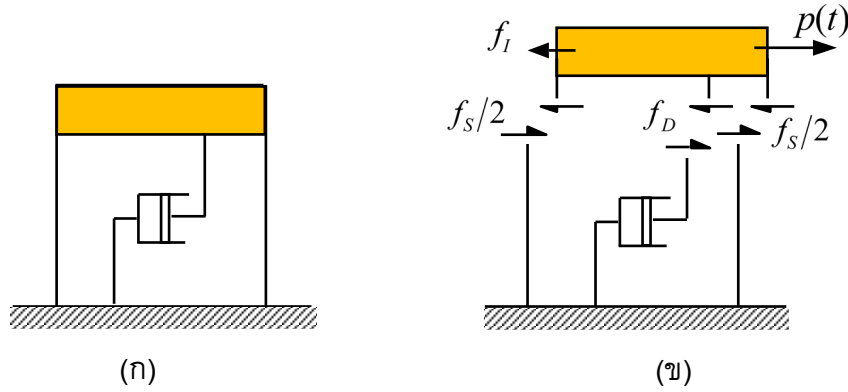
$$\text{ความเร่ง} \quad \ddot{u}(t) = \frac{d\dot{u}(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} \quad (2.7)$$

โดยทั่วไปนิยมใช้สัญลักษณ์ $(\dot{})$ แทนอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับเวลา และ $(\ddot{})$ แทนอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับเวลา

2.3 สมการการเคลื่อนที่ของระบบ SDOF

2.3.1 หลักการสมดุลโดยตรง

สำหรับระบบที่ไม่ซับซ้อนเช่นระบบที่มีระดับชั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้โดยง่ายจากการพิจารณาสมดุลของแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบตามวิธีในหัวข้อ 1.5.1 ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.7 และพิจารณาผลรวมของแรงที่กระทำต่อก้อนมวล จะสามารถเขียนสมการได้ดังสมการที่ 2.8



รูปที่ 2.7 ระบบ SDOF และการสมดุลของแรง

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (2.8)$$

แทนค่าจากสมการที่ 2.3 2.4 และ 2.5 และใช้สัญลักษณ์ดังสมการ 2.6 และ 2.7 สำหรับสมการ 2.8 จะได้สมการการเคลื่อนที่สำหรับระบบ SDOF ดังสมการที่ 2.9 ซึ่งหากเปรียบเทียบกับสมการสำหรับสมดุลเชิงสถิตคือ พจน์ที่ 1 และ 2 เป็นศูนย์ เนื่องจากการกระจัดไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและสมดุลกับแรงภายนอกแบบสถิต ($ku = p$)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.9)$$

2.3.2 หลักการการกระจัดเสมือน

สมการการเคลื่อนที่ของระบบในรูปที่ 2.7 สามารถสร้างโดยใช้วิธีการกระจัดเสมือนตามหัวข้อที่ 1.5.2 หากพิจารณาว่ามวลเกิดกระจัดเสมือนเท่ากับ δu ดังนั้นงานเสมือนของแรงทั้งหมดในระบบสามารถเขียนได้ว่า

$$-f_I\delta u - f_D\delta u - f_S\delta u + p(t)\delta u = 0 \quad (2.10)$$

โดยเครื่องหมายลบเกิดจากแรงกระทำในแนวตรงข้ามกับแนวของ δu สมการที่ 2.10 เขียนได้ใหม่เป็น

$$(-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + p(t))\delta u = 0 \quad (2.11)$$

สำหรับค่า δu ที่ไม่เป็นศูนย์ จึงสามารถเขียนเป็นสมการการเคลื่อนที่ได้เหมือนกับสมการ 2.9

2.3.3 หลักการแปรผัน

สำหรับวิธี Hamilton's principle ตามหัวข้อที่ 1.5.3 เมื่อนำมาใช้กับตัวอย่างตามรูป 2.7 เริ่มจากการเขียนพลังงาน และงานของระบบ SDOF ได้คือ

พลังงานจลน์ $T = (1/2)m\dot{u}^2$ และพลังงานศักย์ $V = (1/2)ku^2$ และได้ว่า $\delta T = m\dot{u}\delta\dot{u}$ $\delta V = ku\delta u$ และการแปรผันของงานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์คือ $\delta W_{nc} = p(t)\delta u - c\dot{u}\delta u$

เมื่อแทนค่าลงสมการที่ 1.6 จะได้

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\dot{u}\delta\dot{u} - c\dot{u}\delta u - k u\delta u + p(t)\delta u) dt = 0 \quad (2.12)$$

ทำการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (Integrate by parts) ของพจน์แรกในสมการที่ 2.13 ได้ดังนี้

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{u}\delta\dot{u} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{u} \frac{d}{dt}(\delta u) dt = [m\dot{u}\delta u]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u}\delta u dt = - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u}\delta u dt \quad (2.13)$$

โดยหลักของ Hamilton's principle พจน์ $[m\dot{u}\delta u]_{t_1}^{t_2}$ ในสมการที่ 2.13 มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากการแปรผันที่จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดของช่วงเวลาที่พิจารณาต้องเป็นศูนย์ $\delta u(t_1) = 0$ และ $\delta u(t_2) = 0$ แทนค่าสมการ 2.13 ลง 2.12 จะได้

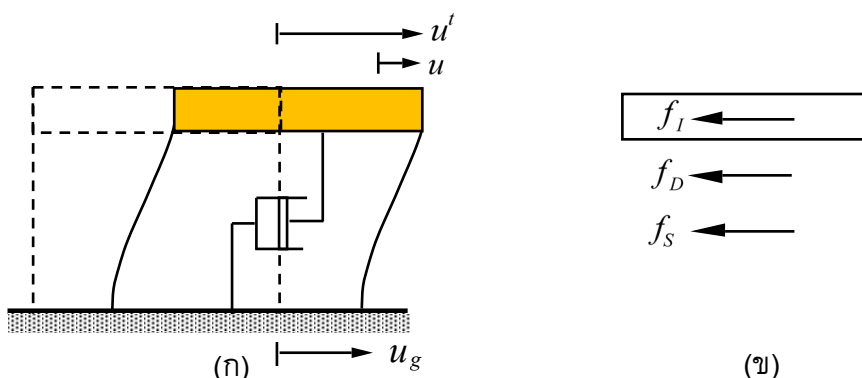
$$\int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{u} - c\dot{u} - k u + p(t))\delta u dt = 0 \quad (2.14)$$

สำหรับค่า δu ที่ไม่เป็นศูนย์ สมการที่ 2.14 จึงสามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการที่ 2.9 ได้อีกเช่นกัน

2.4 สมการการเคลื่อนที่สำหรับโครงสร้างภายใต้แผ่นดินไหว

ผลเนื่องจากแผ่นดินไหวต่อโครงสร้างไม่ใช่แรงที่กระทำโดยตรงกับโครงสร้าง แต่เป็นผลเทียบเท่าของแรงเมื่อโครงสร้างเกิดการเคลื่อนตัวขึ้น สมการการเคลื่อนที่ของแผ่นดินไหวสามารถสร้างได้จากการพิจารณาสมดุลของแรงทั้งหมดเช่นกัน โดยเมื่อเกิดการเคลื่อนที่ของที่รองรับอย่างมีความเร่งจากตำแหน่งสมดุลซึ่งส่งผลให้เกิดการเคลื่อนที่ของโครงสร้างทั้งระบบ พฤติกรรมของโครงสร้างเมื่อเกิดการเคลื่อนที่เช่นนี้สามารถอธิบายได้เมื่อเขียนสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างภายใต้แผ่นดินไหว พิจารณาโครงสร้างดังรูปที่ 2.8 (ก) ระยะกระจัดของการเคลื่อนที่ของที่รองรับแทนด้วย u_g ส่วนระยะกระจัดสัมพัทธ์ระหว่างมวลกับที่รองรับแทนด้วย u ดังนั้นระยะกระจัดรวมของมวล u^t คือ

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t) \quad (2.15)$$



รูปที่ 2.8 ระบบ SDOF ภายใต้แผ่นดินไหว และการสมดุลของแรง

เมื่อพิจารณาสมดุลของแรงตามรูปที่ 2.8 (ข) จะได้ความสัมพันธ์

$$f_I + f_D + f_S = 0 \quad (2.16)$$

เนื่องจากแรงสติฟเนสและแรงหน่วงแปรผันตามการกระจัดสัมพัทธ์และความเร็วสัมพัทธ์ตามลำดับ จึงยังสามารถแสดงค่าแรงทั้ง 2 ได้ในรูปสมการ 2.4 และ 2.5 ตามลำดับ แต่สำหรับแรงเฉื่อยซึ่งเป็นผลของความเร่งรวมของระบบซึ่งอยู่ในรูป

$$f_I = m\ddot{u}^t \quad (2.17)$$

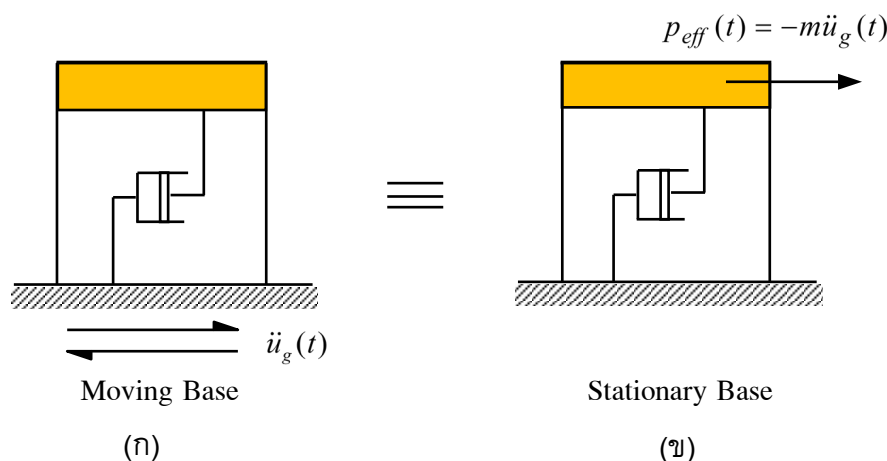
แทนค่าสมการ 2.4 2.5 และ 2.17 ในสมการ 2.16 และใช้สมการ 2.15 จะได้

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.18)$$

สมการที่ 2.18 คือสมการการเคลื่อนที่สำหรับการกระจัดสัมพัทธ์ $u(t)$ ของโครงสร้างภายใต้การเคลื่อนที่ของพื้นเนื่องจากแผ่นดินไหวด้วยความเร่ง $\ddot{u}_g(t)$ เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ 2.18 กับ สมการ 2.9 จะเห็นได้ว่าผลที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของพื้นด้วยความเร่ง $\ddot{u}_g(t)$ คือทำให้เสมือนมีแรงภายนอกกระทำต่อระบบค่าเท่ากับ $-m\ddot{u}_g(t)$ เรียกผลเช่นนี้ว่า แรงแผ่นดินไหวประสิทธิภาพ (Effective earthquake force, $p_{eff}(t)$)

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.19)$$

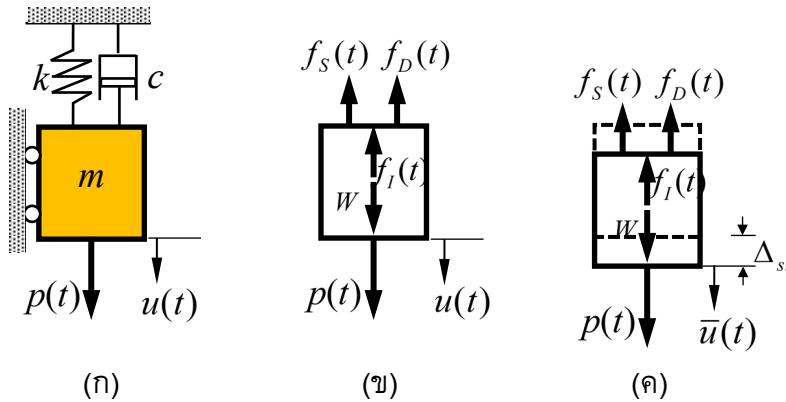
ข้อควรสังเกตคือแรงแผ่นดินไหวประสิทธิภาพเป็นสัดส่วนโดยตรงกับมวลของโครงสร้าง ดังนั้นปัจจัยหนึ่งที่มีผลต่อระดับความรุนแรงของแรงจากแผ่นดินไหวต่อโครงสร้างก็คือมวลของโครงสร้างเอง



รูปที่ 2.9 แรงแผ่นดินไหวประสิทธิภาพ

2.5 ผลของแรงโน้มถ่วงโลก

สำหรับระบบที่เคลื่อนที่ในแนวตั้ง ผลของแรงโน้มถ่วงที่มีต่อการเคลื่อนที่สามารถพิจารณาจากตัวอย่างในรูปที่ 2.10 โดยมวล m ที่แขวนด้วยสปริง k และตัวหน่วง c เกิดการกระจัด $u(t)$ ภายใต้แรง $p(t)$ ดังรูป (ก) มีผังวัตถุอิสระที่มีแรงกระทำดังรูป (ข) ซึ่งสมการสมดุลของแรงแสดงดังสมการที่ 2.20



รูปที่ 2.10 การพิจารณาผลของแรงโน้มถ่วงโลก

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) + W \quad (2.20)$$

โดยที่ W คือน้ำหนักจากแรงโน้มถ่วงของระบบ การกระจัดรวมของทั้งระบบ สามารถเขียนเป็นค่าการกระจัดจากน้ำหนักแบบสถิต Δ_{st} รวมกับค่าจากการกระจัดแบบพลศาสตร์ $\bar{u}(t)$ ได้คือ

$$u(t) = \Delta_{st} + \bar{u}(t) \quad (2.21)$$

แรงในสปริงมีค่าเป็น $ku = k\Delta_{st} + k\bar{u}(t)$ และสำหรับค่าการกระจัดจากน้ำหนักแบบสถิต $\Delta_{st} = W/k$ สมการที่ 2.20 จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\bar{u}(t) = p(t) \quad (2.22)$$

สำหรับค่า Δ_{st} ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้น $\dot{u} = \dot{\bar{u}}$ และ $\ddot{u} = \ddot{\bar{u}}$ ทำให้สมการการเคลื่อนที่ของระบบคือ

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u}(t) = p(t) \quad (2.23)$$

สมการที่ 2.23 แสดงถึงสมการการเคลื่อนที่เขียนอยู่ในพจน์ของการตอบสนองเชิงพลศาสตร์ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่รอบตำแหน่งสมดุลเชิงสถิต ดังนั้นจึงไม่มีผลจากแรงโน้มถ่วงของโลก และเพื่อความสะดวก สมการที่ 2.23 นิยมเขียนเป็นสมการในรูปแบบ 2.9 โดยคำตอบที่ได้จึงเป็นค่าที่เทียบกับตำแหน่งสมดุลเชิงสถิต

2.6 มวลของการหมุนรอบแกน

ในหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง และแรงเฉื่อยเกิดจากมวลคูณกับความเร่งในแนวเส้นตรงนั้น ปัญหาเชิงพลศาสตร์ในหลายกรณีเกี่ยวข้องกับการหมุนรอบแกน เช่นการปิด

ตัวของพื้นอาคารเป็นต้น ในการสันนิษฐานนี้ ปริมาณที่ใช้ในการอธิบายแรงเฉื่อยอันเนื่องจากการหมุนของวัตถุด้วยความเร่งเชิงมุมรอบแกน O เรียกว่า โมเมนต์ของความเฉื่อยของมวล (Mass moment of inertia I_O) คำนี้นี้ขึ้นอยู่กับมวลและการกระจายตัวของมวลรอบแกนหมุนโดยมีนิยามคล้ายกับโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้วของพื้นที่ (Polar moment of inertia of area $J = \int r^2 dA$) ดังนี้

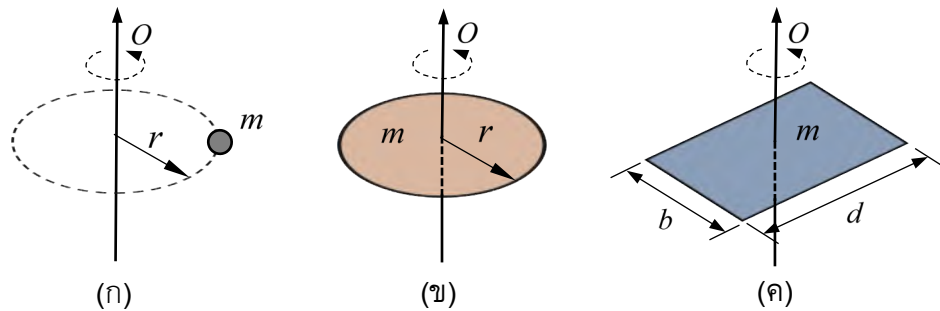
$$I_O = \int r^2 dm \quad (2.24)$$

มีหน่วยในระบบ SI คือ kg-m^2 ตัวอย่างของค่า I_O ตามรูปที่ 2.11 ได้แก่

(ก) ก้อนมวล m ที่หมุนรอบแกน O ที่ระยะห่าง r ; $I_O = mr^2$

(ข) แผ่นวงกลมที่มีมวล m รัศมี r ที่หมุนรอบแกน O ; $I_O = \frac{1}{2}mr^2$

(ค) แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีมวล m กว้าง b ยาว d ที่หมุนรอบแกน O ; $I_O = \frac{1}{12}m(b^2 + d^2)$

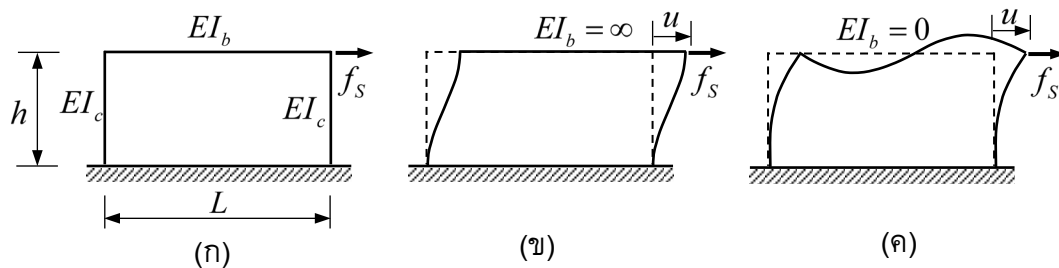


รูปที่ 2.11 ตัวอย่างโมเมนต์ของความเฉื่อยของมวล

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาค่าสถิติเฟสต้านทานแรงทางด้านข้างของโครงข้อแข็งแบบ Portal ดังรูป ต-2.1 (ก) โดยเสาทั้งสองมีปลายล่างยึดแน่นกับฐาน โดยให้พิจารณา 2 เงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) คานมีสถิติเฟสต้านทานการโก่งตัวเป็นอนันต์ $EI_b = \infty$ ดังรูป ต-2.1 (ข)

2) คานมีสถิติเฟสต้านทานการโก่งตัวเป็นศูนย์ $EI_b = 0$ ดังรูป ต-2.1 (ค)



รูปที่ ต-2.1

วิธีทำ 1) เนื่องจากคานที่ยึดปลายเสาด้านบนไม่มีการดัด เสาจึงเสมือนกับถูกยึดไว้แบบมีค่าสตีฟเนสของแต่ละต้นเท่ากับ $12EI_c/h^3$ ดังนั้นสตีฟเนสรวมของระบบมีค่าเท่ากับ

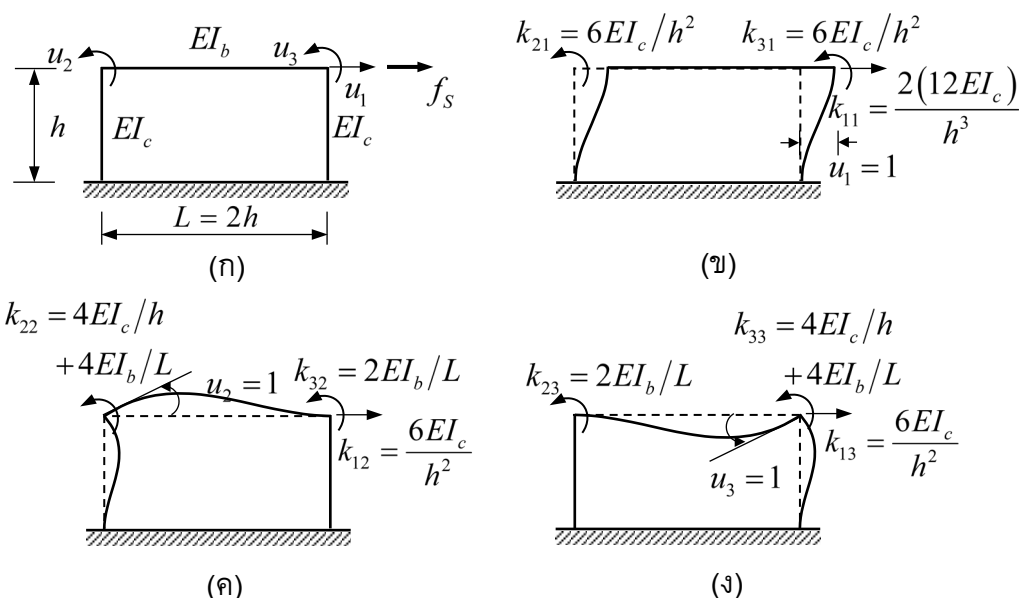
$$k = 2 \times 12EI_c/h^3 = 24EI_c/h^3$$

2) เนื่องจากคานที่ยึดปลายเสาด้านบนอ่อนมาก เสาจึงเสมือนเป็นเสาปลายยื่นที่หมุนได้อิสระ มีค่าสตีฟเนสของแต่ละต้นเท่ากับ $3EI_c/h^3$ ดังนั้นสตีฟเนสรวมของระบบมีค่าเท่ากับ

$$k = 2 \times 3EI_c/h^3 = 6EI_c/h^3$$

ในสภาพจริง คานมีค่า $0 < EI_b < \infty$ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สูตรคำนวณอย่างง่ายดังที่แสดงข้างต้นได้ ปัญหาลักษณะดังกล่าว มีแนวทางการพิจารณาดังตัวอย่างที่ 2.2 ต่อไป

ตัวอย่างที่ 2.2 พิจารณาโครงข้อแข็งแบบ Portal ดังรูป ต-2.2 (ก) จงหาค่าสตีฟเนสต้านทานแรงทางด้านข้างของระบบเพื่อการจำลองให้เป็นระบบ SDOF



รูปที่ ต-2.2

วิธีทำ ระบบโครงสร้าง มี DOF เท่ากับ 3 ประกอบด้วย u_1 คือการเคลื่อนที่ในแนวราบของคาน u_2 และ u_3 คือการหมุนของข้อต่อทั้งสอง แต่เนื่องจากมวลของ DOF สำหรับการหมุนที่ข้อต่อมีผลน้อยมาก จึงมักจะทิ้งจากการจำลองได้ ทำให้จำลองให้เป็นระบบ SDOF คือทำการรวมผลของ u_2 และ u_3 สำหรับสตีฟเนสของ u_1 โดยหลักการวิเคราะห์โครงสร้าง เรียกว่าวิธีควบรวมเชิงสถิต (Static condensation) สตีฟเนสของระบบ 3DOF สามารถหาได้จากรูป ต-2.2 (ข) (ค) และ (ง) ซึ่งสำหรับ $L = 2h$ และ $I_b = I_c$ แสดงค่าในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{K} = \frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}$$

หากพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ของแรงจากสติฟเนส f_s กับเวกเตอร์การกระจัด สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{ก})$$

พิจารณาเฉพาะ 2 สมการของ u_2 และ u_3 จะได้

$$(6h)u_1 + (6h^2)u_2 + (h^2)u_3 = 0$$

$$(6h)u_1 + (h^2)u_2 + (6h^2)u_3 = 0$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6h \\ 6h \end{bmatrix} u_1 = -\frac{6}{7h} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad (\text{ข})$$

แทนผลจากสมการ (ข) ลงในสมการแถวแรกใน (ก)

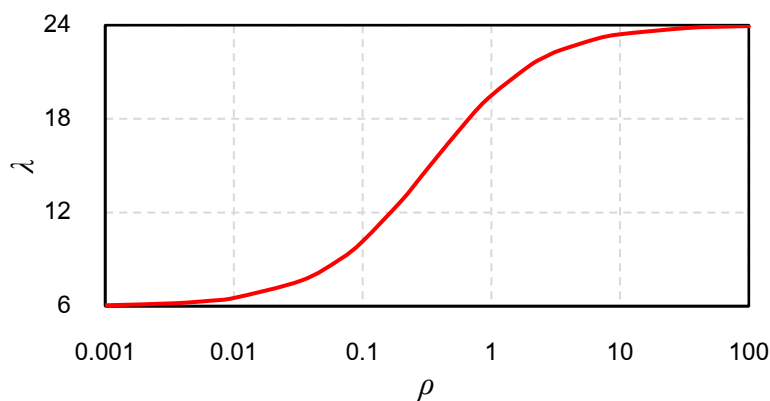
$$f_s = \frac{EI_c}{h^3} \left(24 - \frac{6}{7h} \{6h \quad 6h\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) u_1 = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3} u_1$$

ดังนั้นสติฟเนสต้านทานแรงทางด้านข้างของระบบนี้คือ $k = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3} = 13.71 \frac{EI_c}{h^3}$ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างคำตอบของตัวอย่างที่ 2.1 ใน 2 กรณี

สำหรับโครงข้อแข็งดังตัวอย่าง 2.2 ที่มีค่า I_b, I_c, L, h ใด ๆ ค่าสติฟเนสต้านทานแรงทางด้านข้างของระบบสามารถแสดงได้เท่ากับ

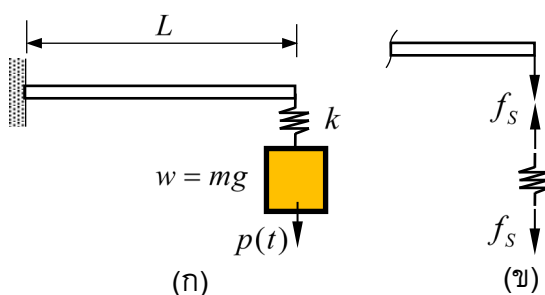
$$k = \frac{24EI_c}{h^3} \frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} = \lambda \frac{EI_c}{h^3}$$

โดยนิยามค่าอัตราส่วนสติฟเนสของคานเทียบกับเสา คือ $\rho = (EI_b/L) \div (2EI_c/h)$ และค่า λ มีค่าอยู่ในช่วง 6 ถึง 24 ตามค่า ρ โดยแสดงได้เป็นกราฟความสัมพันธ์ดังนี้



รูปที่ ต-2.3

ตัวอย่างที่ 2.3 จงสร้างสมการการเคลื่อนที่ของระบบดังรูปที่ ต-2.4 (ก) ที่ไม่มีความหน่วง และไม่คิดมวลของคาน สปริงมีค่าสติฟเนสเท่ากับ k



รูปที่ ต-2.4

วิธีทำ สมการการเคลื่อนที่ของระบบ SDOF นี้คือ

$$m\ddot{u} + k_e u(t) = p(t)$$

โดยที่ k_e คือ สติฟเนสรวมของระบบคานและสปริง ที่มีความสัมพันธ์คือ

$$f_s = k_e u \text{ และ } u = u_{\text{beam}} + u_{\text{spring}}$$

ซึ่งค่าของแรงที่ปลายคานมีค่าเท่ากับแรงในสปริง f_s ดังรูปที่ ต-2.4 (ข)

ดังนั้น

$$\frac{f_s}{k_e} = \frac{f_s}{k_{\text{beam}}} + \frac{f_s}{k}$$

หรือ

$$k_e = \frac{k \cdot k_{\text{beam}}}{k + k_{\text{beam}}}$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงสร้างสมการการเคลื่อนที่ของระบบมวลแขวน (Pendulum) ที่มีมวล m และเชือกยาว L ดังรูปที่ ต-2.5 (ก) โดยไม่คิดความหน่วง