

คู่มือ-ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ตามแนวคิดช่าง



ปวช. เตรียมวิศวะฯ
พระจอมเกล้าพระนครเหนือ

Part I จำนวน-ตัวเลข Part II เลขคณิต-พีชคณิต

Part III เรขาคณิตวิเคราะห์-ตรีโกณมิติ

Part IV สถิติ-ความน่าจะเป็น

คู่มือ-ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ตามแนวคิดข้าง



ปวช. เตรียมวิศวกรรม
พระจอมเกล้าพระนครเหนือ

คำนำ



คู่มือ-ข้อสอบคณิตศาสตร์ตามแนวคิดข้าง ในเล่มมีการสรุปเนื้อหาที่ใช้ในการสอบ เรื่องจำนวน-ตัวเลข เรื่องเลขคณิต-พีชคณิต เรื่องเรขาคณิต วิเคราะห์-ตรีโกณมิติ เรื่องสถิติ ความน่าจะเป็น รวมทั้งมีตัวอย่างข้อสอบ พร้อมเฉลยอย่างละเอียด และเทคนิคต่าง ๆ เพื่อเสริมทักษะในการทำโจทย์ ข้อสอบให้รวดเร็วและถูกต้อง **โดยตัวอย่างข้อสอบมีความใกล้เคียงกับข้อสอบในสนามสอบจริง**

คู่มือ-ข้อสอบคณิตศาสตร์ตามแนวคิดข้าง เหมาะสำหรับผู้ที่ต้องการสอบเข้าเรียนต่อในระดับ ปวช. หลักสูตรเตรียมวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ และผู้สนใจในเรื่องของวิชาคณิตศาสตร์

คู่มือ-ข้อสอบคณิตศาสตร์ตามแนวคิดข้าง เป็นหนึ่งในหนังสือชุด ปวช. เตรียมสอบวิศวะฯ พระจอมเกล้าพระนครเหนือ หนังสือชุดนี้มีทั้งหมด 7 เล่ม

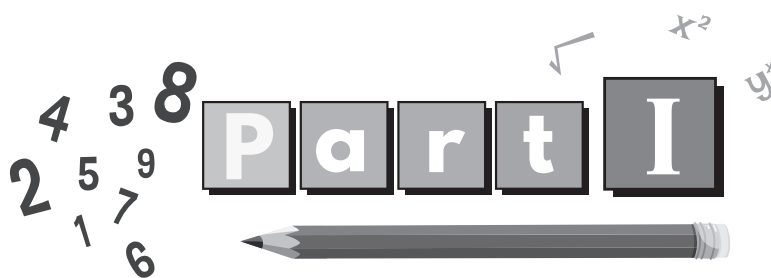
รุ่นพี่พระจอมเกล้าฯ



สารบัญ



▶ Part I	จำนวน-ตัวเลข	1
	เซต	1
	จำนวนจริง	3
	เลขยกกำลัง	4
▶ Part II	เลขคณิต-พีชคณิต	6
	พหุนาม	6
	สมการและอสมการ	8
	ระบบสมการ	11
▶ Part III	เรขาคณิต-ตรีโกณมิติ	17
	เรขาคณิตวิเคราะห์	17
	ทฤษฎีพีทาโกรัส	19
	พื้นที่ผิวและปริมาตร	20
	อัตราส่วนตรีโกณมิติ	24
▶ Part IV	สถิติ-ความน่าจะเป็น	27
	สถิติ	27
	การแปรผัน	31
	ความน่าจะเป็น	32
	ตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 1	34
	เฉลยตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 1	41
	ตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 2	61
	เฉลยตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 2	68



จำนวน-ตัวเลข

เซต (SET)

ชนิดของเซต (Kind of Set)

1. เซตว่าง (Empty Set) คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เขียนแทนด้วย $\emptyset$ หรือ $\{ \}$ เช่น เซตของปีที่มี 368 วัน

ข้อสังเกต $\{0\} \neq \{ \}$ เพราะ $\{0\}$ มีสมาชิก 1 จำนวน คือ 0 แต่ $\{ \}$ ไม่มีสมาชิกเลย

2. เซตจำกัด (Finite Set) คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวก หรือจำนวนเต็มศูนย์ เช่น

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

3. เซตอนันต์ (Infinite Set) คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด เช่น $B = \{x | x \text{ คือ จำนวนเต็มบวก ที่มากกว่า } 10\}$

การเท่ากันของเซต (Equation of Set)

เซตสองเซตจะเท่ากันก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว เช่น

$$A = \{2, 4, 5\}$$

$$B = \{4, 2, 5\}$$

จะได้ว่าเซต A เท่ากับเซต B เพราะว่าสมาชิกของเซต A และเซต B เหมือนกันทุกตัว เขียนแทนด้วย $A = B$

เซตเทียบเท่ากัน (Equivalent Set)

เซตเทียบเท่ากัน คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งได้ เขียนแทนด้วย $\leftrightarrow$ เช่น

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{a, b, c\}$$

จะได้ว่า เซต A เทียบเท่ากับเซต B หรือเขียนแทนด้วย $A \leftrightarrow B$

สับเซต (Subset)

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เช่น $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ และ $C = \{2, 3, 4, 5\}$

จะได้ว่า A เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$

และ A ไม่เป็นสับเซตของ C เขียนแทนด้วย $A \not\subset C$

ข้อสังเกต

1. $\emptyset \subset A$ เมื่อ A คือเซตใด ๆ และ $\emptyset$ คือเซตว่าง
2. $A \subset A$
3. ลับเซตของเซตว่างจะมีเพียง $\emptyset$ ตัวเดียวเท่านั้น
4. เซตที่มีสมาชิก n ตัว จะมีลัษะตทั้งหมด 2^n ลัษะต

ลัษะตแท้ (Proper Subset)

ลัษะตแท้ คือลัษะตทุกลัษะต ยกเว้นลัษะตที่เป็นเซตของตัวมันเอง เช่น

$A = \{1, 2\}$ จะได้ว่า

จำนวนลัษะตของเซต $A = 2^2 = 4$ ได้แก่ $\{\emptyset\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ และ $\{1, 2\}$

และจำนวนลัษะตแท้ของเซต $A = 2^2 - 1 = 3$ ได้แก่ $\{\emptyset\}$, $\{1\}$ และ $\{2\}$

เอกภพลัษะต (Universal)

เอกภพลัษะต คือลัษะตที่กำหนดขึ้นซึ่งเป็นขอบเขตของการพิจารณาทั้งหมด นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ U

การกระทำของเซต (Operation of Set)

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \dots\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

จะได้ว่า

1. ยูเนียน (Union) ; ยูเนียนของเซต A และเซต B คือลัษะตที่มีสมาชิกทุกตัวอยู่ใน A หรือ B หรือทั้งสองเซต เขียนแทนด้วย $A \cup B$

ดังนั้น จะได้ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

2. อินเตอร์เซกชัน (Intersection) ; อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B คือลัษะตที่มีสมาชิกทุกตัวอยู่ใน A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$

ดังนั้น จะได้ $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

ข้อสังเกต

ถ้า $A \cap B = \emptyset$ เรียกเซต A และเซต B ว่า Disjoint หรือ Non-Intersecting

3. คอมพลีเมนต์ (Complement) ; คอมพลีเมนต์ของเซต A ซึ่งเป็นลัษะตของเอกภพลัษะต U คือลัษะตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย A' (อ่านว่า เอไพรม์) ดังนั้น

$A' = \{7, 8, 9, \dots\}$

$B' = \{10, 12, 14, \dots\}$

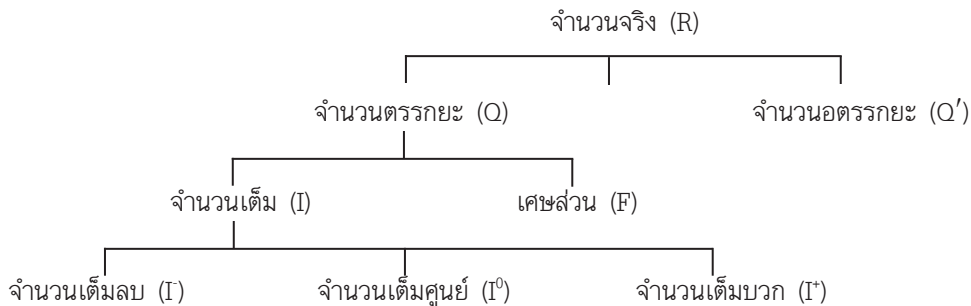
4. ผลต่าง (Relative Complement) ; ผลต่างระหว่างเซต A และเซต B คือลัษะตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A - B$ ดังนี้

$A - B = \{1, 3, 5\}$

$B - A = \{8\}$

จำนวนจริง

จำนวนจริง คือจำนวนที่ประกอบไปด้วย จำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ สามารถพิจารณาโครงสร้างของระบบจำนวนจริงได้ดังนี้



จำนวนตรรกยะ คือจำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนหรือทศนิยมซ้ำได้ นั่นคือ

“ถ้า A เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว A จะเป็นจำนวนตรรกยะก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม M และ N ทำให้ $A = \frac{M}{N}$ โดยที่ $N \neq 0$ ” เช่น 2.9, 4.777, 9.70 เป็นต้น

จำนวนอตรรกยะ คือจำนวนที่ไม่สามารถแทนได้ด้วยทศนิยมซ้ำหรือเศษส่วน นั่นคือ

“ถ้า B เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว B จะเป็นจำนวนอตรรกยะก็ต่อเมื่อไม่สามารถเขียนรูป B ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้” เช่น ค่าของ π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ เป็นต้น

รากที่สอง

นิยาม ถ้า A เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $A > 0$ แล้ว รากที่สองของ $\sqrt{A}$ คือจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ A

รากที่สองของ A มีทั้งรากที่สองที่เป็นบวก คือ $\sqrt{A}$ และรากที่สองที่เป็นลบ คือ $-\sqrt{A}$ นั่นคือ

$$(\sqrt{A})^2 = (-\sqrt{A})^2 = A$$

Note รากที่สองของจำนวนบวกจะเป็นจำนวนตรรกยะหรืออตรรกยะเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น คุณสมบัติของ $\sqrt{A}$ เมื่อ $A > 0$

ถ้า $A \geq 0$ และ $B \geq 0$ แล้ว $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

ถ้า $A \geq 0$ และ $B > 0$ แล้ว $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

การหารากที่สอง ในการหารากที่สองมีวิธีดังต่อไปนี้

1. การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ พิจารณาได้ดังนี้

รากที่สองของ 256

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } 256 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\
 &= 2^4 \times 2^4 \\
 &= (2^2 \times 2^2) = (4 \times 4)^2 = 16^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{จะได้ว่า } 256 = 16^2 \text{ และ } (-16)^2$$

นั่นคือ รากที่สองของ 256 = 16, -16

2. การหารากที่สองโดยวิธีตั้งหาร มีหลักการดังนี้

✎ แบ่งตัวเลขจากขวามือ ซ้ายมือ ครึ่งละสองตัว ถ้ามีจุดทศนิยมให้แบ่งจากซ้าย ขวา

✎ หาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วใกล้เคียงหรือเท่ากับจำนวนแรกทางซ้ายมือ

✎ นำเอา 2 คูณผลลัพธ์ที่ได้ในครั้งแรก แล้วหาตัวเลขมาเติม หลังผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณด้วย 2 แล้วคูณด้วยเลขจำนวนนั้น ทำอย่างนี้ไปเรื่อย ๆ จนได้เศษเป็นศูนย์

3. การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ย โดยการหาค่าที่ยกกำลังสองแล้ว มีค่าน้อยกว่าจำนวนที่ต้องการหาหนึ่งจำนวน และมากกว่าอีกหนึ่งจำนวน แล้วนำมาหาค่าที่ใกล้เคียง

Note ถ้า รากที่สองที่เป็นบวกของ A คือ $\sqrt{A}$

รากที่สองที่เป็นบวกของ B คือ $\sqrt{B}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 &= (\sqrt{A})^2 + 2(\sqrt{A})(\sqrt{B}) + (\sqrt{B})^2 \\ &= A + 2\sqrt{AB} + B \end{aligned}$$

$$\text{ฉะนั้น } (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = A + B + 2\sqrt{AB} \quad \text{.....(1)}$$

และรากที่สองของ $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$ คือ $(\sqrt{A} + \sqrt{B})$

$$\text{นั่นคือ } (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = (\sqrt{A} + \sqrt{B}) \quad \text{.....(2)}$$

แทนค่า (1) ใน (2) จะได้ว่า $\sqrt{A + B + 2\sqrt{AB}} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})$

รากที่สาม

นิยาม ถ้า A เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว รากที่สามของ A คือจำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้ A

สัญลักษณ์ คือ $\sqrt[3]{A}$ นั่นคือ $(\sqrt[3]{A})^3 = A$ พิจารณาตัวอย่าง

$$\sqrt[3]{(-64)} = \sqrt[3]{(-4)(-4)(-4)}$$

$$\text{ฉะนั้น } \sqrt[3]{(-64)} = (-4)$$

รากที่ n

นิยาม ถ้า A เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว รากที่ n ของ A คือจำนวนที่ยกกำลัง n แล้วได้ A

สัญลักษณ์คือ $\sqrt[n]{A}$ นั่นคือ $(\sqrt[n]{A})^n = A$

เลขยกกำลัง

ถ้า A เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว n เป็นจำนวนเต็มบวก “A ยกกำลัง n หมายถึง ผลคูณของ A ซึ่งมีทั้งหมด n ตัว”

$$\text{นั่นคือ } A^n = A \times A \times \dots \times A \text{ (n ตัว)}$$

โดยที่ A คือฐาน

n คือเลขชี้กำลัง

คุณสมบัติของเลขยกกำลัง

กำหนดให้ A, B เป็นจำนวนใด ๆ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

1. $A^m \times A^n = A^{m+n}$
2. $A^m \div A^n = A^{m-n}$ เมื่อ $m > n$
3. $(A^m)^n = A^{mn}$
4. $(A \times B)^n = A^n \times B^n$
5. $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$
6. $A^0 = 1$
7. $A^{-n} = \frac{1}{A^n}$
8. $A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}$
9. $A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$

คุณสมบัติของเครื่องหมายราก

กำหนดให้ A, B เป็นจำนวนใด ๆ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1. $(\sqrt[n]{A})^n = A$
2. $\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A \cdot B}$
3. $\sqrt[n]{A} \div \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$
4. $(\sqrt[n]{A^n}) = A$ เมื่อ A เป็นจำนวนคี่
และ $(\sqrt[n]{A^n}) = |A|$ เมื่อ A เป็นจำนวนคู่
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[m \cdot n]{A}$
6. คอนจูเกตของ $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ คือ $\sqrt{A} - \sqrt{B}$