

คู่มือโปรแกรม GeoGebra



ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คู่มือโปรแกรม GeoGebra

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คู่มือโปรแกรม GeoGebra

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มกราคม พ.ศ. 2564

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-577-472-7

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมคำนวณที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานทางด้านการเรียนการสอนหลายวิชาเช่น Calculus, Differential Equations, Probability and Statistics, Numerical Analysis, Linear Algebra, Number Theory

ในหนังสือ คู่มือโปรแกรม GeoGebra เล่มนี้จะแนะนำความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม GeoGebra การใช้งานเบื้องต้นของโปรแกรม การเขียนกราฟและการปรับแต่งภาพกราฟให้สวยงาม การใช้ฟังก์ชันสำเร็จรูปของโปรแกรม GeoGebra การเขียนโปรแกรมโดยใช้คำสั่งของ GeoGebra และประยุกต์ใช้งานคำนวณทั้งระดับมัธยมศึกษาและระดับอุดมศึกษา

การใช้คู่มือเล่มนี้เพื่อศึกษาการใช้งานโปรแกรม GeoGebra แนะนำให้ฝึกพิมพ์คำสั่งตามตัวอย่าง เมื่อได้ผลถูกต้องตามหนังสือแล้วจึงดัดแปลงสูตรหรือตัวแปรเพื่อคำนวณค่าต่าง ๆ ให้เข้าใจมากขึ้น

สุดท้ายนี้หวังว่าผู้อ่านทุกท่านจะได้รับประโยชน์จากหนังสือเล่มนี้ และสามารถนำโปรแกรม GeoGebra ไปประยุกต์ใช้งานในสาขาต้องการได้

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

มกราคม 2564

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1	ความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม GeoGebra	1 – 36
1.1	การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ หาร และเลขยกกำลัง	2
1.2	สามารถกำหนดการแสดงผลการคำนวณให้เป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง	3
1.3	มีฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	4
1.4	มีความสามารถในการกำหนดสูตรของฟังก์ชันเพื่อใช้งานได้	6
1.5	สามารถกำหนดเซตของจำนวนและคำนวณสมาชิกภายในเซตได้	7
1.6	สามารถเปลี่ยนหน่วยการคำนวณเป็นองศา และเรเดียน	8
1.7	สามารถหาเศษเหลือ ตรวจสอบจำนวนเฉพาะ และตัวประกอบจำนวนเฉพาะของจำนวนเต็ม	10
1.8	สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบ	11
1.9	การคำนวณในรูปแบบเลขฐาน 2, 4, 8, 10 และฐานอื่น ๆ	23
1.10	การคำนวณในรูปแบบเวกเตอร์	24
1.11	การคำนวณในรูปแบบเมทริกซ์	26
1.12	การคำนวณจำนวนเชิงซ้อน	27
1.13	การหาผลบวกอนุกรม อนุกรมกำลัง และผลคูณของลำดับ	28
1.14	การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น	30
1.15	กราฟ Box plot Histogram Stem and leaf Pie chart และการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลในรูปแบบ $y = a + bx$	31
1.16	สามารถจัดรูปพีชคณิต แยกตัวประกอบและกระจายพหุนาม	37
1.17	สามารถหาอนุพันธ์ อนุพันธ์ย่อย และอนุพันธ์อันดับสูง	39
1.18	สามารถหาอินทิกรัลจำกัดเขต และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต	41
1.19	สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน	43

1.20	สามารถนำคำสั่งของ GeoGebra มาเขียนเป็นโปรแกรมได้	45
1.21	สามารถหารากของสมการ $f(x) = 0$ และผลเฉลยของระบบสมการ	46
1.22	สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการ	48
1.23	สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์	49
1.24	มีฟังก์ชันเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เช่น ห.ร.ม. ค.ร.น. และแยกตัวประกอบ	51
1.25	สามารถหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผันได้	53
1.26	สามารถหาพหุนามเทย์เลอร์ของ $f(x)$ ได้	54
1.27	สามารถหารอนสเกียนของฟังก์ชัน	55
1.28	สร้างตารางความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน และการแจกแจงทวินาม สามารถทดสอบสมมติฐาน และหาช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของ	56
1.29	ค่าพารามิเตอร์ได้	58
1.30	สามารถหา เกรเดียนต์ เคลิร์ และ ไดเวอร์เจนต์ ของฟังก์ชันได้	62

บทที่ 2	การใช้โปรแกรม GeoGebra	63 – 144
----------------	-------------------------------	-----------------

2.1	การเรียกโปรแกรม GeoGebra ขึ้นมาใช้งาน	71
2.2	การคำนวณโดยใช้โปรแกรม GeoGebra	86
2.3	การเขียนกราฟของฟังก์ชัน	93
2.4	การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์	98
2.5	การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์	102
2.6	การหาค่าสถิติเบื้องต้น	104
2.7	การเขียนแผนภาพการกระจายของข้อมูลและหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน	108
2.8	การคำนวณค่าเกี่ยวกับผลบวกในรูปแบบ Σ	114
2.9	การคำนวณค่าอินทิกรัล $\int_a^b f(x) dx$, $\int f(x) dx$ และอินทิกรัลซ้อน	115

2.10	การคำนวณค่าอนุพันธ์ $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ และอนุพันธ์ย่อย	116
2.11	การกำหนดหน่วยของค่าให้กับฟังก์ชันตรีโกณมิติ	118
2.12	การคำนวณในรูปแบบของเลขฐาน	122
2.13	การหาผลบวก $\sum_{i=1}^n a_i$, $\sum_{i=1}^n b_i$, $\sum_{i=1}^n a_i^2$, $\sum_{i=1}^n b_i^2$ และ $\sum_{i=1}^n a_i b_i$	123
2.14	การสร้างตารางฟังก์ชัน	125
2.15	การคำนวณค่าเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน	126
2.16	การหารากของสมการ $f(x) = 0$	128
2.17	การหาผลเฉลยของระบบสมการ	129
2.18	การคำนวณค่า ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ และ ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	130
2.19	การคำนวณที่ให้ผลลัพธ์เป็นสูตร สัญลักษณ์ หรือเศษส่วนอย่างต่ำ	131
2.20	การหาพหุนามเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน	134
2.21	การหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผัน	136
2.22	การคำนวณเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม	137
2.23	การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และระบบสมการเชิงอนุพันธ์	140
2.24	ฟังก์ชันเกี่ยวกับจำนวนเต็มเช่น ห.ร.ม. ค.ร.น. การแยกตัวประกอบ	141
2.25	สามารถหาเศษเหลือ mod n และฟังก์ชันต่าง ๆ ของจำนวนเต็ม	142
2.26	สามารถหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม	143

บทที่ 3	การเขียนกราฟใน 2 มิติ	145 – 300
3.1	การเขียนกราฟใน Window Graphics	145
บทที่ 4	การเขียนกราฟใน 3 มิติ	301 – 466
4.1	การเขียนกราฟใน Window Graphics และ Window 3D Graphics	303
บทที่ 5	การเขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว	467 – 478
บทที่ 6	คำสั่งและการใช้งานเบื้องต้น	479 – 530
6.1	การกำหนดผลการคำนวณให้แสดงผลลัพธ์ตามที่ต้องการ	481
6.2	การใช้งานโปรแกรม GeoGebra เบื้องต้น	485
6.3	การ copy สูตร และ การ paste สูตร	492
6.4	การบันทึกแฟ้มข้อมูล	496
6.5	การเปิดแฟ้มข้อมูล	498
6.6	ฟังก์ชันสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์	500
บทที่ 7	การเขียนโปรแกรมด้วยคำสั่งของ GeoGebra	531 – 564
บทที่ 8	การคำนวณระดับ ม. ปลาย ด้วยโปรแกรม GeoGebra	565 – 612
8.1	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 1	565
8.2	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 2	572
8.3	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 3	586
8.4	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 4	597
8.5	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 5	601

8.8	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 6	607
8.7	GeoGebra กับการเฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์	610

บทที่ 9	การคำนวณระดับอุดมศึกษาด้วยโปรแกรม GeoGebra	613 – 700
----------------	---	------------------

9.1	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับแคลคูลัส	613
9.2	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์	663
9.3	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลข	671
9.4	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น	676
9.5	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับความน่าจะเป็นและสถิติ	679
9.6	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ขั้นสูง	698

บทที่ 10	การวิเคราะห์ข้อมูลทางด้านสถิติด้วยโปรแกรม GeoGebra	701 – 770
-----------------	---	------------------

10.1	การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น	701
10.2	การหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าพารามิเตอร์	703
10.3	การทดสอบสมมติฐาน	734
10.4	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์และการถดถอยเชิงเส้น	752
10.5	การวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA)	764

บทที่ 1

ความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม GeoGebra

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมช่วยในการคำนวณ สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้ในการเรียนการสอนหลายวิชาเช่น Calculus Probability and Statistics Linear Algebra Differential Equations ในบทนี้จะนำความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม GeoGebra ที่คำนวณได้มาให้ดูก่อนเพื่อผู้อ่านจะได้เห็นความสามารถทางการคำนวณที่สำคัญของโปรแกรม GeoGebra ส่วนของการพิมพ์คำสั่ง การเข้าสู่โปรแกรม GeoGebra และการประยุกต์จะกล่าวในบทต่อไป

ลักษณะการทำงานของโปรแกรม GeoGebra ใน Window CAS (Computational Algebra System) มีบรรทัดของคำสั่งที่เราต้องพิมพ์คำสั่งของการคำนวณเข้าไปเรียกว่า Row #k และโปรแกรม GeoGebra จะแสดงผลการคำนวณใน Row เดียวกัน ดังนั้นการยกตัวอย่างความสามารถของโปรแกรมจึงขอแสดงผลการคำนวณที่ปรากฏบนจอภาพซึ่งใน Row มีทั้งส่วน Input และส่วน Output ตัวอย่างเช่น

1 ☐	1+2 → 3
2 ☐	(7+4)*(7-4) → 33
3 ☐	sqrt(6.25) → $\frac{5}{2}$
4 ☐	2.5^2 → $\frac{25}{4}$

1.1 การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ หาร และยกกำลัง

1 ☐	$3.25+16.5$ $\rightarrow \frac{79}{4}$
2 ☐	$7.5-3.25$ $\rightarrow \frac{17}{4}$
3 ☐	$12*3$ $\rightarrow 36$
4 ☐	$3.5/2$ $\rightarrow \frac{7}{4}$
5 ☐	2.5^2 $\rightarrow \frac{25}{4}$
6 ☐	$(2^2+3*4)^{0.5}$ $\rightarrow 4$
7 ☐	$(2^3)^4$ $\rightarrow 4096$
8 ☐	$((3/7)+(4/13))/((2/3)+(4/11))$ $\rightarrow \frac{2211}{3094}$

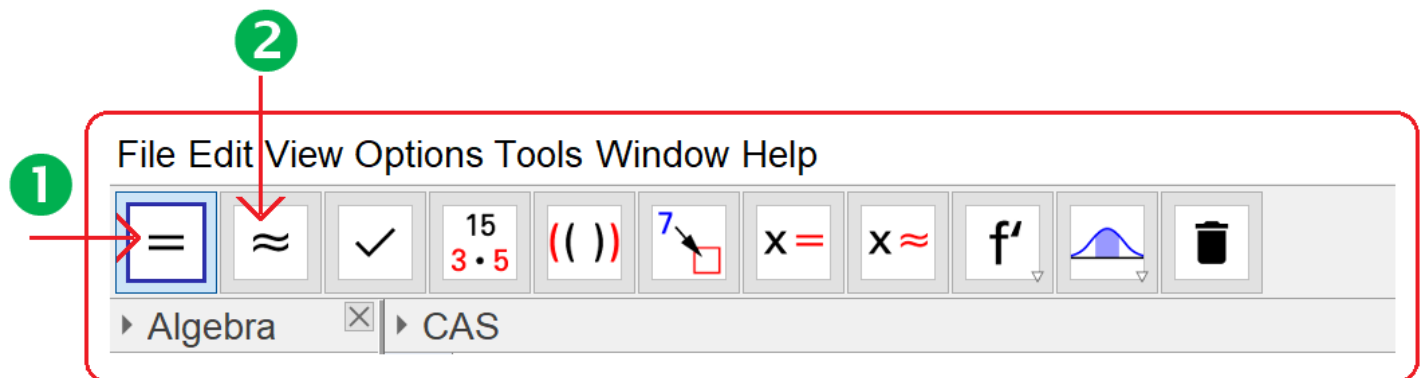
หมายเหตุ การแสดงผลเราสามารถเลือกแสดงผลเป็นเลขเศษส่วนอย่างต่ำหรือทศนิยมได้

1.2 สามารถกำหนดการแสดงผลการคำนวณให้เป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง

1	$\frac{22}{7}$
☐	≈ 3.142857142857
2	$20^{15.5}$
☐	$\approx 1.465429509734 \cdot 10^{20}$

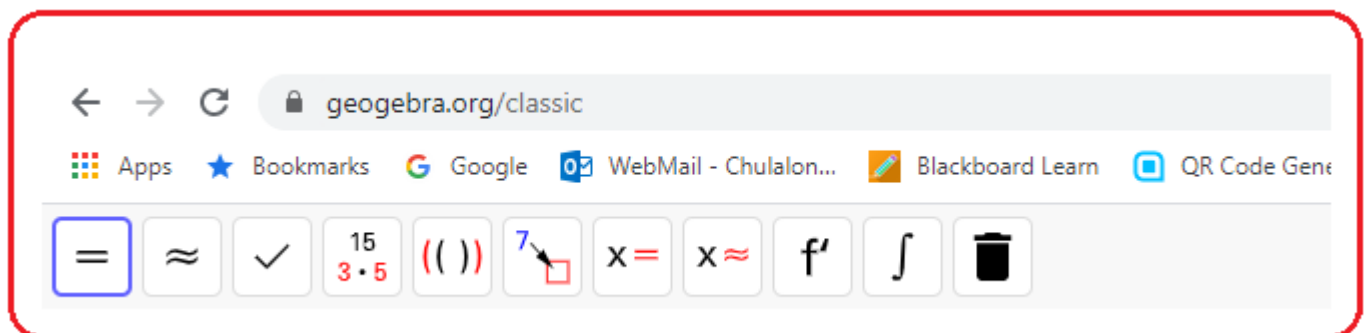
หมายเหตุ ค่า default แสดงตัวเลขนี้สำคัญมีค่าเท่ากับ 3

ภาพหน้าจอ GeoGebra Classic 5 บน Window CAS : Computational Algebra System



1. Option แสดงผลการคำนวณเป็นสัญลักษณ์หรือเศษส่วนอย่างต่ำ
2. Option แสดงผลการคำนวณเป็นเลขทศนิยม

ภาพจากหน้าจอ GeoGebra Classic Online และ GeoGebra Classic 6



1.3 มีฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1	$\sin(\pi/4)$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
2	$\sin(\pi/4)$ $\approx \mathbf{0.7071067811865}$
3	$\cos(\pi/6)$ $\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3}$
4	$\cos(\pi/6)$ $\approx \mathbf{0.8660254037844}$
5	$\tan(\pi/3)$ $\rightarrow \sqrt{3}$
6	$\tan(\pi/3)$ $\approx \mathbf{1.732050807569}$

หมายเหตุ

1. pi คือ π
2. หากต้องการสัญลักษณ์ π ให้กด Alt + p

1	$\exp(1)$ ☐ $\rightarrow \mathbf{e}$
2	$\exp(1)$ ☐ $\approx \mathbf{2.718281828459}$
3	$\exp(2)$ ☐ $\approx \mathbf{7.389056098931}$
4	$\log(10)$ ☐ $\approx \mathbf{2.302585092994}$
5	$\log_{10}(10)$ ☐ $\approx \mathbf{1}$
6	$\log_2(4)$ ☐ $\approx \mathbf{2}$
7	$\log_2(16)$ ☐ $\approx \mathbf{4}$

หมายเหตุ

1. $\exp(1)$ คือจำนวนจริง e ซึ่งมีค่า $e = 2.718281828459045$
2. $\exp(x)$ คือ e^x
3. $\log(x)$ คือ $\log$ ฐาน e ของ x
4. $\log_{10}(x)$ คือ $\log$ ฐาน 10 ของ x
5. $\log_2(x)$ คือ $\log$ ฐาน 2 ของ x

1.4 สามารถกำหนดสูตรของฟังก์ชันเพื่อใช้งานได้

1	$f(x) := 4 + 2x + x^2$ $\approx \mathbf{f(x) := x^2 + 2x + 4}$
2	$f(1)$ $\rightarrow \mathbf{7}$
3	$C(n,r) := n! / (r!(n-r)!)$ $\approx \mathbf{C(n,r) := \frac{n!}{r! (n-r)!}}$
4	$C(5,2)$ $\rightarrow \mathbf{10}$
5	$b(x,n,p) := (n! / x! / (n-x)!) * (p^x) * ((1-p)^{(n-x)})$ $\approx \mathbf{b(x, n, p) := p^x n! \frac{(-p + 1)^{n-x}}{x! (n-x)!}}$
6	$b(0,5,0.25)$ $\approx \mathbf{0.2373046875}$

หมายเหตุ $f(x) := \dots$ ใช้กำหนดสูตรของฟังก์ชัน

1.5 สามารถกำหนดเซตของจำนวน และ คำนวณค่าของสมาชิกภายในเซตได้

1	$a := \{2, 5, 7, 12\}$ $\approx \mathbf{a := \{2, 5, 7, 12\}}$
2	$a(1)$ $\approx \mathbf{2}$
3	$a(4)$ $\rightarrow \mathbf{12}$
4	a^2 $\approx \mathbf{\{4, 25, 49, 144\}}$
5	$2*a+1$ $\approx \mathbf{\{5, 11, 15, 25\}}$
6	$b:=\{1/2, 1/3, 1/4\}$ $\rightarrow \mathbf{b := \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\}}$
7	$8*b+4$ $\rightarrow \mathbf{\left\{ 8, \frac{20}{3}, 6 \right\}}$
8	$c:=\{2,5,7,10\}$ $\rightarrow \mathbf{c := \{2, 5, 7, 10\}}$
9	2^c $\rightarrow \mathbf{\{4, 32, 128, 1024\}}$

หมายเหตุ เซตของตัวเลขเป็นชนิดของตัวแปรแบบหนึ่งใน GeoGebra ซึ่งเรียกว่าตัวแปรแบบ List

สำหรับตัวแปรแบบ List การคำนวณต่าง ๆ จะมีผลกับสมาชิกทุกตัวในตัวแปร List และเราสามารถอ้างอิงสมาชิกแต่ละตัวที่เป็นสมาชิกของตัวแปร List ได้

1.6 สามารถเปลี่ยนหน่วยการคำนวณเป็นองศา และเรเดียน

1	degrees := pi/180 → degrees := $\frac{1}{180} \pi$
2	sin(60*degrees) → $\frac{1}{2} \sqrt{3}$
3	cos(60*degrees) → $\frac{1}{2}$
4	tan(45*degrees) → 1
5	tan ⁻¹ (1) → $\frac{1}{4} \pi$
6	tan ⁻¹ (1)/degrees → 45
7	tan ⁻¹ (-1)/degrees → -45
8	sin ⁻¹ (-1)/degrees → -90

หมายเหตุ

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติใน GeoGebra จะใช้หน่วยของมุมเป็นเรเดียนหรือองศาก็ได้
- degrees มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{180}$ ช่วยในการเปลี่ยนหน่วยของมุมระหว่างเรเดียนกับองศา
- การเปลี่ยนหน่วยของ Input ให้พิมพ์ *degrees ต่อท้ายตัวเลข
- การเปลี่ยนหน่วยของ Output ให้พิมพ์ /degrees ต่อท้ายตัวเลข

5. กด Alt + o จะได้สัญลักษณ์ องศา

6. กด Alt + p จะได้สัญลักษณ์ π

ตัวอย่างการคำนวณ

1 ☐	$\sin(45^\circ)$ ≈ 0.71
2 ☐	$\sin(\pi/4)$ $\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2}$
3 ☐	$\tan(\pi/3)$ $\rightarrow \sqrt{3}$
4 ☐	$\cos(60^\circ)$ $\rightarrow \frac{1}{2}$
5 ☐	$\cos(\pi/3)$ $\rightarrow \frac{1}{2}$
6 ☐	$\arcsin(1/2)$ $\rightarrow \frac{1}{6} \pi$
7 ☐	$\arcsind(1/2)$ $\rightarrow 30^\circ$

หมายเหตุ arcsin จะแสดงผลการคำนวณหน่วยเป็นเรเดียน

arcsind จะแสดงผลการคำนวณหน่วยเป็นองศา

1.7 สามารถหาเศษเหลือ ตรวจสอบจำนวนเฉพาะ และตัวประกอบจำนวนเฉพาะของจำนวนเต็ม

1	Mod(12,5)
☐	→ 2
2	Mod(x^3+2x+3, x^2+4)
☐	→ $-2x + 3$
3	NextPrime(120)
☐	→ 127
4	PreviousPrime(120)
☐	→ 113
5	PrimeFactors(120)
☐	→ {2, 2, 2, 3, 5}
6	IsPrime(12)
☐	→ false
7	IsPrime(11)
☐	→ true
8	GCD(120,25)
☐	→ 5
9	LCM(120,25)
☐	→ 600

หมายเหตุ Mod(a, n) คือเศษเหลือจากการหาร a ด้วย n

PreviousPrime(x), NextPrime(x) คือจำนวนเฉพาะก่อนและหลัง x

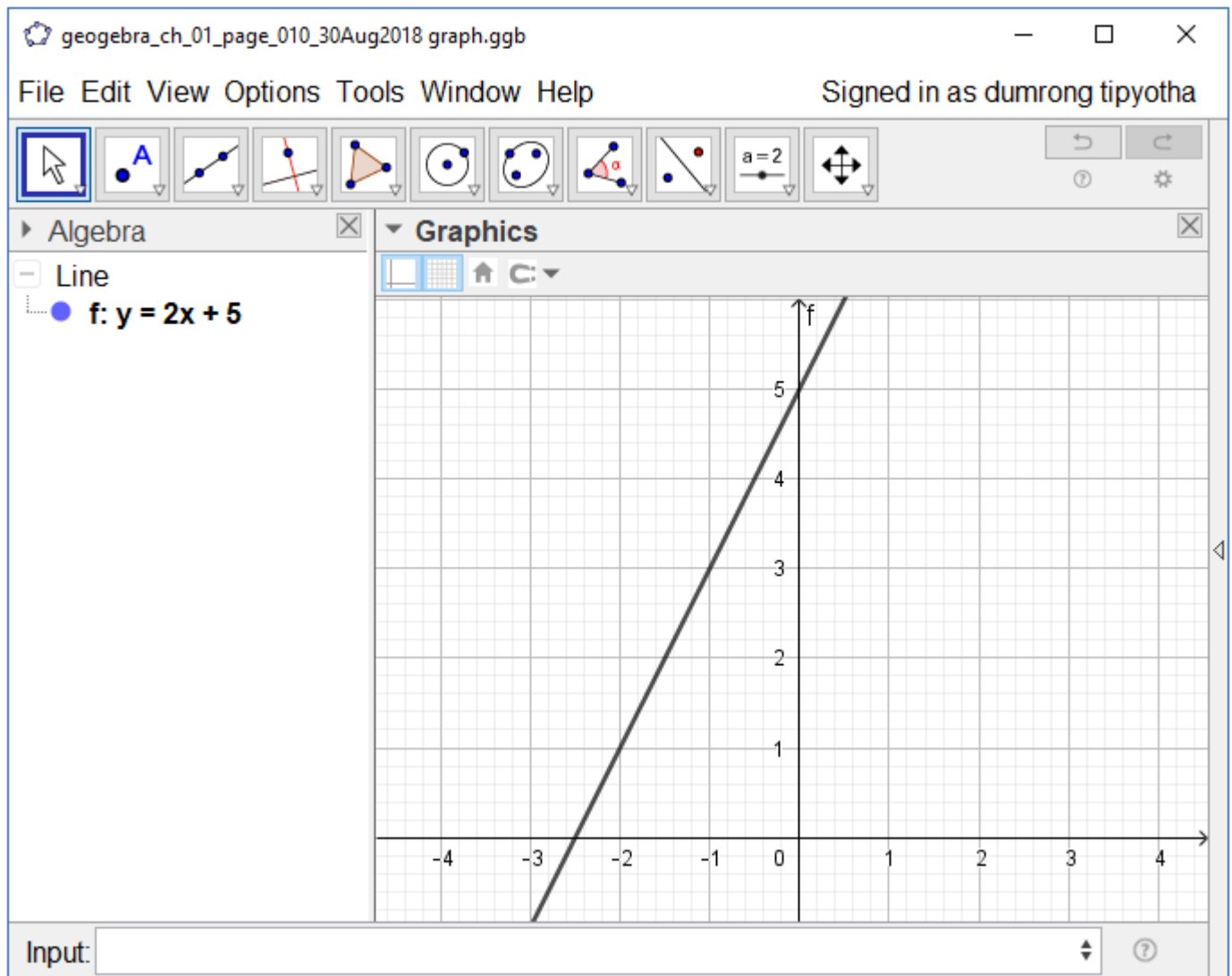
PrimeFactors(x) คือตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะของ x

IsPrime(x) ใช้ตรวจสอบว่า x เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

LCM(a, b), GCD(x, y) คือ ค.ร.น. และ ห.ร.ม. ของ x และ y

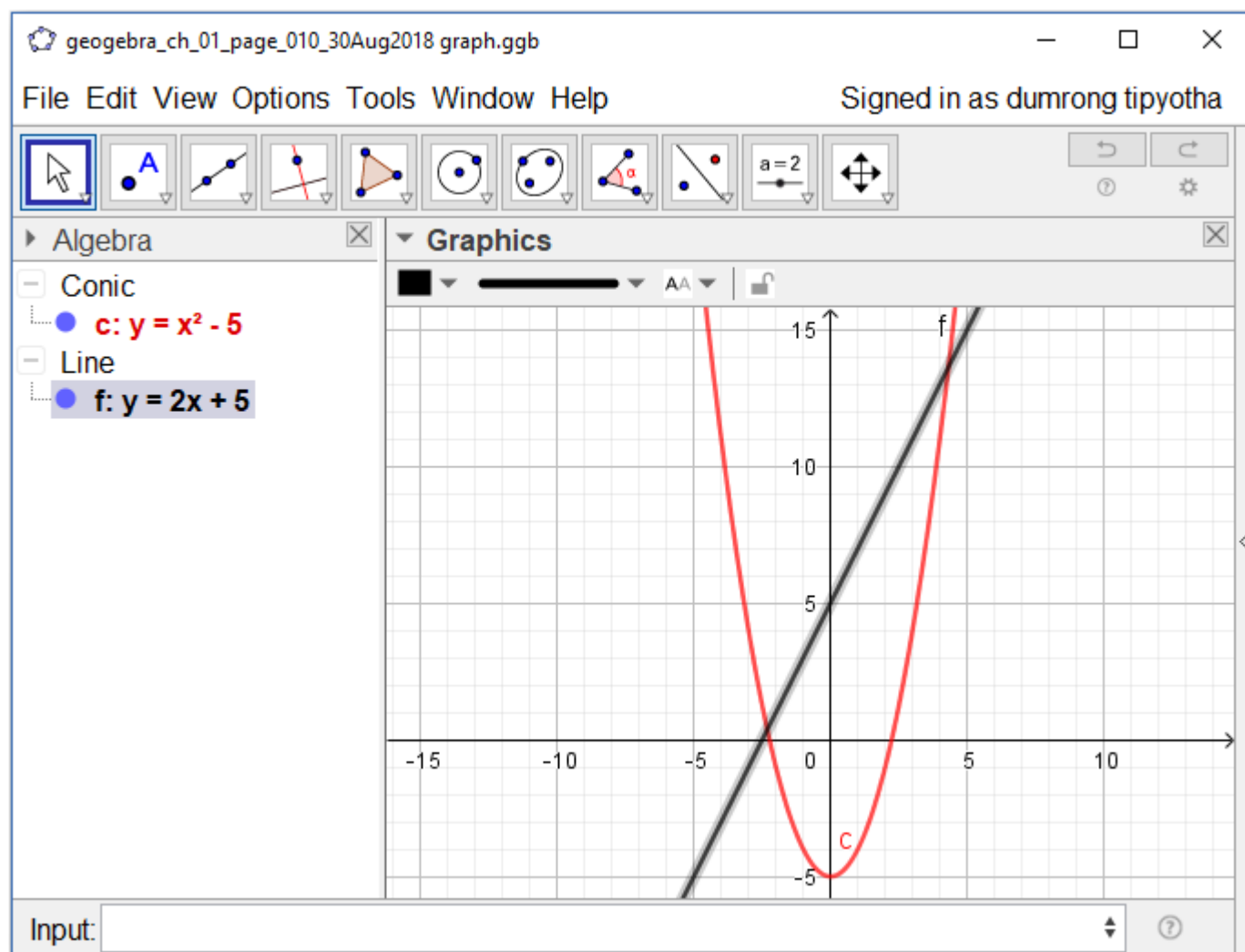
1.8 สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบ

1.8.1 กราฟในระบบพิกัดฉาก

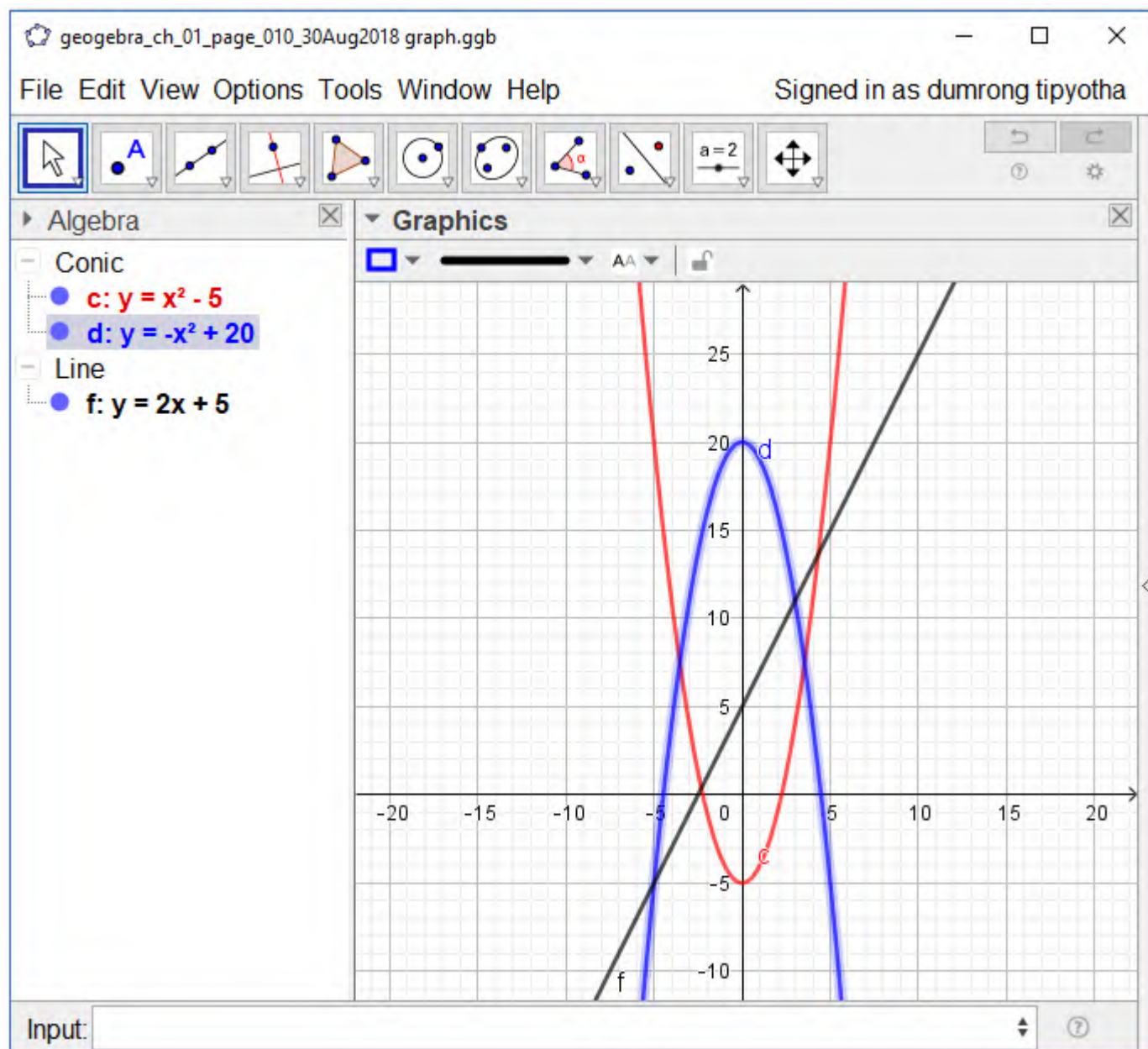


หมายเหตุ ภาพจาก GeoGebra Classic 5 บน Window Algebra และ Window Graphics

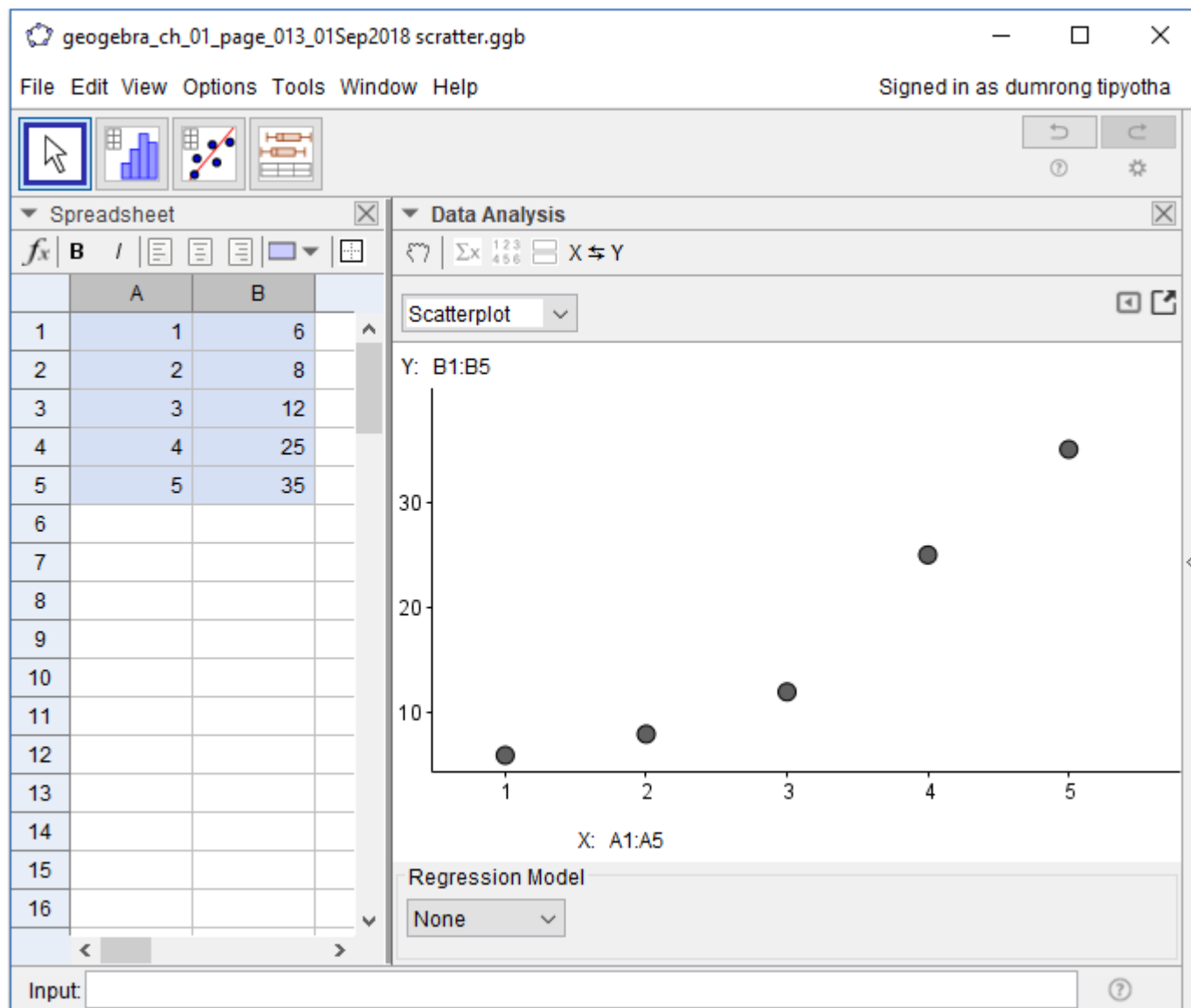
กราฟในระบบพิกัดฉาก 2 เส้นพร้อมกัน



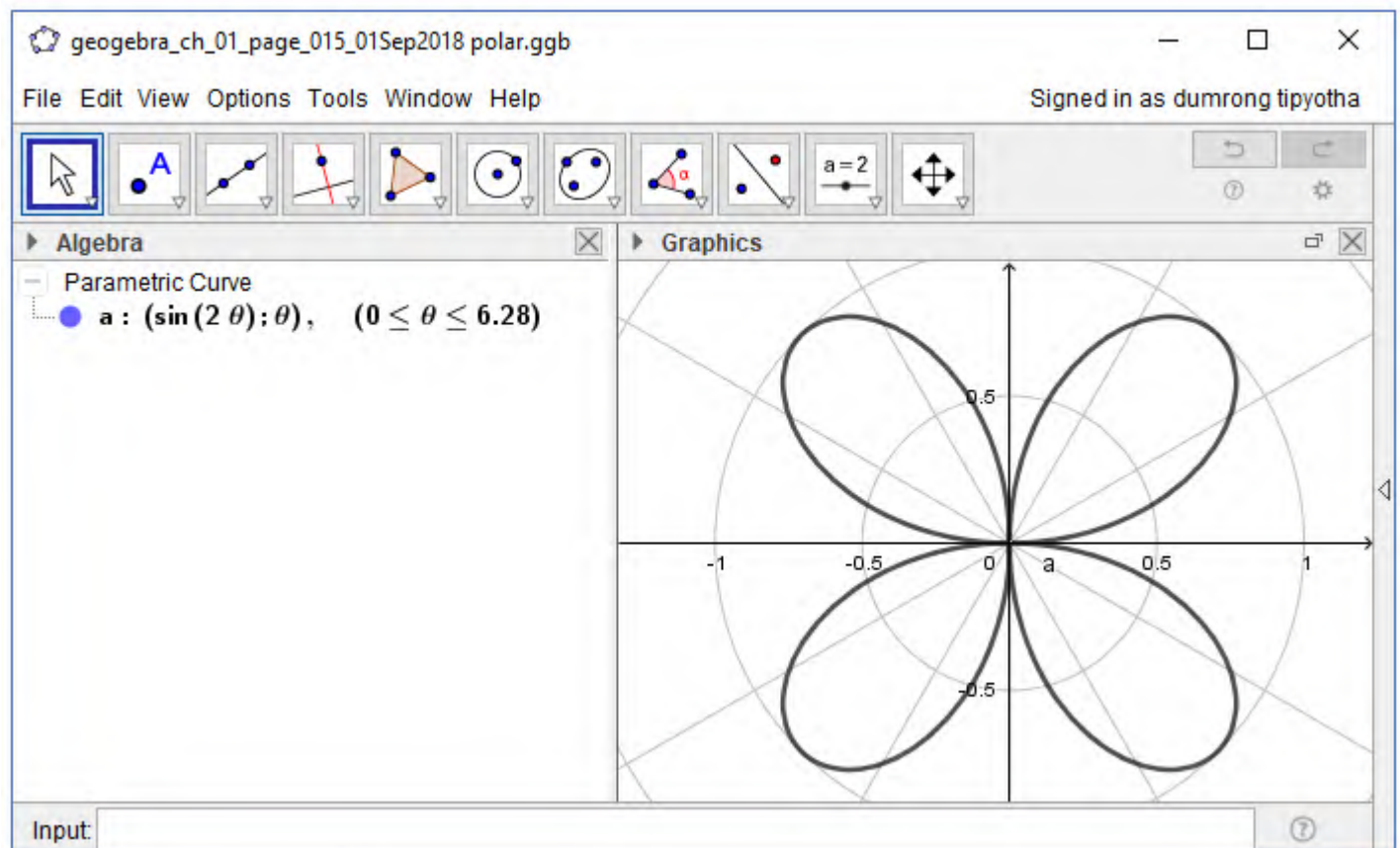
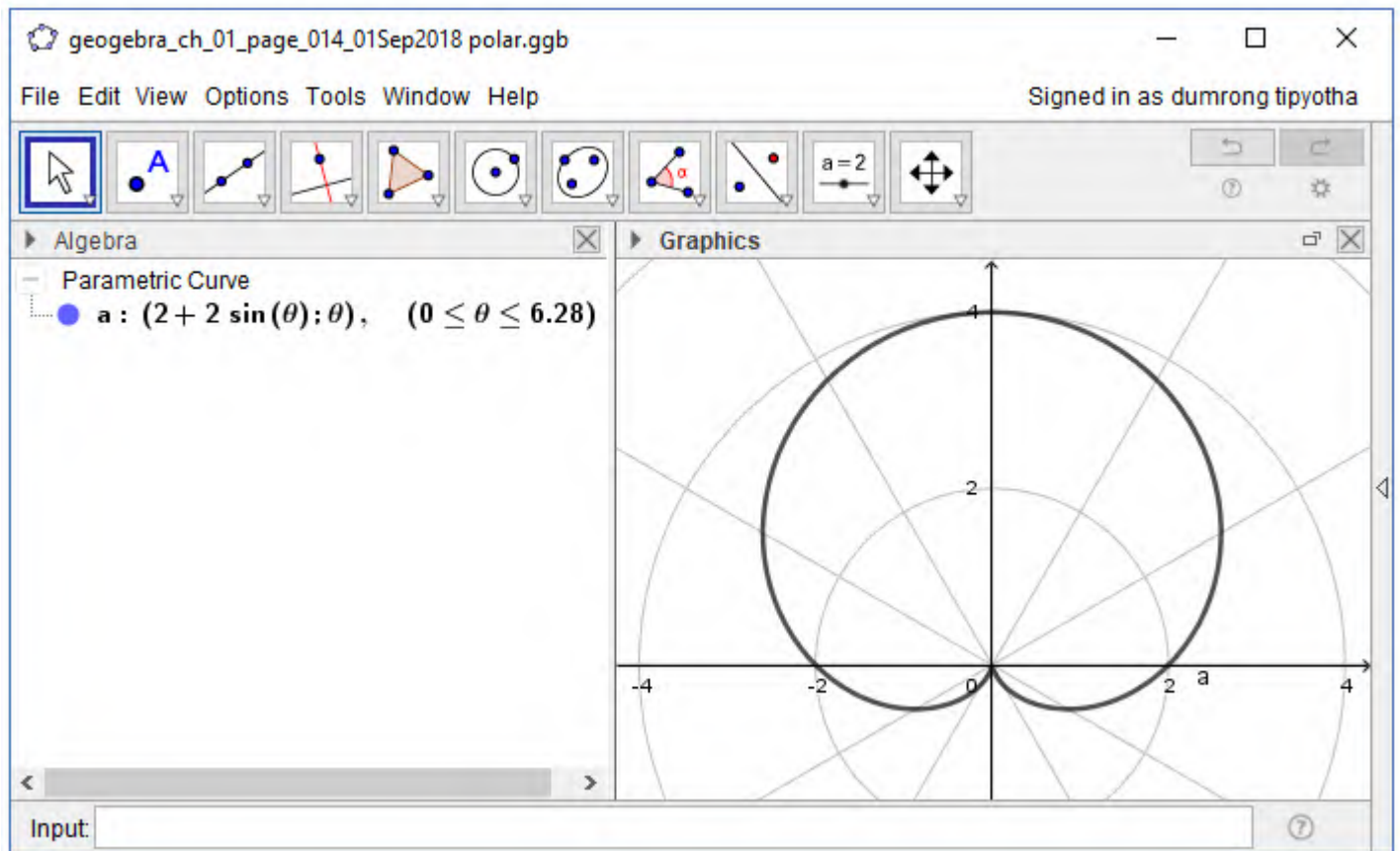
กราฟในระบบพิกัดฉาก 3 เส้นพร้อมกัน



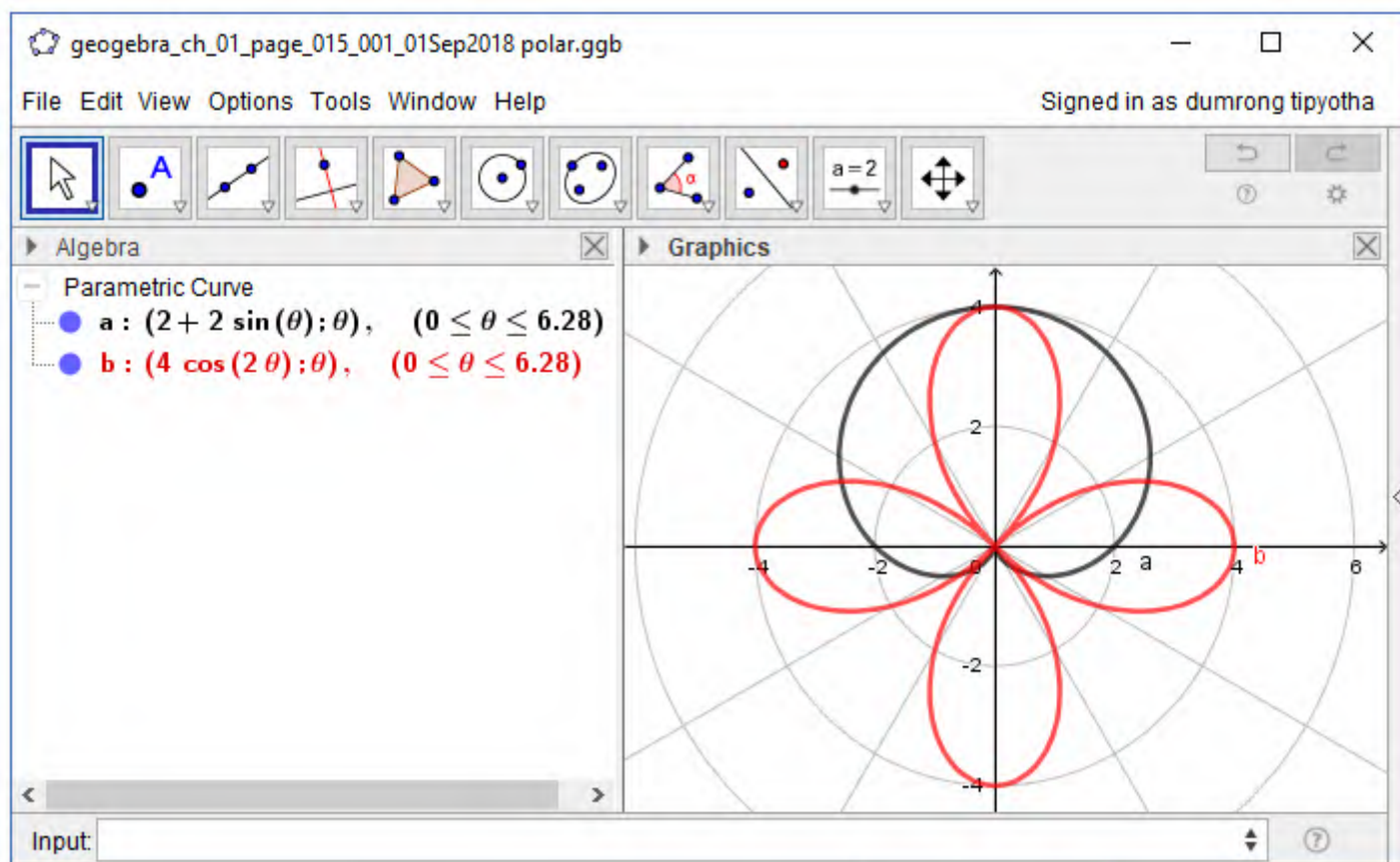
1.8.2 กราฟแผนภาพการกระจายของข้อมูล



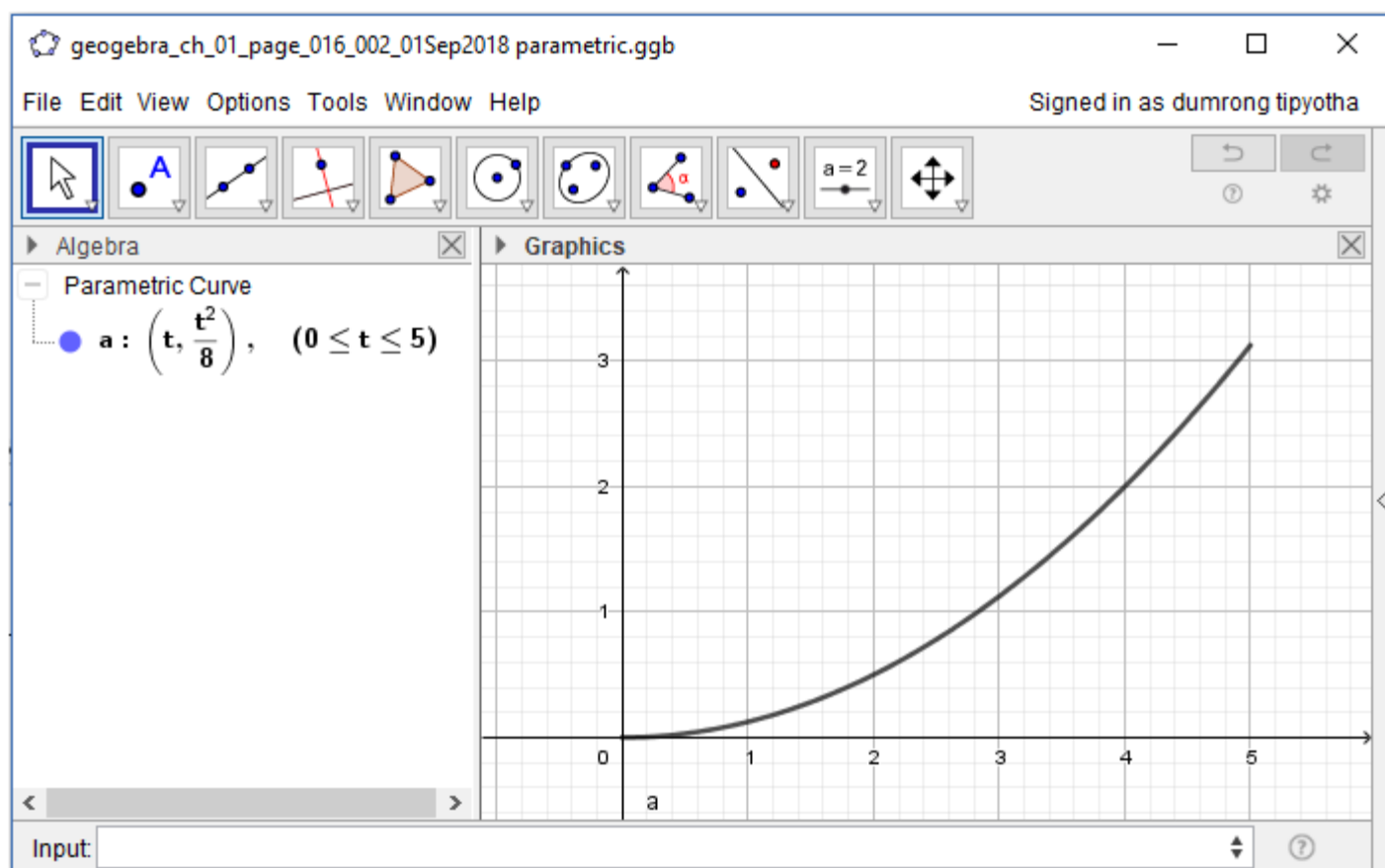
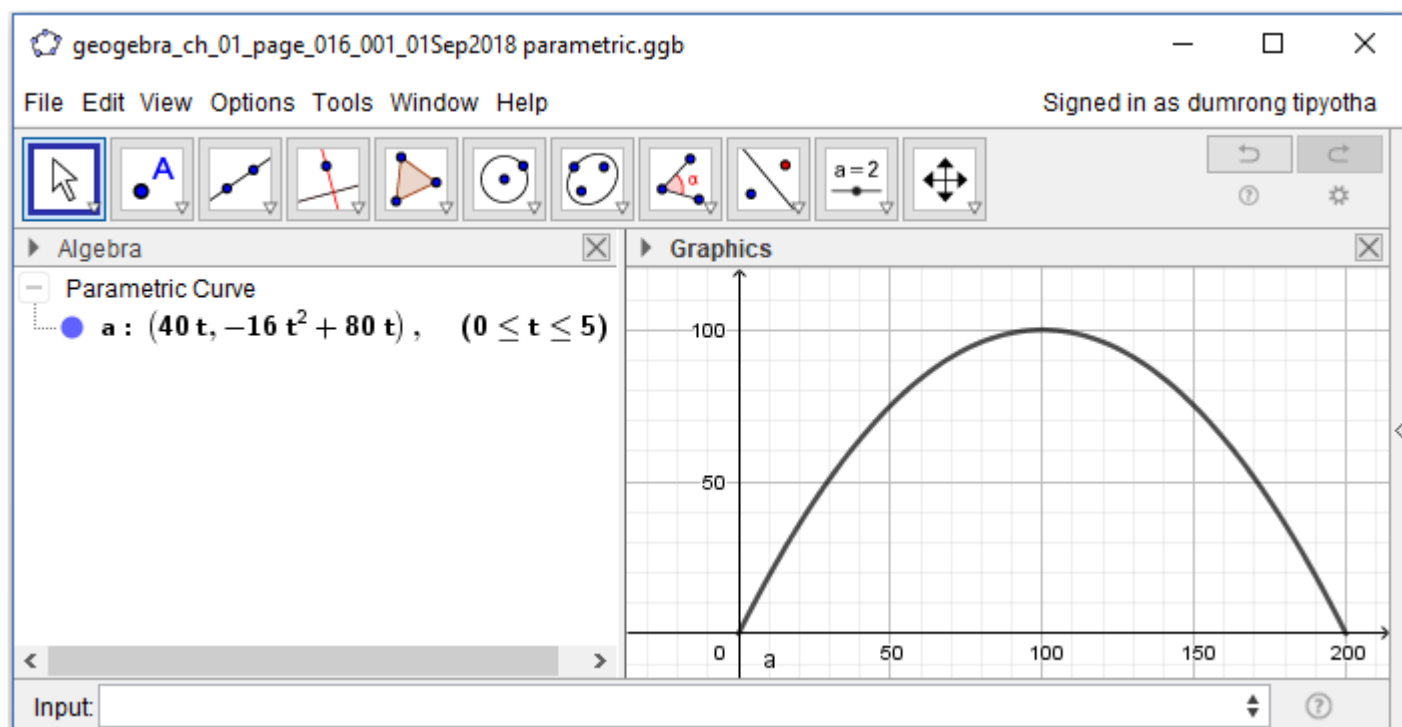
1.8.3 กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว เช่น $r = 2 + 2 \sin \theta$, $r = \sin(2\theta)$



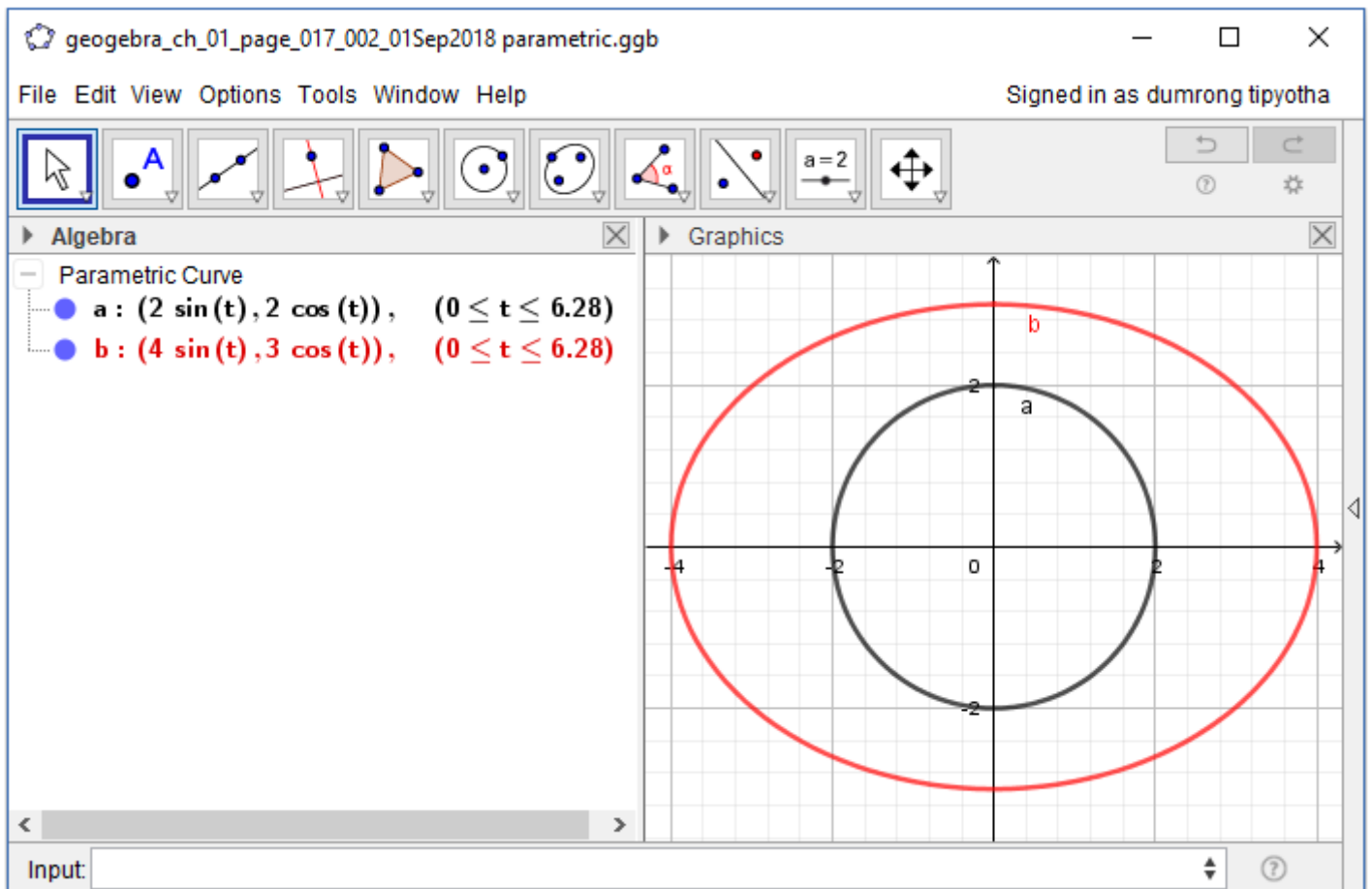
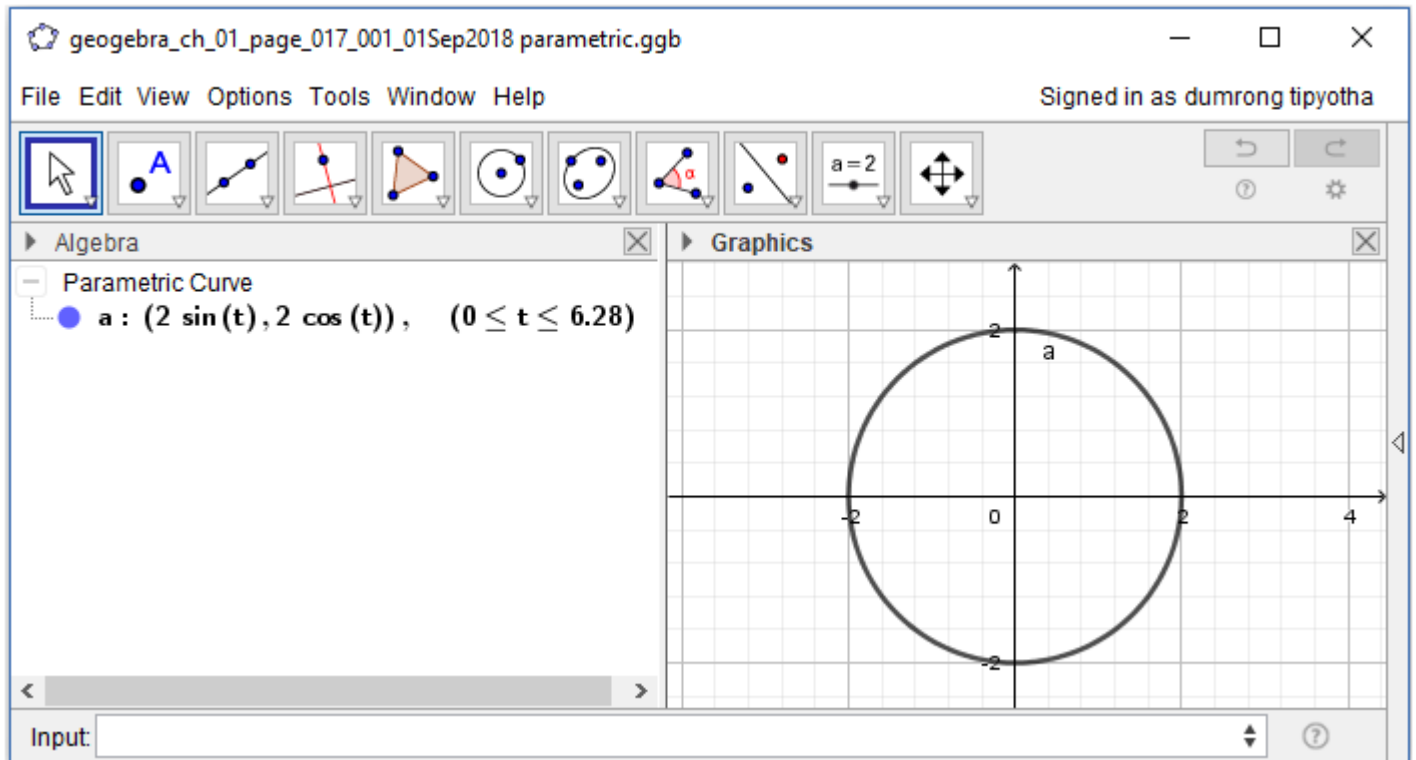
กราฟของ $r = 2 + 2 \sin \theta$ และ $r = 4 \cos(2\theta)$



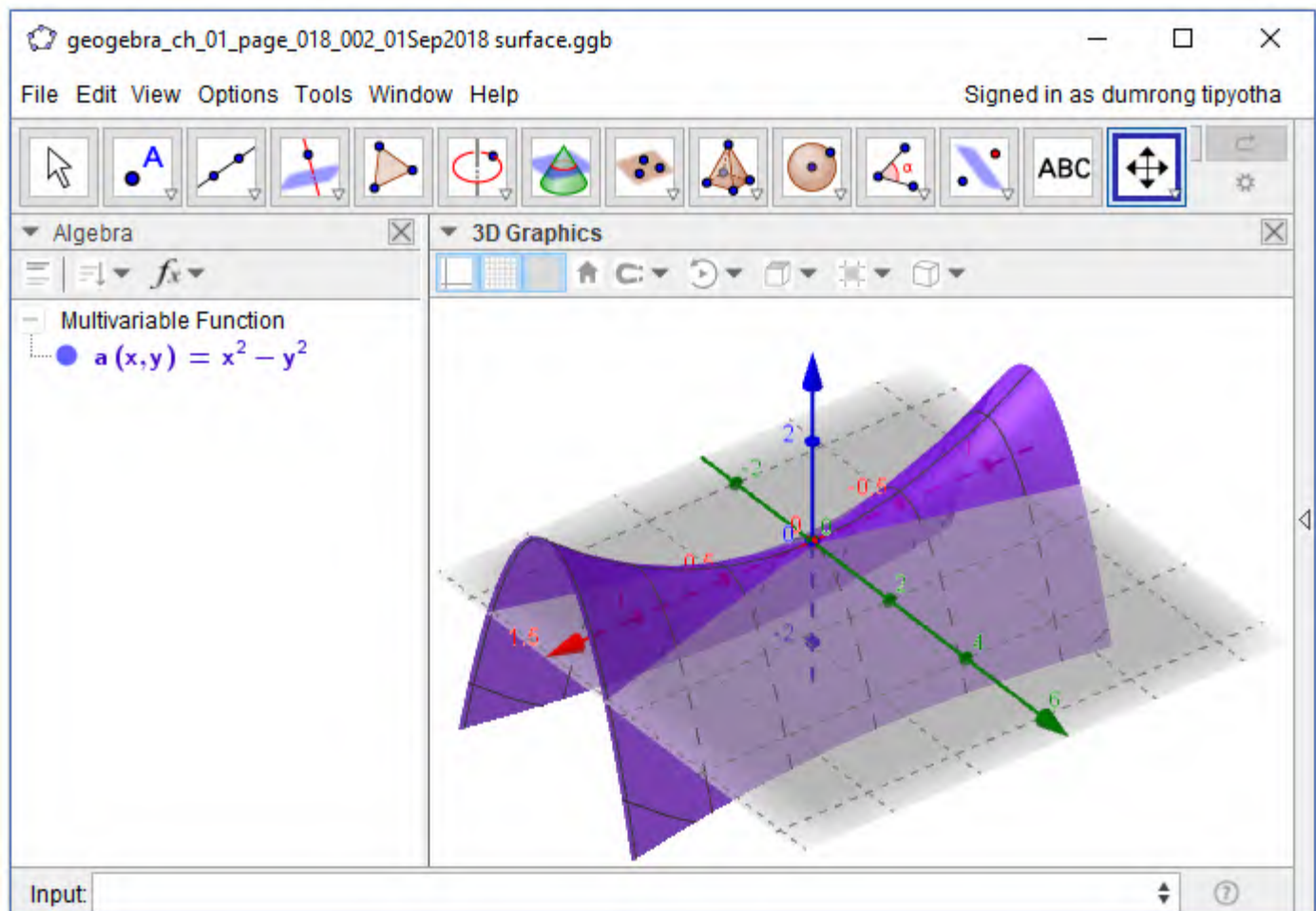
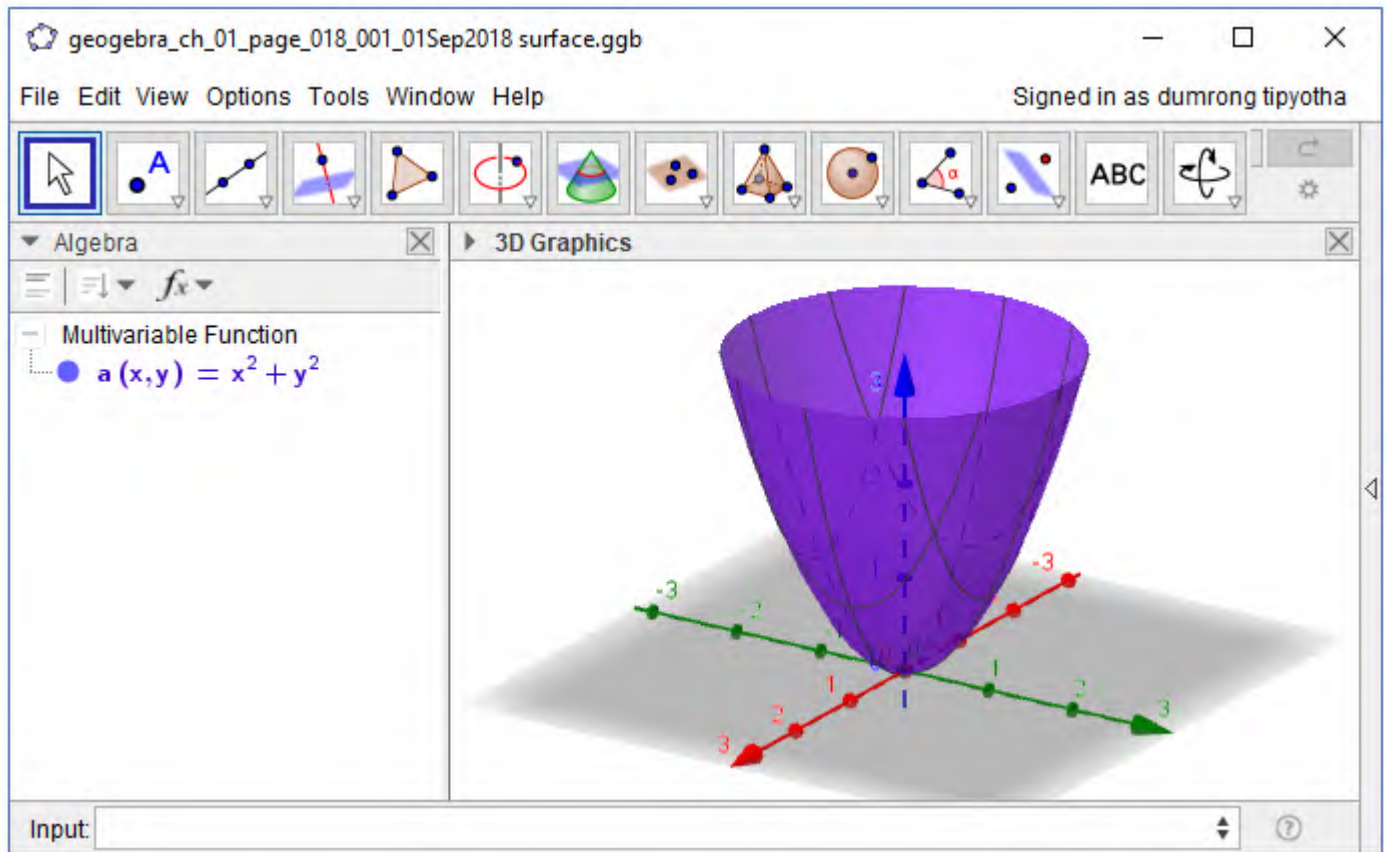
1.8.4 กราฟของสมการพาราเมตริก เช่น การเคลื่อนที่เป็นวงกลม และการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์

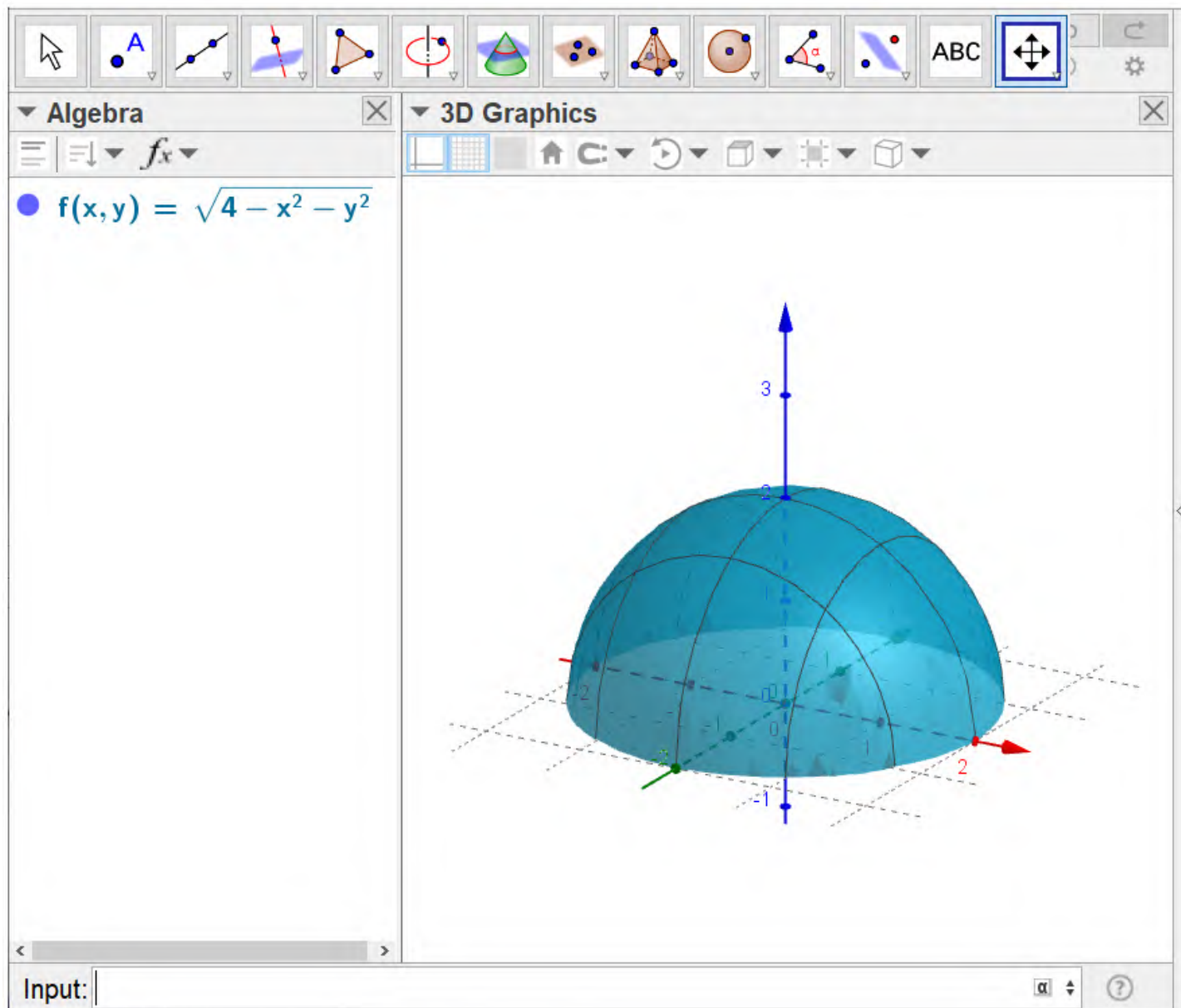


กราฟของวงกลม $r(t) = (2 \sin(t), 2 \cos(t))$ และวงรี $r(t) = (4 \cos(t), 3 \sin(t))$

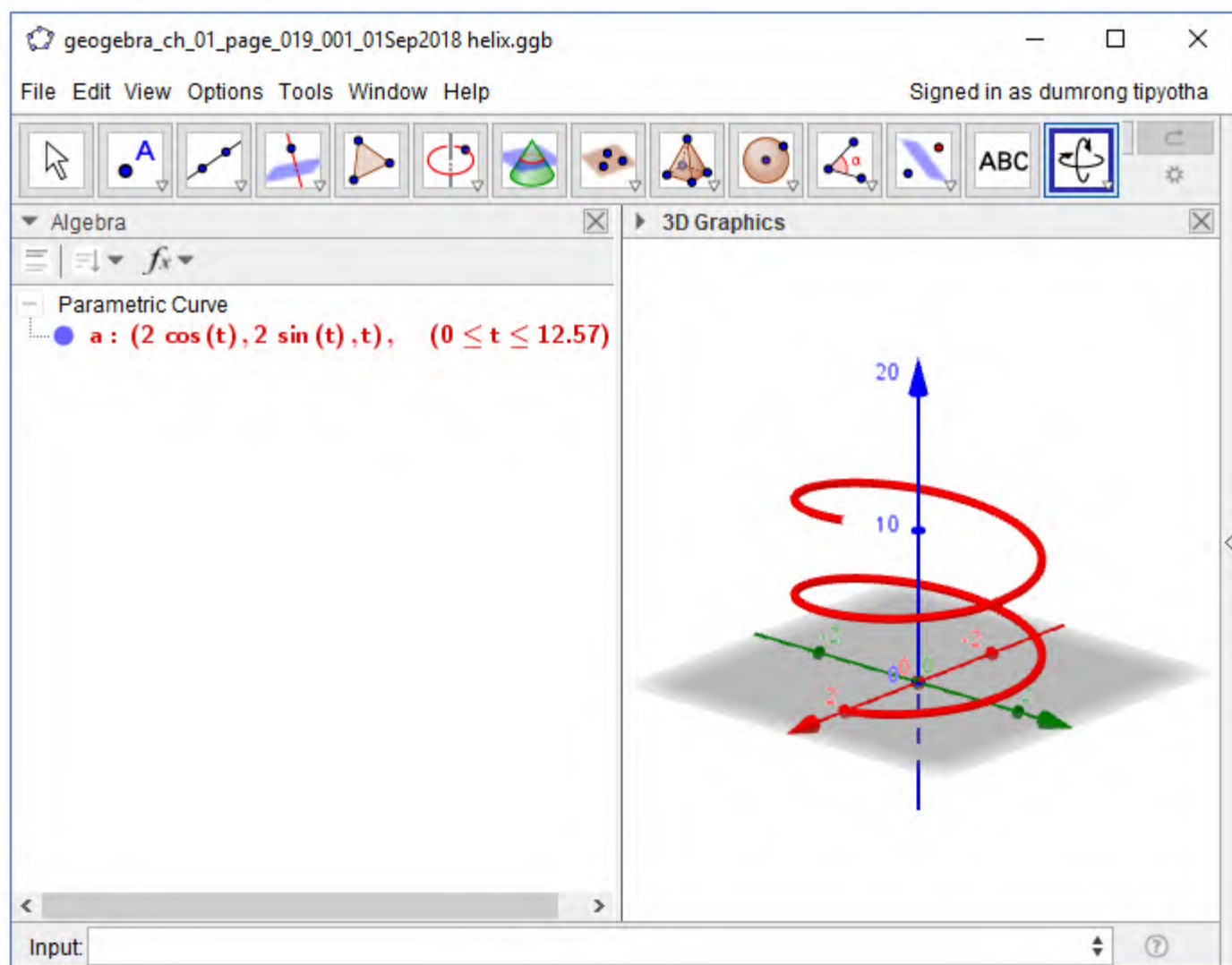


1.8.5 กราฟพื้นผิวใน 3 มิติ เช่น พื้นผิวพาราโบลอยด์ พื้นผิวอานม้า พื้นผิวครึ่งทรงกลม

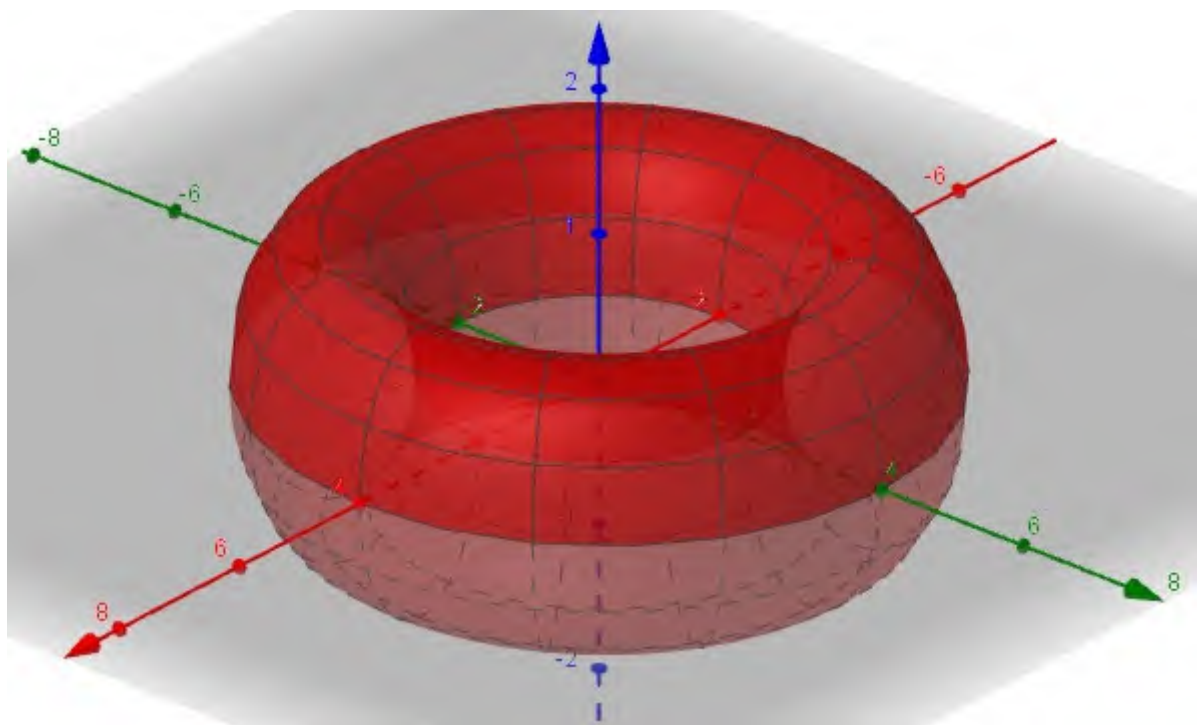
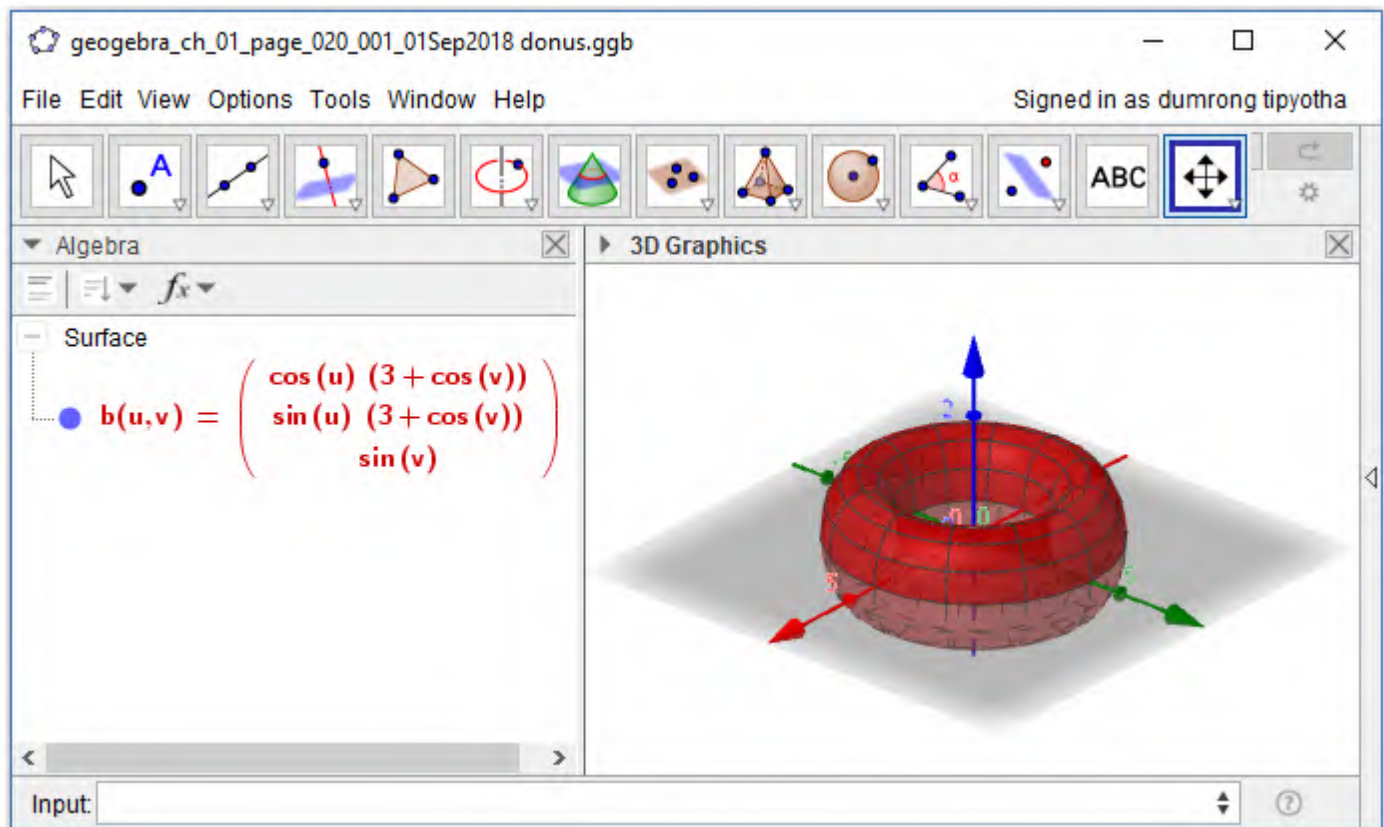




1.8.6 กราฟของสมการพาราเมตริกใน 3 มิติ เช่นการเคลื่อนที่แบบบันไดเวียน สปริง หรือ Helix



1.8.7 กราฟพื้นผิวใน 3 มิติของสมการอิงตัวแปรเสริม



1.9 การคำนวณในรูปแบบเลขฐาน 2, 4, 8, 10 และฐานอื่น ๆ

1 ☐	ToBase(25,2) → 11001₂
2 ☐	ToBase(25,4) → 121₄
3 ☐	ToBase(25,8) → 31₈
4 ☐	ToBase(25,16) → 19₁₆
5 ☐	FromBase("11001",2) → 25
6 ☐	FromBase("121",4) → 25
7 ☐	FromBase("31",8) → 25
8 ☐	FromBase("19",16) → 25
9 ☐	ToBase(25,3) → 221₃
10 ☐	FromBase("221",3) → 25

หมายเหตุ

ToBase(x, b) คือการเปลี่ยนจำนวนเลข x ฐาน 10 เป็นเลขฐาน b

FromBase("x", k) คือการเปลี่ยนจำนวนเลข x ฐาน k เป็นเลขฐาน 10

1.10 การคำนวณในรูปแบบเวกเตอร์

1 ●	$u := \text{Vector}((2,3,6))$ $\rightarrow \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
2 ●	$v := \text{Vector}((2,-3,-1))$ $\rightarrow \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$
3 ○	$u+v$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
4 ○	$u*v$ $\rightarrow -11$
5 ○	$4*v$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$

6 ●	$w := u - 2 \cdot v$ $\rightarrow \mathbf{w} := \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$
7 ○	$\text{UnitVector}(w)$ $\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{149}} \\ \frac{9}{\sqrt{149}} \\ \frac{8}{\sqrt{149}} \end{pmatrix}$

Vector(P, Q) คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น P และ จุดสิ้นสุด Q

8 ●	$A := \text{Vector}((1,2,3),(3,5,9))$ $\rightarrow \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
9 ●	$B := \text{Vector}((1,3,2),(3,0,1))$ $\rightarrow \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$
10 ○	$\text{Cross}(A,B)$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix}$
11 ○	$\text{Dot}(A,B)$ $\rightarrow -11$

1.11 การคำนวณในรูปแบบเมทริกซ์

1 ☐	$A := \{\{1,2\},\{3,5\}\}$ $\rightarrow \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
2 ☐	$B := \{\{2,0\},\{0,4\}\}$ $\rightarrow \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
3 ☐	$A+B$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
4 ☐	$A*B$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}$
5 ☐	$4*A$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$
6 ☐	A^{-1} $\rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
7 ☐	$\text{Transpose}(A)$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
8 ☐	$\text{Determinant}(A)$ $\rightarrow -1$

1.12 การคำนวณจำนวนเชิงซ้อน

1	$a := 3 + 4i$ → $a := 3 + 4i$
2	$b := 5 + 12i$ → $b := 5 + 12i$
3	$a \cdot b$ → $-33 + 56i$
4	$\text{real}(a)$ ○ → 3
5	$\text{imaginary}(a)$ ○ → 4
6	$\text{abs}(a)$ ○ → 5
7	$w := 2 + 2i$ → $w := 2 + 2i$
8	$\text{arg}(w)$ ○ → $\frac{1}{4} \pi$
9	$\text{conjugate}(w)$ → $2 - 2i$

หมายเหตุ กด Alt + i จะได้สัญลักษณ์ i ที่หมายถึง $\sqrt{-1}$

1.13 การหาผลบวกอนุกรม อนุกรมกำลัง และผลคูณของลำดับ

1	Sum(i,i,1,10) → 55
2	Sum(i^2,i,1,10) → 385
3	f(x):=x+x^2 → f(x) := x² + x
4	Sum(f(x),x,1,10) → 440
5	Sum(i,i,1,n) → $\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$
6	Sum(i^2,i,1,n) → $\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$
7	Factor(Sum(i,i,1,n)) → $n \frac{n+1}{2}$
8	Factor(Sum(i^2,i,1,n)) → $n (n+1) \frac{2n+1}{6}$
9	Product({2,4,6,8,10}) → 3840

หมายเหตุ $\text{Sum}(f(i), i, a, b) = \sum_{i=a}^b f(i)$

Factor(x) คือการแยกตัวประกอบ Product(x) คือการหาผลคูณของสมาชิกในเซต

10	$b := \{2, 4, 6, 8, 10\}$ → $b := \{2, 4, 6, 8, 10\}$
11	Product(b) → 3840
12	Product(i, i, 1, 10) → 3628800
13	10! → 3628800
14	20! → 2432902008176640000
15	Factor(20!) → $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
16	Sum({2, 3, 5, 7, 12}) → 29
17	$c := \{2, 3, 5, 7, 12\}$ → $c := \{2, 3, 5, 7, 12\}$
18	Sum(c) → 29
19	Sum(c^2) → 231

หมายเหตุ Factor(x) คือแยกตัวประกอบ x เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

Factor(x) คือการแยกตัวประกอบ Product(x) คือการหาผลคูณของสมาชิกในเซต

Sum(c) คือผลบวกของสมาชิกในตัวแปร List c

1.14 การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น

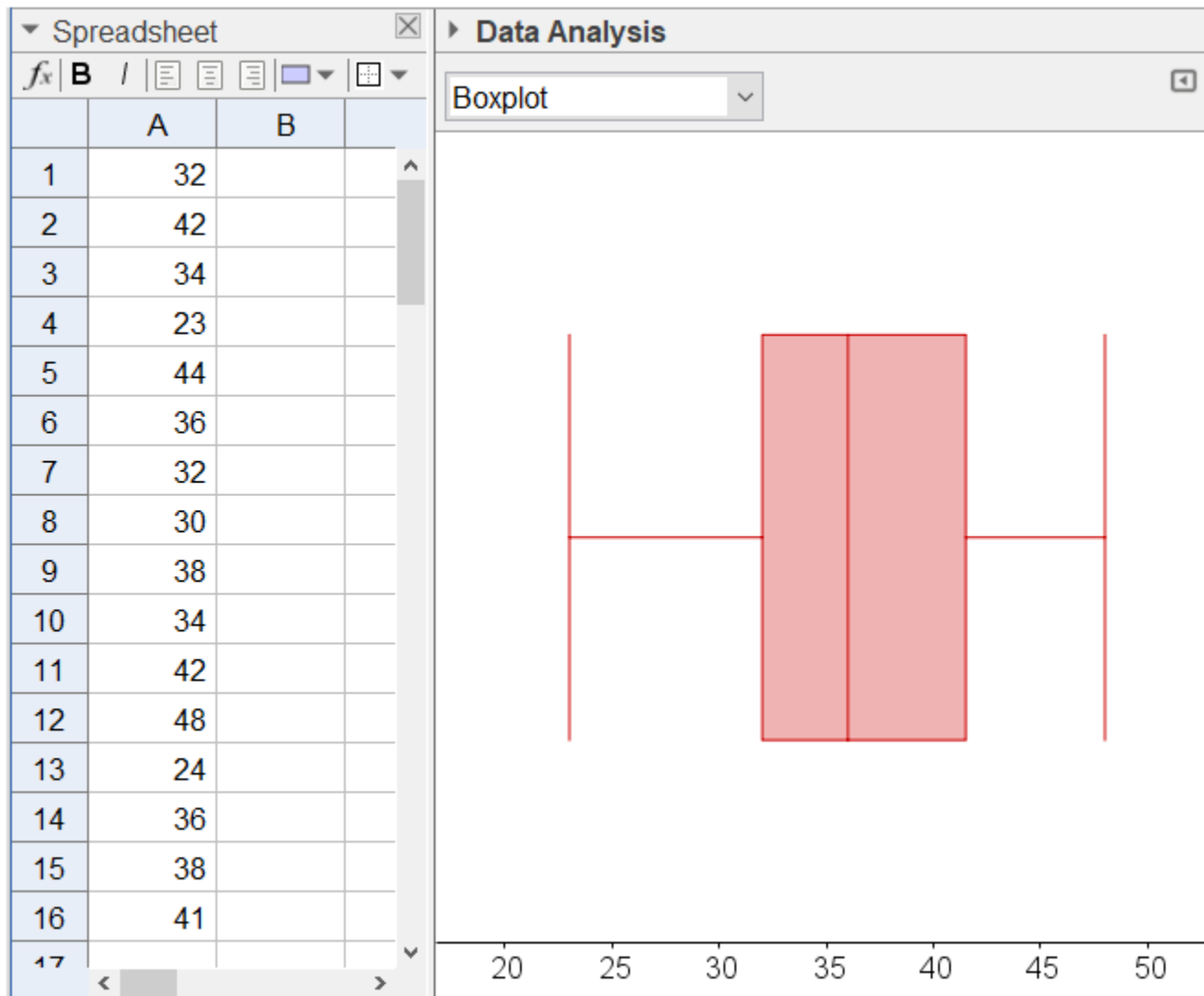
1	$a := \{1, 2, 3, 6\}$ → $a := \{1, 2, 3, 6\}$
2	$\text{Sum}(a)$ → 12
3	$\text{Sum}(a^2)$ → 50
4	$\text{Mean}(a)$ → 3
5	$\text{Variance}(a)$ → $\frac{7}{2}$
6	$\text{Sum}(a^2)$ → 50
7	$\text{Sum}((a - \text{Mean}(a))^2)/4$ → $\frac{7}{2}$
8	$\text{Variance}(\{0, 1, 2, 3\}, \{1, 3, 3, 1\})$ → 0.75

หมายเหตุ $\text{Variance}(x)$ และ $\text{stdevp}(x)$ คือความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ประชากร)
 $\text{stdev}(x)$ คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ตัวอย่าง)

1	$\text{stdev}(\{1, 2, 3, 6\})$ → ≈ 2.16
2	$\text{stdevp}(\{1, 2, 3, 6\})$ → ≈ 1.87

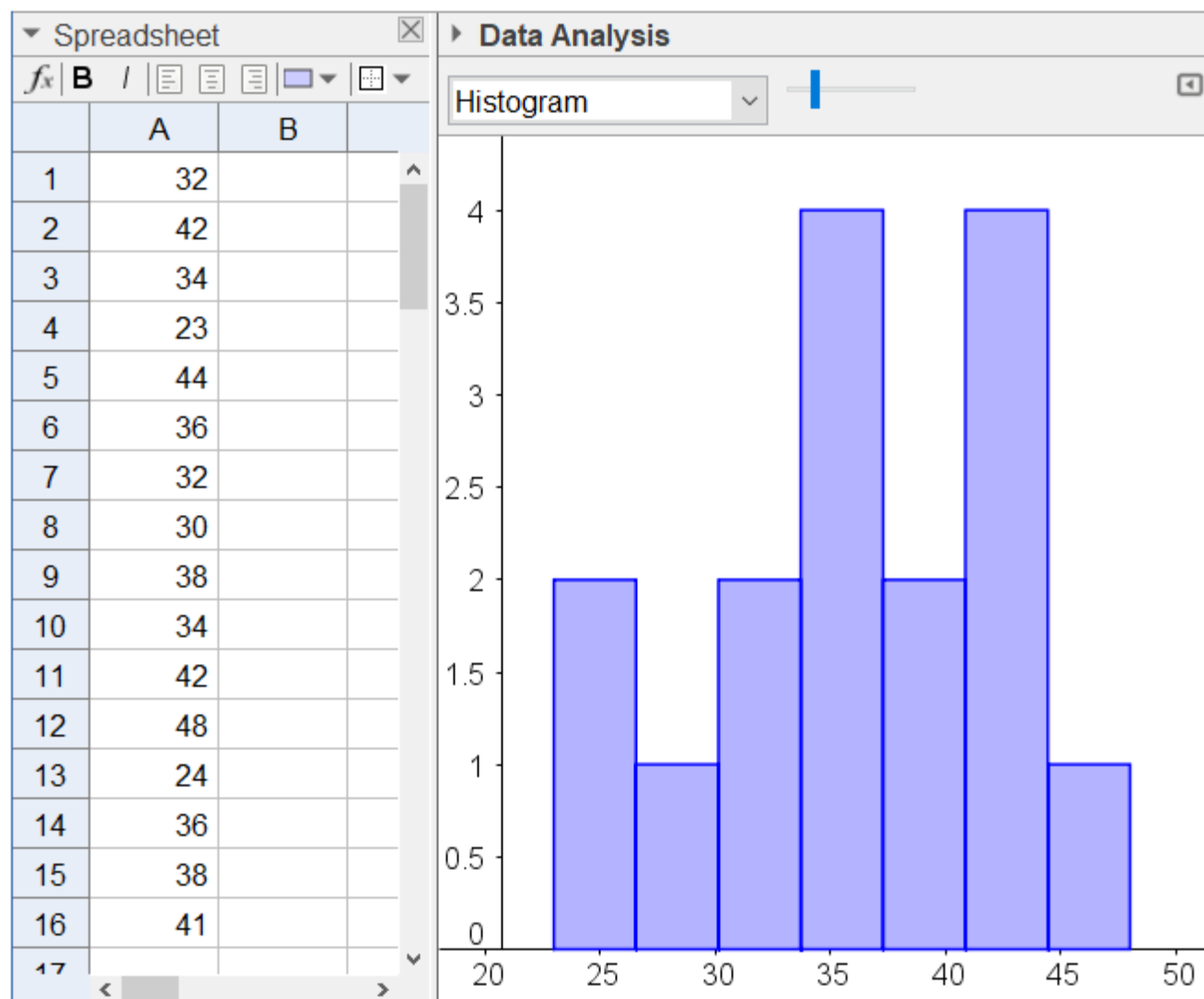
1.15 กราฟ Box plot Histogram Stem and leaf Pie chart และการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลในรูปแบบ $y = a + bx$

1.15.1 การเขียนกราฟแบบ Boxplot

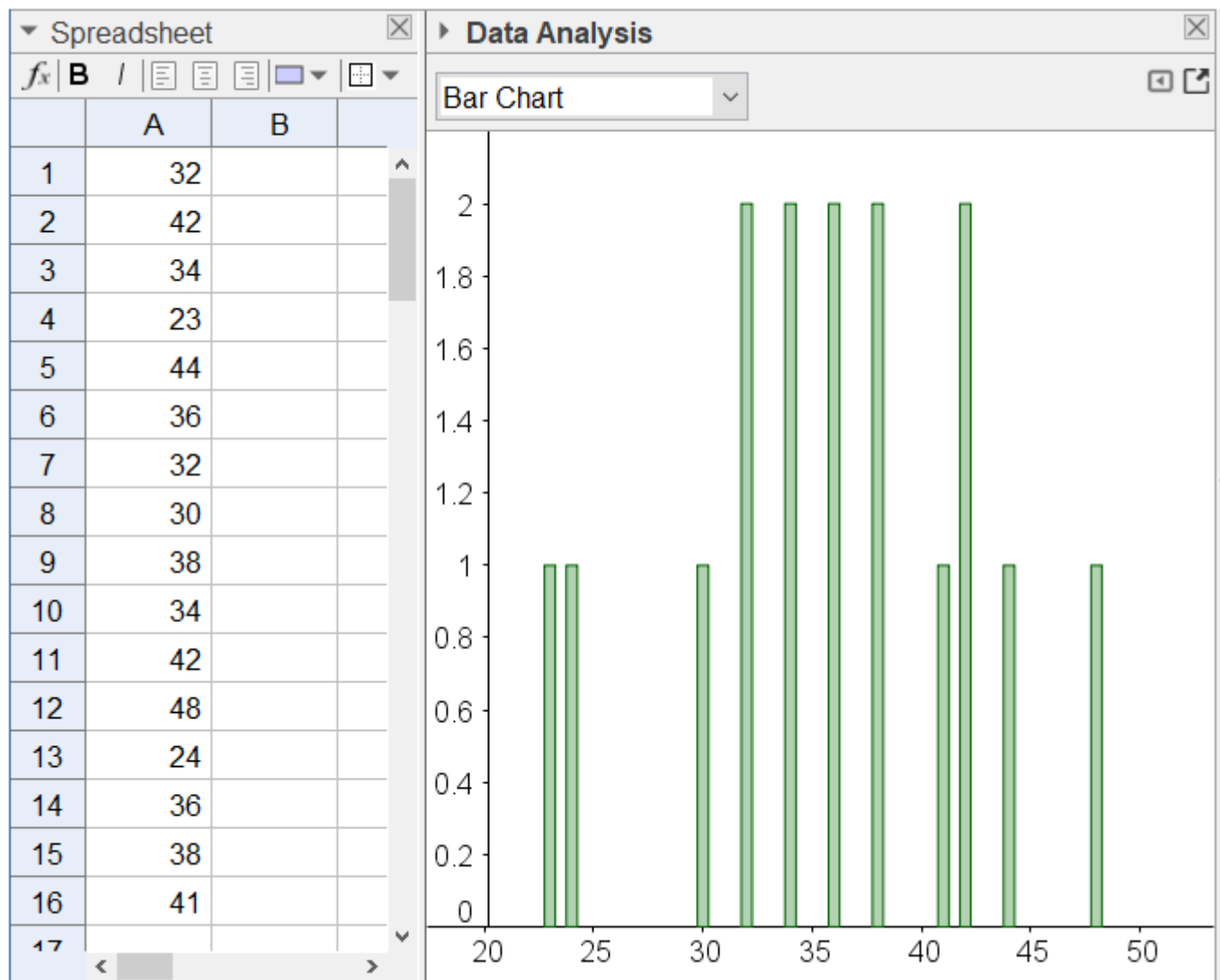


หมายเหตุ ภาพจาก GeoGebra Classic 5 บน Window Spreadsheet

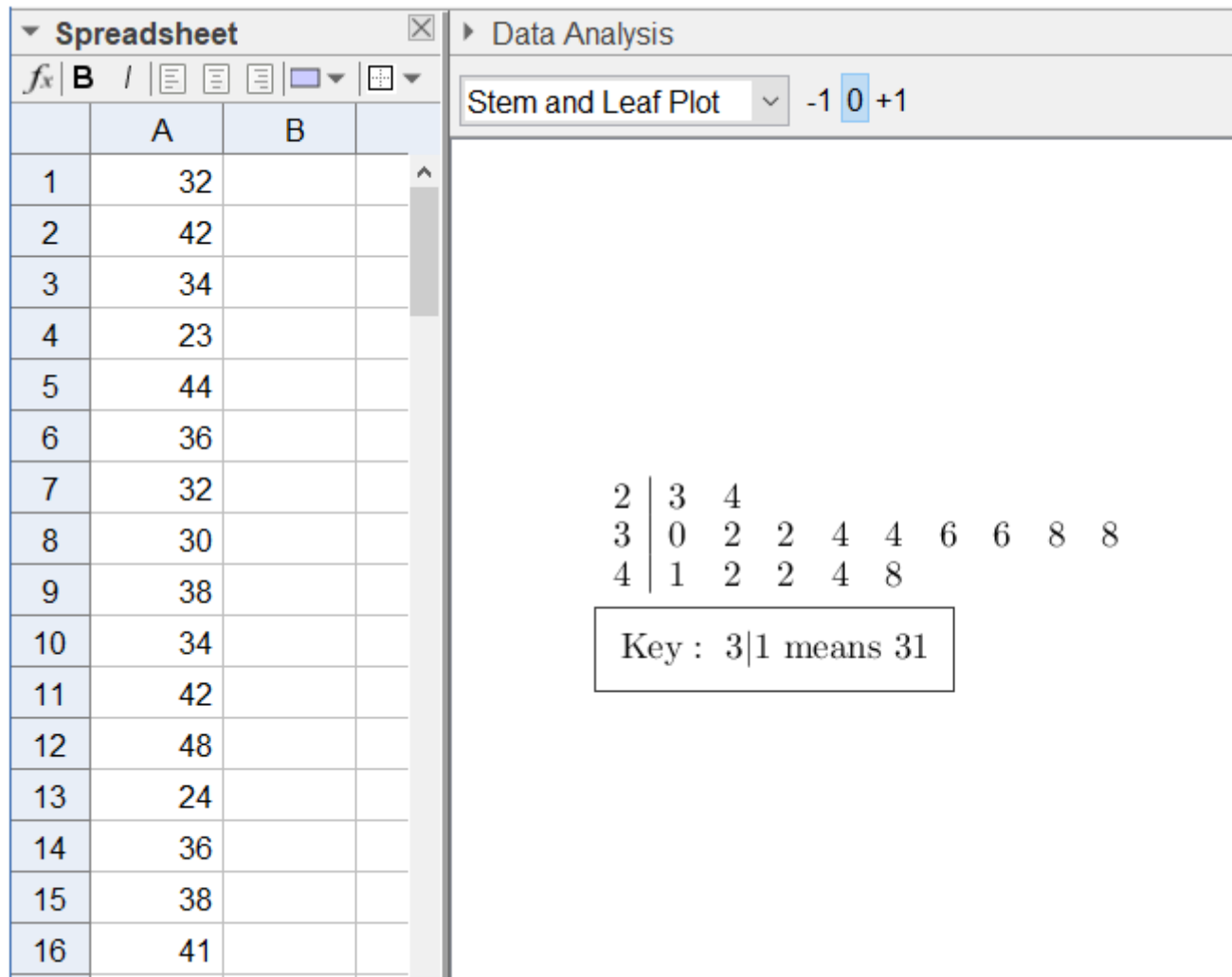
1.15.2 การเขียนกราฟแบบ Histogram



1.15.3 การเขียนกราฟแบบ Bar Chart



1.15.4 การเขียนกราฟแบบ Stem and Leaf Plot

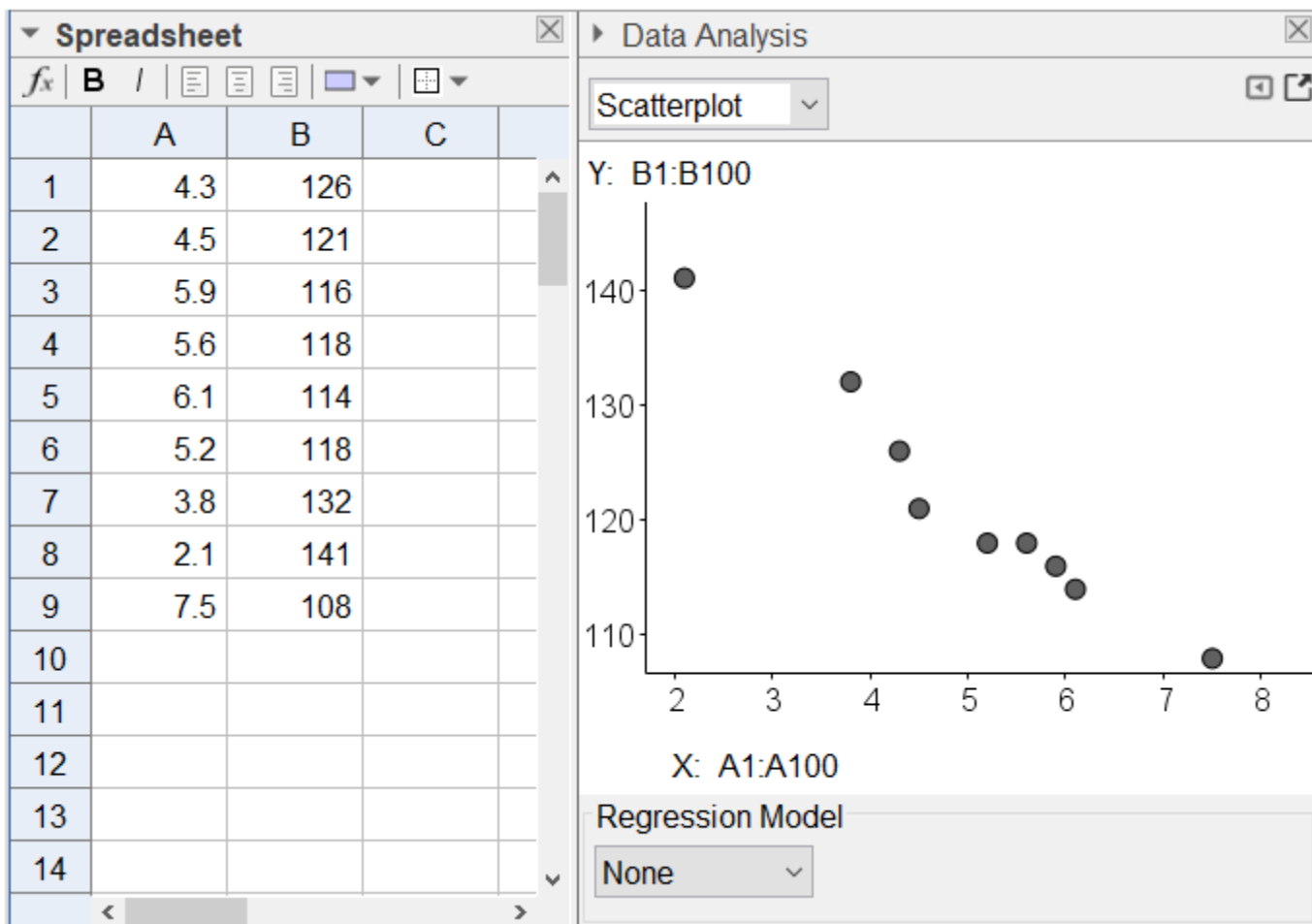


1.15.5 แผนภาพการกระจายของข้อมูลและสมการเส้นถดถอยเชิงเส้นตรง

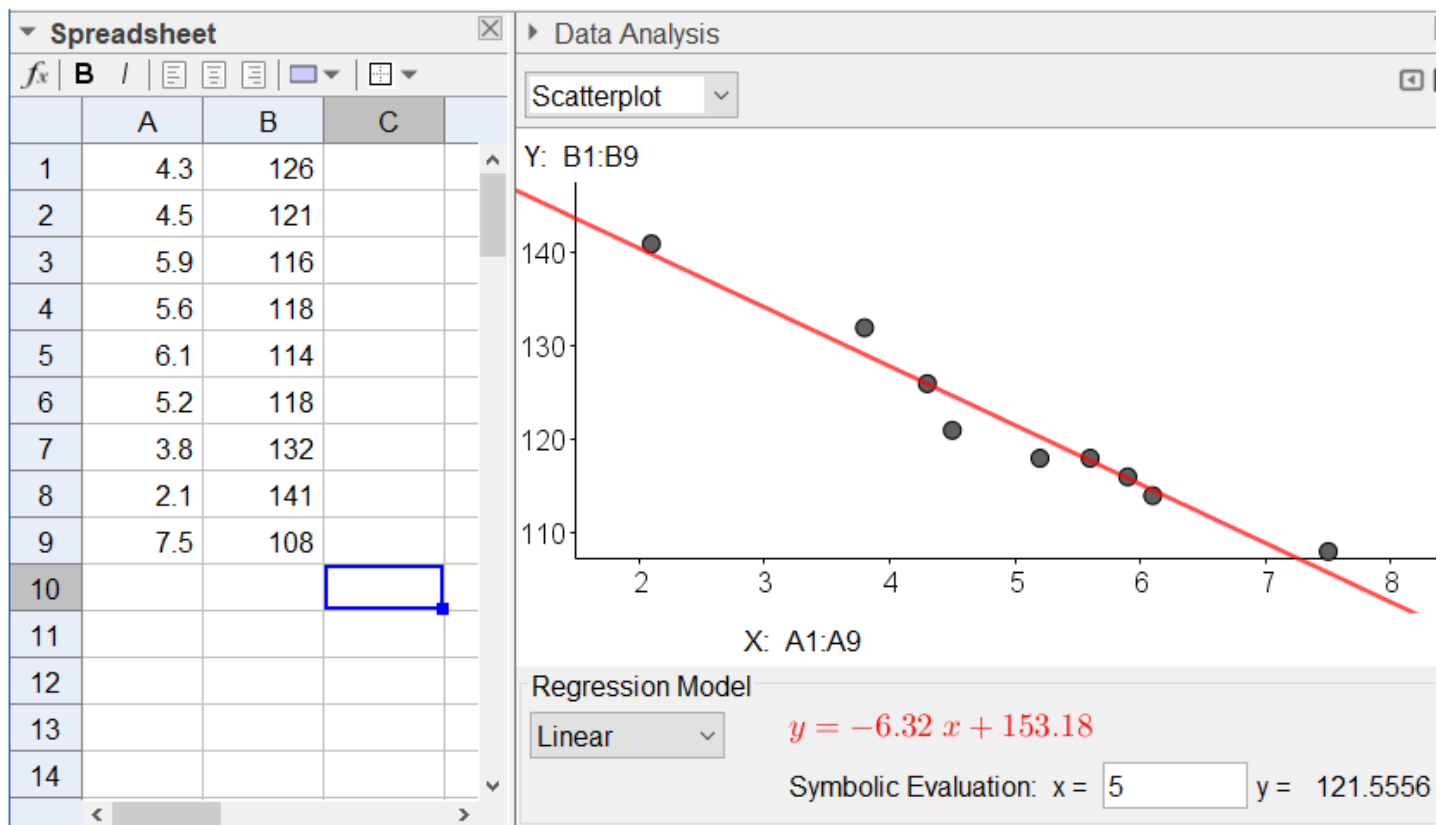
จากข้อมูล

x	y
4.3	126
4.5	121
5.9	116
5.6	118
6.1	114
5.2	118
3.8	132
2.1	141
7.5	108

สร้างข้อมูลใน Window Spreadsheet และวิเคราะห์ข้อมูลใน Window Data Analysis



1.15.6 การหาสมการเส้นถดถอยเชิงเส้นตรง



ผลการวิเคราะห์ข้อมูล $\hat{y} = -6.32x + 153.18$

ค่าพยากรณ์เมื่อ $x = 5$ คือ $y = 121.5556$

1.16 สามารถจัดรูปพีชคณิต แยกตัวประกอบ และกระจายพหุนาม

1	Expand((x+y)^4) → $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
2	Factor(x^2-4*x+3) → $(x - 3)(x - 1)$
3	Factors(x^2-4*x+3) → $\begin{pmatrix} x - 3 & 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix}$
4	Expand((x-3)*(x-2)^2*x^3) → $x^6 - 7x^5 + 16x^4 - 12x^3$
5	Factor(x^6-7*x^5+16*x^4-12*x^3) → $x^3(x - 3)(x - 2)^2$
6	Factors(x^6-7*x^5+16*x^4-12*x^3) → $\begin{pmatrix} x & 3 \\ x - 3 & 1 \\ x - 2 & 2 \end{pmatrix}$
7	Simplify(x^2+4*x^2+x*(x^2-4)) → $x^3 + 5x^2 - 4x$
8	Simplify((x+2)/(x^2+1)+1/(x+2)) → $\frac{2x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$
9	Factor(((2x^2 + 4x + 5) / (x^3 + 2x^2 + x + 2))) → $\frac{2x^2 + 4x + 5}{(x + 2)(x^2 + 1)}$

Expand กระจายสูตรพหุนาม Factor, Factors แยกตัวประกอบพหุนาม

10	PartialFractions((2x^2 + 4x + 5) / (x^3+2*x^2+x+2)) → $\frac{1}{x+2} + \frac{x+2}{x^2+1}$
11	TrigCombine(1/(1+sin(x))+1/(1-sin(x))) → $\frac{4}{\cos(2x)+1}$
12	TrigExpand(sin(3*x)) → $(4 \cos^2(x) - 1) \sin(x)$
13	TrigExpand(sin(3*x), cos(x),x/2) → $\left(32 \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) - 32 \cos^3\left(\frac{x}{2}\right) + 6 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
14	TrigExpand(cos(3*x), cos(x),x/2) → $32 \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) - 48 \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) + 18 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$
15	TrigExpand(tan(3*x)) → $\frac{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{3 \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 - 1}$
16	TrigExpand(tan(3*x),tan(x)) → $\frac{\tan^3(x) - 3 \tan(x)}{3 \tan^2(x) - 1}$

Simplify จัดรูปพีชคณิตให้เป็นรูปแบบอย่างง่าย

PartialFractions แยกเศษส่วนพหุนามออกเป็นผลบวกย่อย

TrigExpand กระจายสูตรตรีโกณมิติ

TrigCombine รวมพจน์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1.17 สามารถหาอนุพันธ์ อนุพันธ์ย่อย และอนุพันธ์อันดับสูง

1	$f(x) := x^4 + 2x + 4$ → $f(x) := x^4 + 2x + 4$
2	Derivative(f(x)) → $4x^3 + 2$
3	Derivative(f(x), x) → $4x^3 + 2$
4	Derivative(f(x), x, 2) → $12x^2$
5	Derivative(f(x), x, 3) → $24x$
6	$g(x,y) := y^5x^2 + x^3y^4$ → $g(x,y) := x^2y^5 + x^3y^4$
7	Derivative(g(x, y), x) → $2xy^5 + 3x^2y^4$
8	Derivative(g(x, y), y) → $5x^2y^4 + 4x^3y^3$
9	Derivative(g(x, y), x, 2) → $2y^5 + 6xy^4$
10	Derivative(Derivative(g(x, y), x), y) → $10xy^4 + 12x^2y^3$

หมายเหตุ Derivative(f(x)) คือ $\frac{d}{dx}f(x)$ และ Derivative(g(x, y), x) คือ $\frac{\partial g}{\partial x}$

11	Derivative(Derivative(g(x, y), x, 2), y, 1) → $10 y^4 + 24 x y^3$
12	Derivative(Derivative(exp(x)*x*y^2, x), y) → $2 y e^x + 2 x y e^x$
13	Derivative(Derivative(exp(x)*x*y^2, x, 2), y, 1) → $4 y e^x + 2 x y e^x$
14	Derivative(Derivative(exp(x)*x*y^2, x, 1), y, 2) → $2 x e^x + 2 e^x$
15	Derivative(Derivative(sqrt(x^2+y^2), x, 1), y, 1) → $-x \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$
16	Simplify(Derivative(Derivative(sqrt(x^2+y^2), x, 1), y, 1)) → $-x \frac{\frac{y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
17	Factor(Derivative(Derivative(sqrt(x^2+y^2), x, 1), y, 1)) → $-\sqrt{x^2 + y^2} y \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}$
18	Expand(Derivative(Derivative(sqrt(x^2+y^2), x, 1), y, 1)) → $-x y \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + 2 x^2 y^2 + y^4}$

หมายเหตุ Derivative(f(x), x) คือ $\frac{d}{dx}f(x)$ และ Derivative(f(x), x, n) คือ $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$

Derivative(g(x, y), x, 2) คือ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ และ Derivative(Derivative(g(x, y), x), y) คือ $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$

1.18 สามารถหาอินทิกรัลจำกัดเขต และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

1 ☐	Integral(x^3+1) $\rightarrow \frac{1}{4} x^4 + x + c_1$
2 ☐	Integral(x^3+1, x) $\rightarrow \frac{1}{4} x^4 + x + c_2$
3 ☐	Integral($x^3+1, x, 0, 2$) $\rightarrow 6$
4 ☐	Integral(Integral(x^3*y, x), y) $\rightarrow \frac{1}{8} x^4 y^2 + c_3 y + c_4$
5 ☐	Integral(Integral($x^3*y, x, 0, 2$), $y, 0, 1$) $\rightarrow 2$
6 ☒	$f(x) := \exp(x) * x^2$ $\rightarrow \mathbf{f(x) := x^2 e^x}$
7 ☐	Integral($f(x), x$) $\rightarrow (x^2 - 2 x + 2) e^x + c_5$
8	Integral($f(x), x, a, b$) $\rightarrow 2 a e^a - 2 b e^b - a^2 e^a + b^2 e^b - 2 e^a + 2 e^b$
9	Simplify(Integral($f(x), x, a, b$)) $\rightarrow -(a^2 - 2 a + 2) e^a + (b^2 - 2 b + 2) e^b$
10 ☐	Integral($f(x), x, 0, 2$) $\rightarrow 2 e^2 - 2$

หมายเหตุ $\text{Integral}(f(x)) = \int f(x) dx$

11	$\text{Integral}(6*x^2+2*x+5,x,1+t,1-t)$ $\rightarrow -4 t^3 - 26 t$
12 ☐	$\text{Integral}(x, 0, 1)$ $\rightarrow \frac{1}{2}$
13 ☐	$\text{Integral}(x^2, 0, 1)$ $\rightarrow \frac{1}{3}$
14 ☐	$\text{IntegralBetween}(x, x^2, x, 0, 1)$ $\rightarrow \frac{1}{6}$
15 ☐	$\text{IntegralBetween}(\cos(x), \sin(x), x, 0, \pi/4)$ $\rightarrow \sqrt{2} - 1$
16 ☐	$\text{Integral}(\cos(x), x, 0, \pi/4)$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
17 ☐	$\text{Integral}(\sin(x), x, 0, \pi/4)$ $\rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

หมายเหตุ $\text{Integral}(f(x), x, a, b) = \int_a^b f(x) dx$

$\text{IntegralBetween}(f(x), g(x), x, a, b) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

1.19 สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

1	Limit(x^2+x+1, 1)
☐	→ 3
2	Limit(x^2+x+1,x,1)
☐	→ 3
3	Limit(x^2+x+y+1, x, 1)
☐	→ y + 3
4	Limit(x^2+x+y+1, x, 2*k)
	→ 4 k^2 + 2 k + y + 1
5	f(x):=x^2+x+1
☒	→ f(x) := x^2 + x + 1
6	Limit(f(x),x,1)
☐	→ 3
7	Limit(f(x),x,2*k)
	→ 4 k^2 + 2 k + 1
8	Limit(sin(x)/x,x,0)
☐	→ 1
9	g(x):=x/abs(x)
☒	→ g(x) := $\frac{x}{ x }$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

หมายเหตุ Limit(f(x), x, a) คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, LimitBelow(f(x), x, a) คือ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

LimitAbove(f(x), x, a) คือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

10	LimitAbove(g(x), x, 0)
☐	→ 1
11	LimitBelow(g(x), x, 0)
☐	→ -1
12	Limit((x^2+x+2)/(3-4*x^2),x, +∞)
☐	→ $-\frac{1}{4}$
13	(3-4*x+4*x^2)/(5*x^2+2*x+4)
☐	→ $\frac{4x^2 - 4x + 3}{5x^2 + 2x + 4}$
14	Limit((3-4*x+4*x^2)/(5*x^2+2*x+4),x,-∞)
☐	→ $\frac{4}{5}$
15	(1+2*x)^(5/x)
☐	→ $\left((2x+1)^{\frac{1}{x}}\right)^5$
16	LimitBelow((1+2*x)^(5/x), x, 0)
☐	→ $(e^2)^5$
17	h(x):=(1+2*x)^(5/x)
☒	→ $h(x) := \left((2x+1)^{\frac{1}{x}}\right)^5$
18	Limit(h(x),x,0)
☐	→ $(e^2)^5$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+2}{3-4x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{5}{x}} = e^{10}$$

1.20 สามารถนำคำสั่งของ GeoGebra มาเขียนเป็นโปรแกรมได้

ตัวอย่างเช่นโปรแกรมหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อรู้ความยาวทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยม

1	$a:=3$ → a := 3
2	$b:=4$ → b := 4
3	$c:=5$ → c := 5
4	$s:=(a+b+c)/2$ → s := 6
5	$\text{AreaOfTriangle}:=\text{sqrt}(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))$ → AreaOfTriangle := 6

การคำนวณในรูปแบบ Function Programming

1	$s(a,b,c):=(a+b+c)/2$ → $s(a,b,c) := \frac{1}{2} (a + b + c)$
2	$A(a,b,c):=\text{sqrt}(s(a,b,c) (s(a,b,c) - a) (s(a,b,c) - b) (s(a,b,c) - c))$ → $A(a,b,c) := \frac{1}{4} \sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2 a^2 b^2 + 2 a^2 c^2 + 2 b^2 c^2}$
3	$A(3,4,5)$ → 6
4	$A(5,12,13)$ → 30
5	$A(9,12,15)$ → 54

1.21 สามารถหารากของสมการ $f(x) = 0$ และผลเฉลยของระบบสมการ

1	Root(x^2-2) → $\{x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}\}$
2	Root($x^2-2,0,2$) → (1.414213562373116, 0)
3	Root($x^2-2,-2,0$) → (-1.414213562373116, 0)
4	NSolve($100*x^3 - 40*x^2 - 137*x - 42=0$) → $\{x = -0.7, x = -0.4, x = 1.5\}$
5	Factors($100*x^3 - 40*x^2 - 137*x - 42$) → $\begin{pmatrix} 2x - 3 & 1 \\ 5x + 2 & 1 \\ 10x + 7 & 1 \end{pmatrix}$
6	NSolve($\cos(x)-x=0$) → $\{x = 0.7390851332152\}$
7	Solve($\{x+y=4,x-y=2\}$) → $\{\{x = 3, y = 1\}\}$
8	Solve($\sin(x)-\cos(x)=0$) → $\left\{x = k_3 \pi + \frac{1}{4} \pi\right\}$
9	Root($\sin(x)-\cos(x)$) → $\left\{x = k_4 \pi + \frac{1}{4} \pi\right\}$
10	Root($\sin(x)-\cos(x),1$) → (0.78539816776263, 0)

11	Solve(x^4-16) → $\{x = -2, x = 2\}$
12	ComplexRoot($x^4-16=0$) → $\{2, 2i, -2, -2i\}$
13	CompleteSquare(x^2-4x+8) → $(x - 2)^2 + 4$
14	CompleteSquare($4y^2+8y$) → $4(y + 1)^2 - 4$
15	ComplexRoot($x^2-4x+8=0$) → $\{2 - 2i, 2 + 2i\}$

1	Solve($\{x+y+z=10, x+y-z=0, x-y+z=4\}, \{x,y,z\}$) → $\{\{x = 2, y = 3, z = 5\}\}$
2	Solve($\{x+y+z=a, x+y-z=b, x-y+z=c\}, \{x,y,z\}$) → $\left\{ \left\{ x = \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c, y = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} c, z = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b \right\} \right\}$

หมายเหตุ

Root($f(x)$) เป็นคำสั่งหารากของสมการ $f(x) = 0$

Solve($f(x)$) เป็นคำสั่งหารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f(x) = 0$

ComplexRoot($f(x)$) เป็นคำสั่งหารากที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนของสมการ $f(x) = 0$

1.22 สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการ

ตัวอย่างเช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $2x + y = 4$, $9x - 4y = 1$

และการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น $x^2 + y^2 = 1$, $x - y = 0$

1	$\text{Solve}(\{2*x+y=4, 9*x-4*y=1\})$ → $\{\{x = 1, y = 2\}\}$
2	$\text{eq1}:=2*x+y=4$ → eq1 : $2x + y = 4$
3	$\text{eq2}:=9*x-4*y=1$ → eq2 : $9x - 4y = 1$
4	$\text{Solve}(\{\text{eq1}, \text{eq2}\}, \{x, y\})$ → $\{\{x = 1, y = 2\}\}$
5	$\text{Solve}(\{x^2+y^2=1, x-y=0\}, \{x, y\})$ → $\left\{ \left\{ x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \left\{ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \right\}$
6	$\text{Solve}(\{2*x+y=\sqrt{5}, 9*x-4*y=\sqrt{7}\}, \{x, y\})$ → $\left\{ \left\{ x = \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{7}}{17}, y = \frac{9\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{17} \right\} \right\}$

หมายเหตุ

$\text{Solve}(\text{equation 1}, \text{equation 2}, \dots)$ เป็นคำสั่งหาผลเฉลยของระบบสมการ

1.23 สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

การหาผลเฉลย $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = x^2$ และ $y(0) = 4$

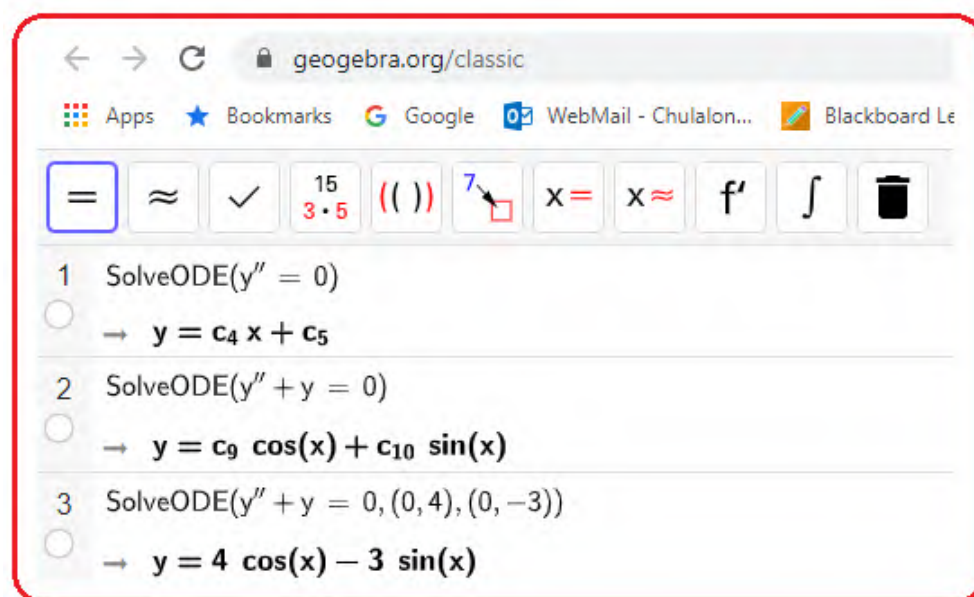
1	SolveODE($y'=x^2$) → $y = c_2 + \frac{1}{3} x^3$
2	SolveODE($y'=x^2, (0,4)$) → $y = \frac{1}{3} x^3 + 4$

การหาผลเฉลย $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์ $y'' + y = 0$ และ $y(0) = 4$ และ $y'(0) = -3$

3	SolveODE($y''+y=0$) → $y = c_1 \cos(x) + c_3 \sin(x)$
4	SolveODE($y''+y=0, (0,4), (0,-3)$) → $y = 4 \cos(x) - 3 \sin(x)$

หมายเหตุ SolveODE(equation 1, เงื่อนไข) เป็นคำสั่งหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

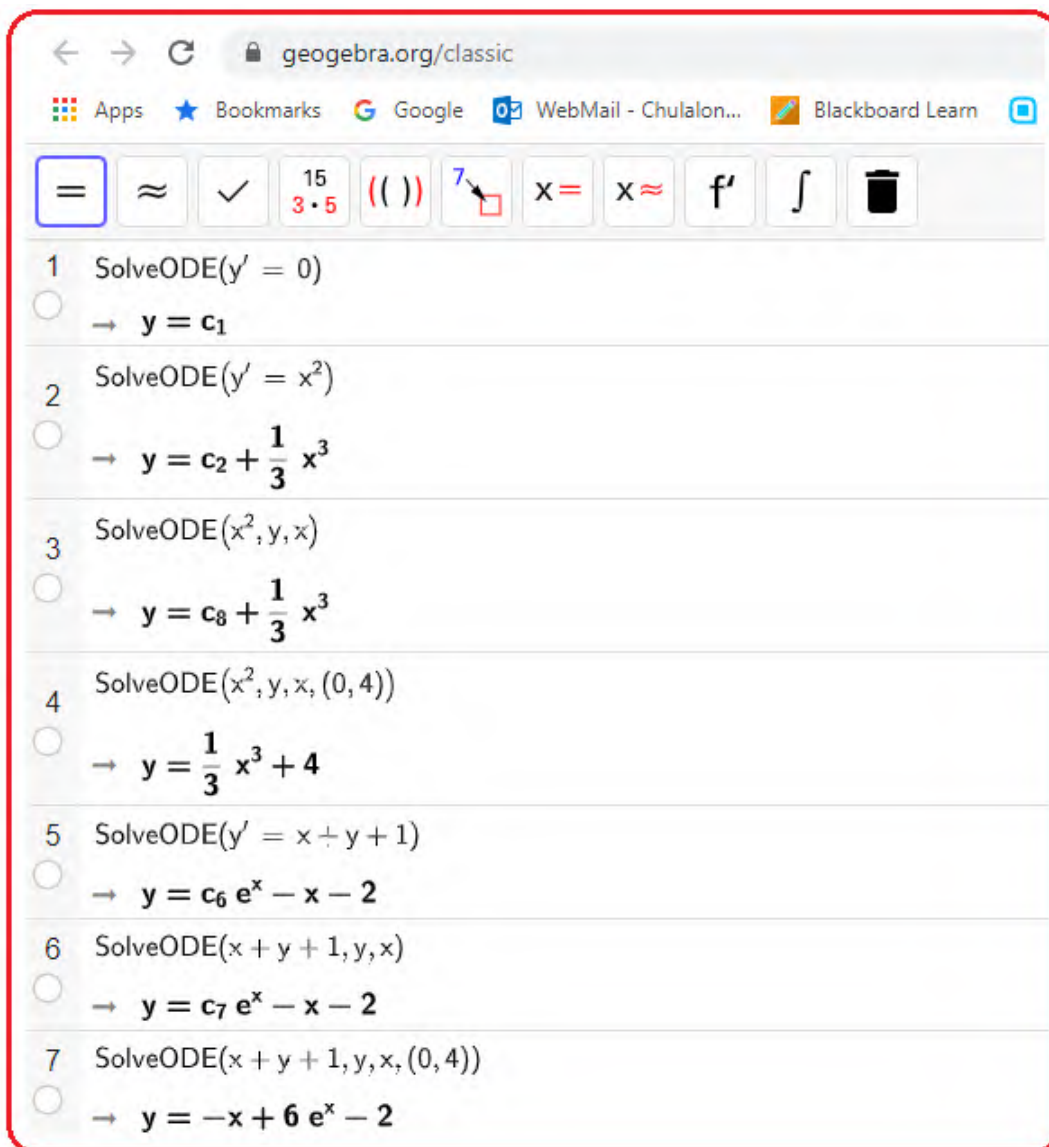
ภาพจากหน้าจอ GeoGebra Classic Online และ GeoGebra Classic 6



การหาผลเฉลย $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ $y'' + y = x^2$, $y'(0) = -1$ และ $y(0) = 2$

1	SolveODE($y''+y=0$) → $y = c_1 \cos(x) + c_3 \sin(x)$
2	SolveODE($y''+y=x^2$) → $y = c_5 \cos(x) + c_6 \sin(x) + x^2 - 2$
3	SolveODE($y''+y=x^2,(0,2),(0,-1)$) → $y = x^2 + 4 \cos(x) - \sin(x) - 2$

ภาพจากหน้าจอ GeoGebra Classic Online และ GeoGebra Classic 6



1.24 มีฟังก์ชันเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เช่น ห.ร.ม. ค.ร.น. และแยกตัวประกอบ

1	10! → 3628800
2	Factors(10!) → $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
3	factor(10!) → $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
4	Mod(23,5) → 3
5	PrimeFactors(10!) → {2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 7}
6	NextPrime(12) → 13
7	PreviousPrime(12) → 11
8	GCD(12,15) → 3
9	LCM(12,15) → 60

หมายเหตุ Factors(n) ตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ n พร้อมจำแนกการซ้ำ

factor(n) ตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ n (ในรูปแบบผลคูณ)

PrimeFactors(n) ตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ n แบบแจกกรณีทุกตัว

PreviousPrime(x), NextPrime(x) จำนวนเฉพาะ ก่อน / หลัง ของ x

Mod(a, n) เศษเหลือจากการหาร a ด้วย n, GCD(a, b) = ห.ร.ม. ของ a, b และ LCM(a, b) = ค.ร.น. ของ a, b

10	IsPrime(12) → false
11	IsPrime(13) → true
12	Factors(24) → $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
13	factor(24) → $2^3 \cdot 3$
14	Division(24, 5) → {4, 4}
15	Divisors(24) → 8
16	DivisorsList(24) → {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
17	DivisorsSum(24) → 60

หมายเหตุ

IsPrime(n) ตรวจสอบว่า n เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

Division(x, y) ผลหารพร้อมเศษเหลือจากการหาร x ด้วย y

Divisors(n) จำนวนตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ n

DivisorsList(n) เซตของจำนวนตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ n

DivisorsSum(n) ผลบวกของจำนวนตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ n

1.25 สามารถหาผลการแปลงลาปลาซ และผลการแปลงลาปลาซผกผันได้

1	Laplace(1,x,s) → $\frac{1}{s}$
2	Laplace(exp(x),x,s) → $\frac{1}{s-1}$
3	Laplace(1+2*x^2+x^4, x, s) → $\frac{s^4 + 4 s^2 + 24}{s^5}$
4	Laplace(sin(x), x, s) → $\frac{1}{s^2 + 1}$
5	Laplace(exp(x)*sin(x), x, s) → $\frac{1}{s^2 - 2 s + 2}$
6 ☐	InverseLaplace(1/s, s, x) → 1
7 ☐	InverseLaplace(1/(s^2+4), s, x) → $\frac{1}{2} \sin (2 x)$
8 ☐	InverseLaplace(1/(s^2-2*s+2), s, x) → sin (x) e^x

$$L(f(x) = 1)(s) = \frac{1}{s}$$

$$L(f(x) = e^x)(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$L^{-1}(F(s) = \frac{1}{s})(x) = 1$$

$$L^{-1}(F(s) = \frac{1}{s^2+4})(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$L^{-1}(F(s) = \frac{1}{s^2-2s+2})(x) = e^x \sin(x)$$

หมายเหตุ $L(f(x))(s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$ และ $L^{-1}(F(s))(x) = f(x)$

1.26 สามารถหาพหุนามเทย์เลอร์ของ $f(x)$ ได้

1	TaylorPolynomial($1/(x+1)$, x , 0, 7)	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$
2	TaylorPolynomial($1/(1-x^2)$, x , 0, 12)	$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$
3	TaylorPolynomial($\exp(x)$, 0, 4)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
4	TaylorPolynomial($\sin(x)$, x , 0, 7)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$
5	TaylorPolynomial($\cos(x)$, x , 0, 6)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$
6	TaylorPolynomial($\ln(x+1)$, x , 0, 5)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \ln(x+1)$
7	TaylorPolynomial($\ln(x)$, x , 1, 3)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n} = \ln(x)$
8	TaylorPolynomial($\tan^{-1}(x)$, x , 0, 9)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$

1.27 สามารถหาอนสเกียนของฟังก์ชัน

1	$f(x) := 1 + 2 \cdot x$ $\rightarrow f(x) := 2x + 1$
2	$g(x) := x^2$ $\rightarrow g(x) := x^2$
3	$W := \{\{f(x), g(x)\}, \{f'(x), g'(x)\}\}$ $\rightarrow W := \begin{pmatrix} 2x + 1 & x^2 \\ 2 & 2x \end{pmatrix}$
4	Determinant(W) $\rightarrow 2x^2 + 2x$
5	$a(x) := \exp(x)$ $\rightarrow a(x) := e^x$
6	$b(x) := \exp(2 \cdot x)$ $\rightarrow b(x) := e^{2x}$
7	$c(x) := \exp(3 \cdot x)$ $\rightarrow c(x) := e^{3x}$
8	$A := \{\{a(x), b(x), c(x)\}, \{a'(x), b'(x), c'(x)\}, \{a''(x), b''(x), c''(x)\}\}$ $\rightarrow A := \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix}$
9	Determinant(A) $\rightarrow 2e^x e^{2x} e^{3x}$
10	Simplify(Determinant(A)) $\rightarrow 2e^{6x}$

1.28 สร้างตารางความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน และการแจกแจงทวินาม

1	Normal(0,1,1) ☐ $\approx$ 0.8413
2	Normal(0,1,2) ☐ $\approx$ 0.9772
3	$P(a,b) := \text{Normal}(0,1,b) - \text{Normal}(0,1,a)$ ☒ $\rightarrow P(a,b) := -\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$
4	$P(1,2)$ ☐ $\approx$ 0.1359
5	$P(1.96, \infty)$ ☐ $\approx$ 0.025
6	$\text{InverseNormal}(0, 1, 0.025)$ ☐ $\approx$ -1.96

หมายเหตุ $P(a,b) \equiv P(a < Z < b)$ และ $\text{Normal}(0, 1, k) = P(-\infty < Z < k)$

$P(1.96 < Z < \infty) = 0.025$, $P(-\infty < Z < -1.96) = 0.025$

CAS		Spreadsheet		
T		f_x	B	/
8	Normal(0, 1, 0) ☐ $\approx$ 0.5		A	B
9	Normal(0, 1, 0.5) ☐ $\approx$ 0.6915	1	z = k	P(Z ≤ k)
10	Normal(0, 1, 1.5) ☐ $\approx$ 0.9332	2	0	0.5
		3	0.5	0.6915
		4	1	0.8413
		5	1.5	0.9332
		6	2	0.9772
		7	2.5	0.9938

หมายเหตุ $P(0 < Z < \infty) = 0.5$, $P(-\infty < Z < 0.5) = 0.6915$, $P(-\infty < Z < 1.5) = 0.9332$

1	BinomialDist(5,0.25,1,false)
☐	$\approx$ 0.3955078125
2	BinomialDist(5,0.25,1,true)
☐	$\approx$ 0.6328125
3	P(x):=BinomialDist(5,0.25,x, false);
4	P(0)
☐	$\approx$ 0.2373046875
5	P(1)
☐	$\approx$ 0.3955078125
6	cP(k):=BinomialDist(5,0.25,k, true);
7	cP(0)
☐	$\approx$ 0.2373046875
8	cP(1)
☒	$\approx$ 0.6328125

หมายเหตุ $\text{Binomial}(n,p,x,\text{false}) \equiv P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$\text{Binomial}(n,p,x,\text{true}) \equiv P(X \leq x)$

CAS		Spreadsheet			
T		f_x B /			
1	BinomialDist(5,0.25,0,true)		A	B	C
☐	$\approx$ 0.2373046875	1	X = x	P(X = x)	P(X <= x)
2	BinomialDist(5,0.25,1,false)	2	0	0.2373046875	0.2373046875
☐	$\approx$ 0.3955078125	3	1	0.3955078125	0.6328125
3	BinomialDist(5,0.25,1,true)	4	2	0.263671875	0.896484375
☐	$\approx$ 0.6328125	5	3	0.087890625	0.984375
		6	4	0.0146484375	0.9990234375
		7	5	0.0009765625	1

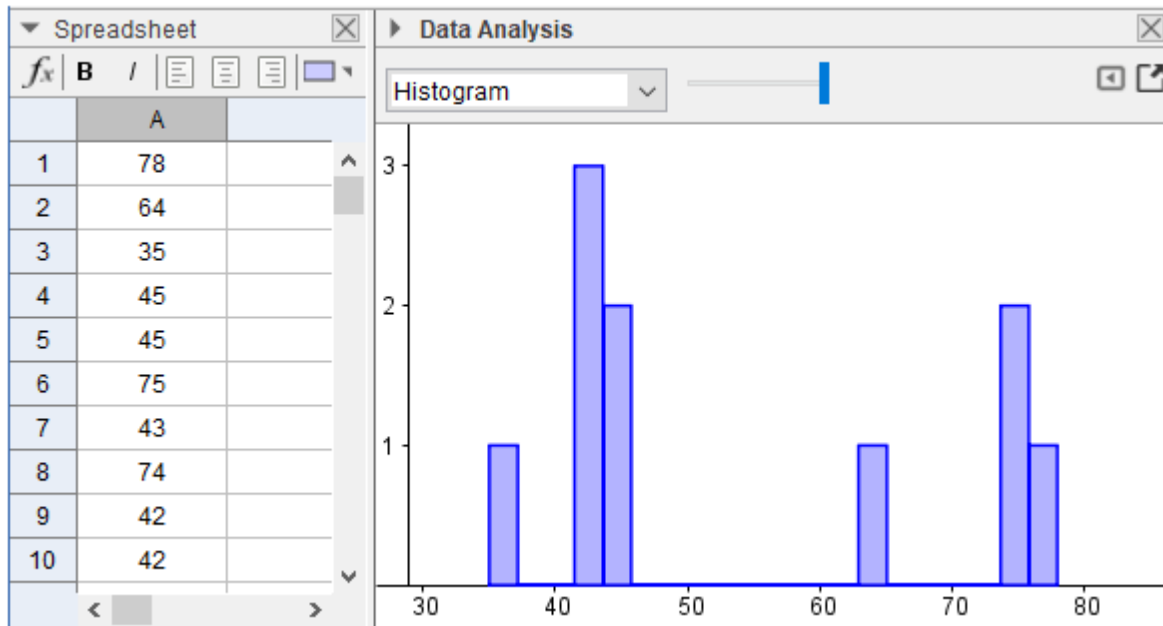
1.29 สามารถทดสอบสมมติฐาน และหาช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของค่าพารามิเตอร์ได้

การหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าเฉลี่ยประชากร

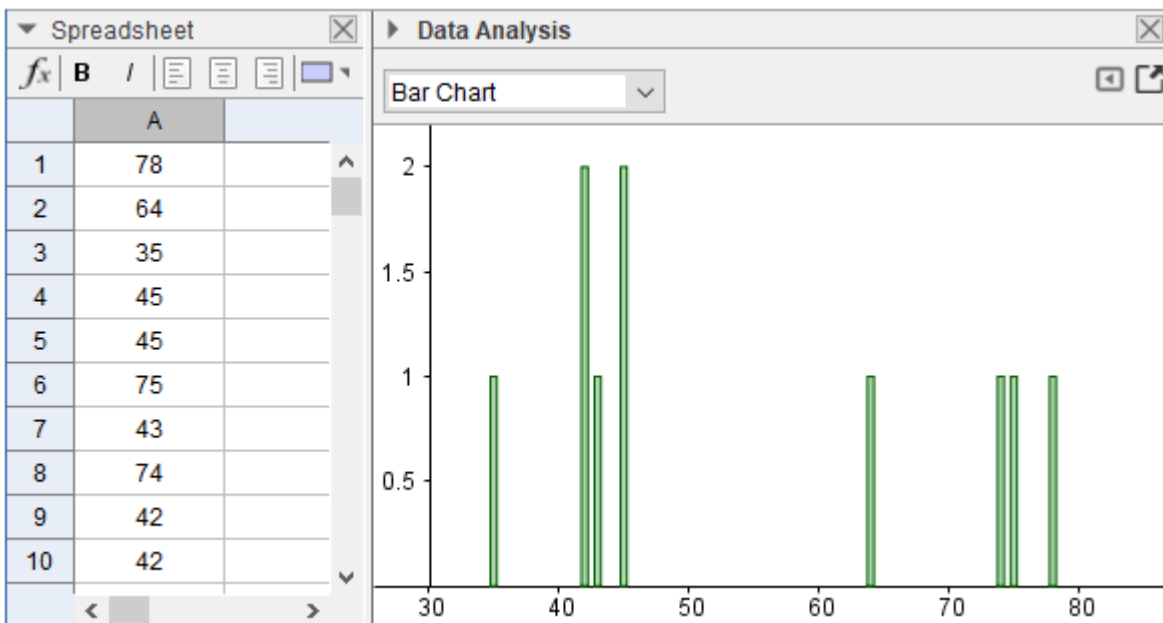
เมื่อสุ่มตัวอย่างได้ข้อมูลดังนี้ 78, 64, 35, 45, 45, 75, 43, 74, 42, 42

การนำเสนอข้อมูลเบื้องต้น

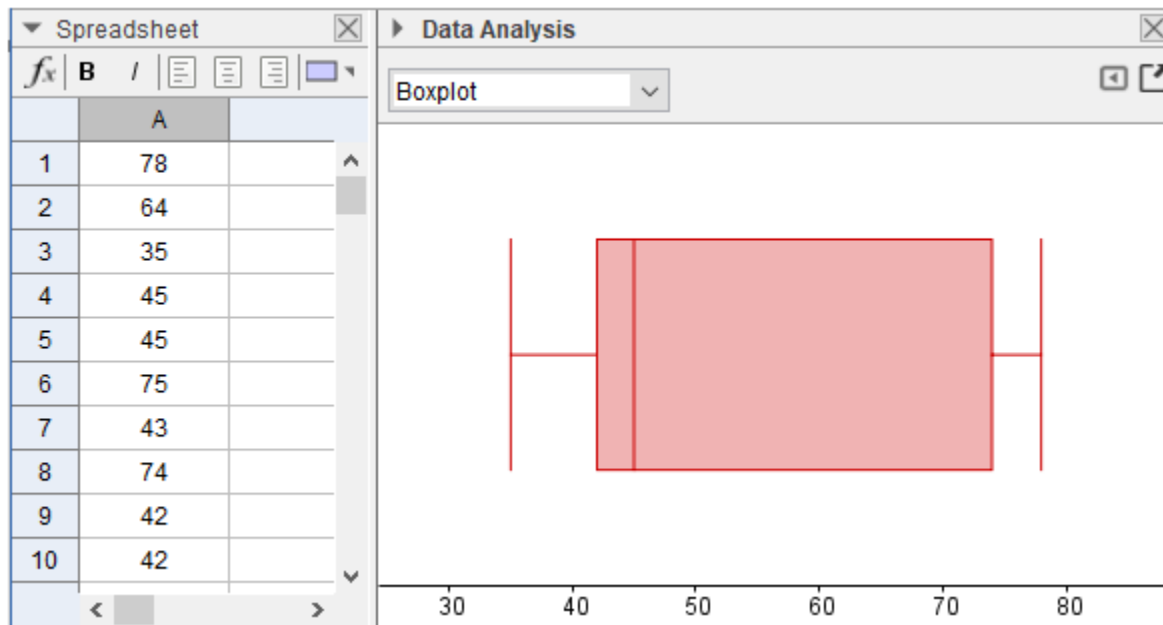
Histogram



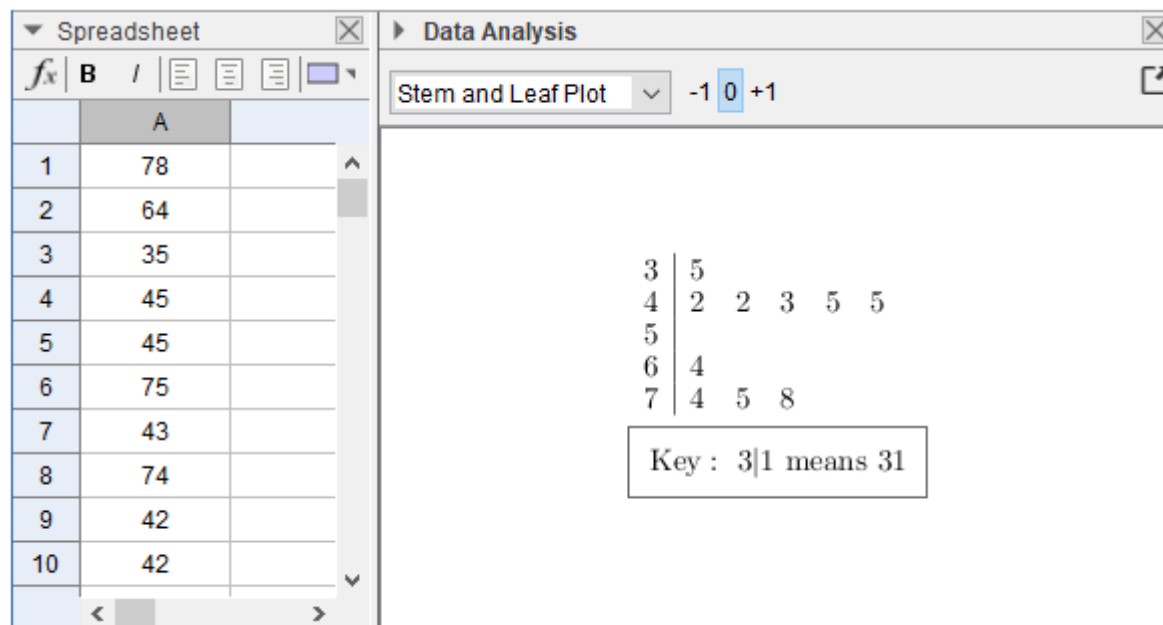
Bar Chart



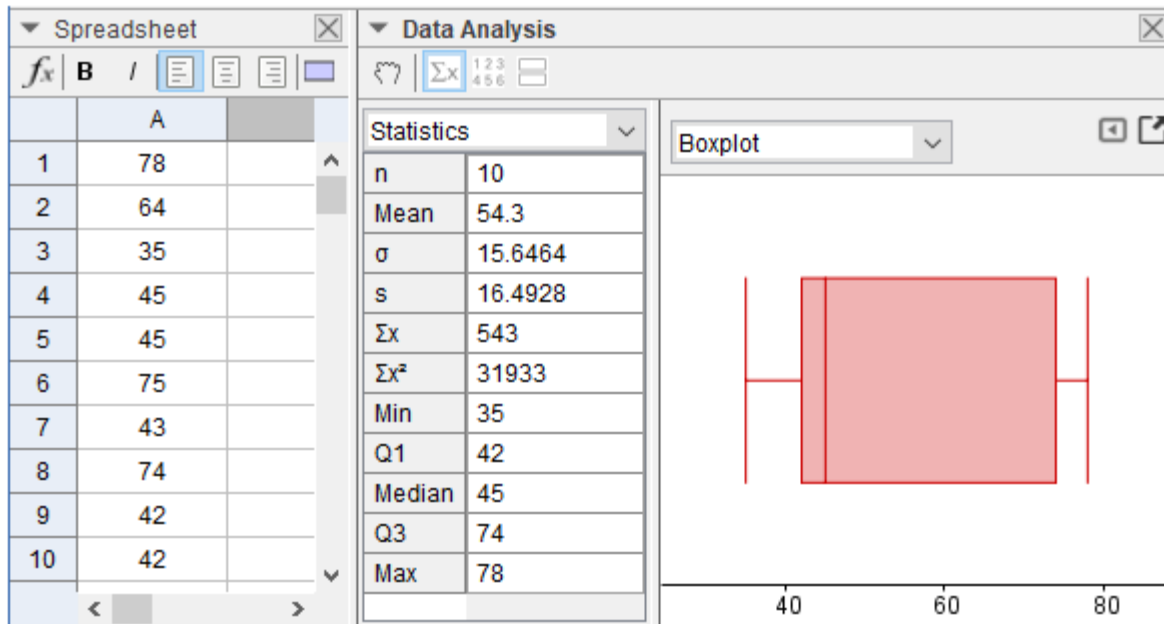
Boxplot



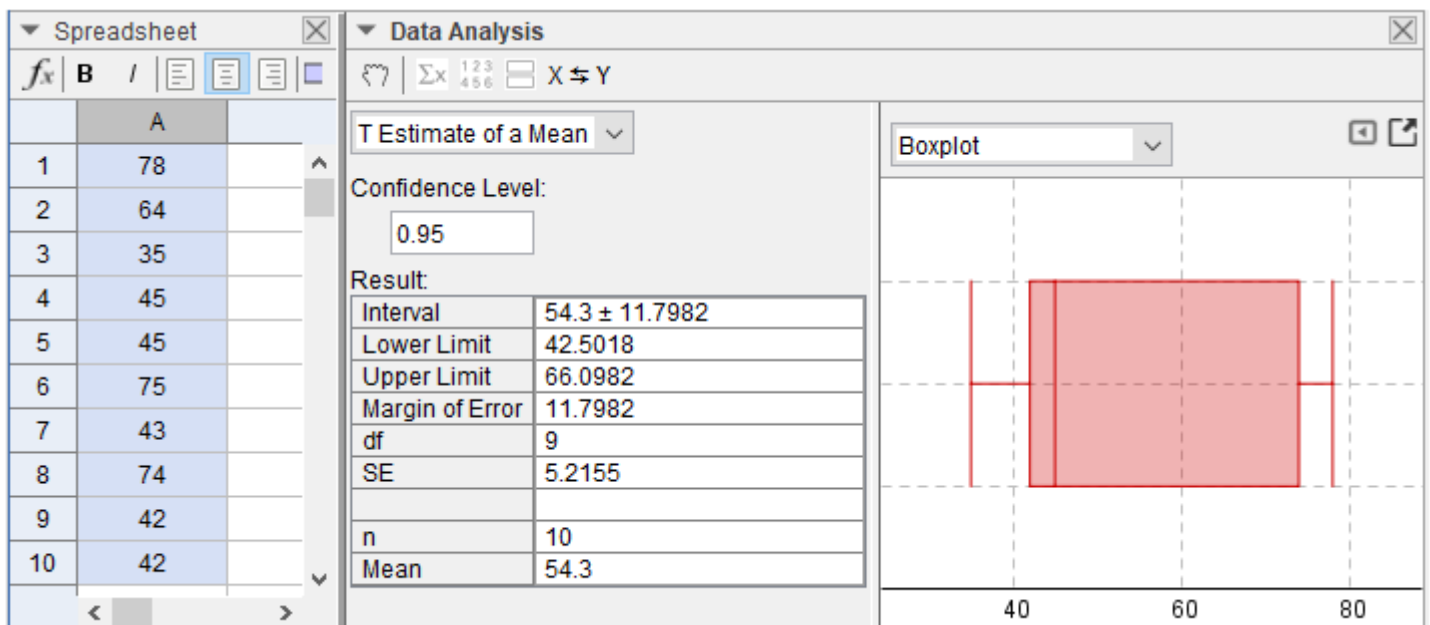
Stem and Leaf Plot



การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น



การหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าเฉลี่ย

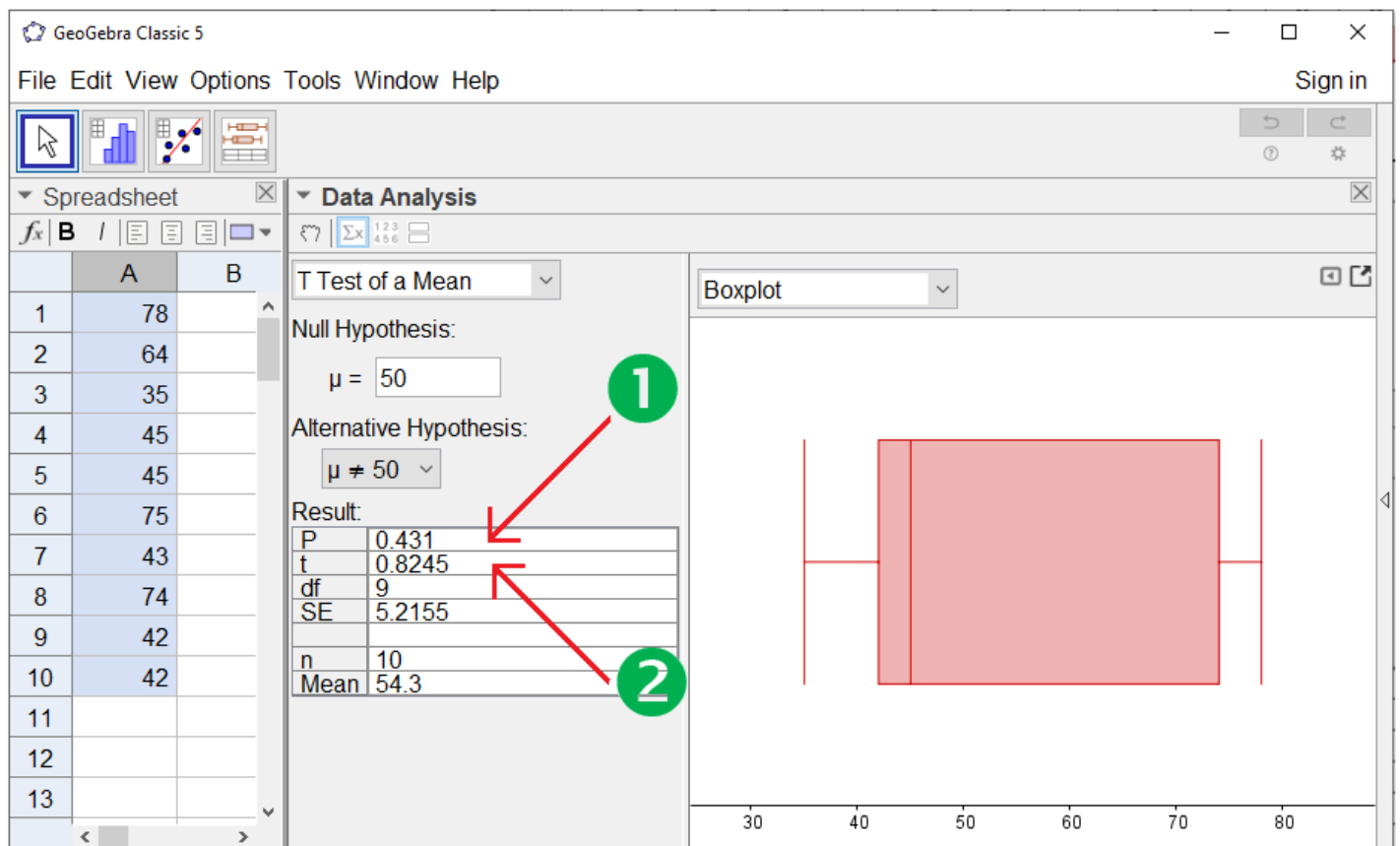


ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจะได้

ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าเฉลี่ยคือ 54.3 ± 11.7982

หรือ ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าเฉลี่ยคือ (42.5018, 66.0982)

การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 50$
 $H_1 : \mu \neq 50$



ผลการคำนวณจะได้ t คำนวณ = 0.8245 และ Sig. (2-tailed) = 0.431

หมายเหตุ ศึกษาการวิเคราะห์ข้อมูลทางด้านสถิติเพิ่มเติมได้จากหนังสือ

การวิเคราะห์ข้อมูลทางด้านสถิติโดยใช้โปรแกรม Geogebra

ดาร์งค์ กิพย์โยธา

Mebmarket.com

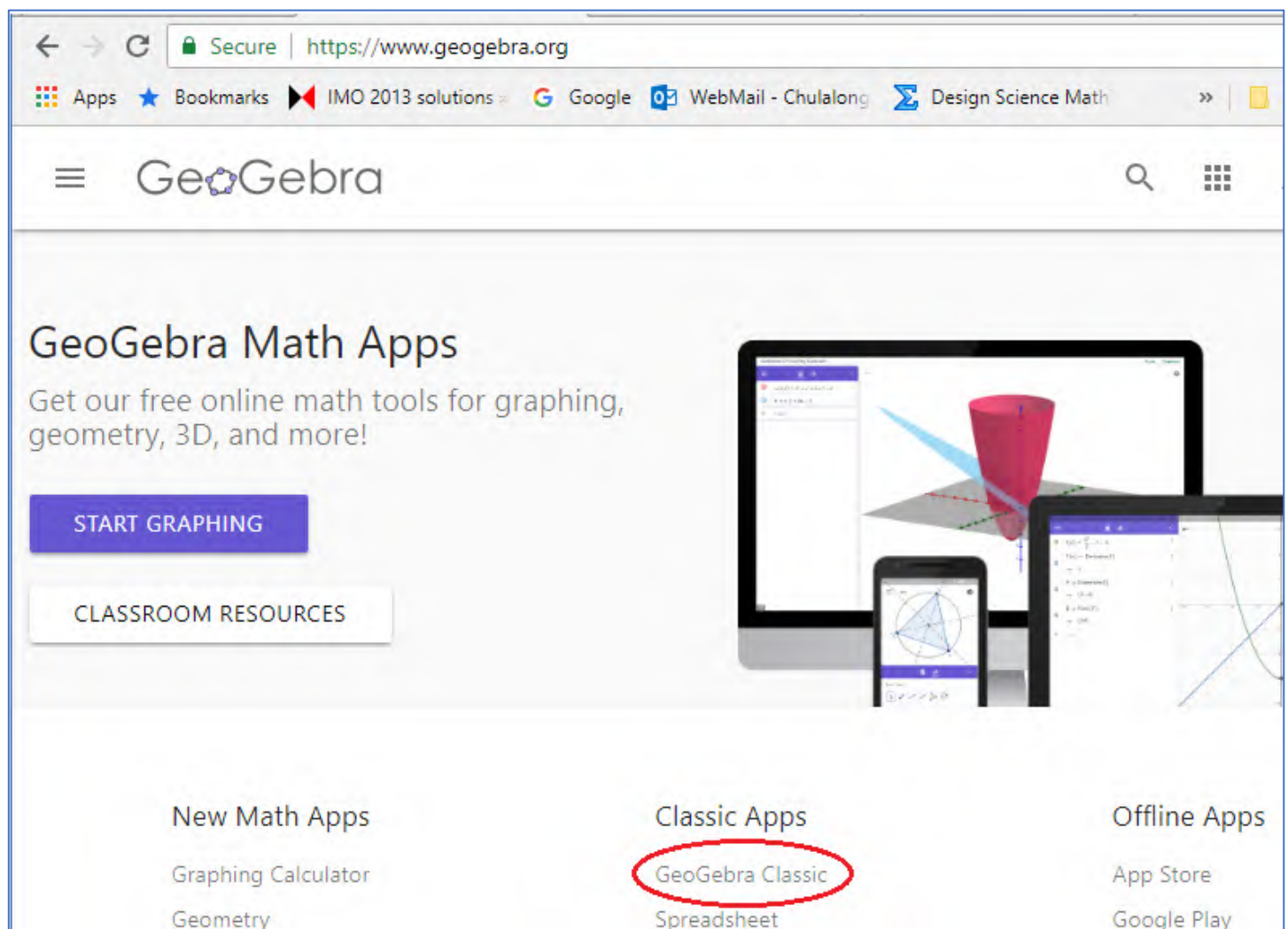
1.30 สามารถหา เกรเดียนท์ เคลร์ และ ไดเวอร์เจนต์ ของฟังก์ชันได้

1	$f(x,y,z):=x^2+y^2+z^2$ → $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$
2	Derivative(f(x,y,z),x) → $2 x$
3	grad:={Derivative(f(x, y,z),x),Derivative(f(x, y,z),y),Derivative(f(x, y,z),z)} → $grad := \{2 x, 2 y, 2 z\}$
4	c:={Derivative(f(x, y,z),x),Derivative(f(x, y,z),y),Derivative(f(x, y,z),z)}
5	$g(x,y,z):=x^2*y^2*z^2$ → $g(x, y, z) := x^2 y^2 z^2$
6	laplacian:=Derivative(g(x, y,z),x,2)+Derivative(g(x, y,z),y,2)+Derivative(g(x, y,z),z,2) → $laplacian := 2 x^2 y^2 + 2 x^2 z^2 + 2 y^2 z^2$
7	$h(x,y,z):=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ → $h(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
8	a:=Derivative(h(x, y,z),x,2)+Derivative(h(x, y,z),y,2)+Derivative(h(x, y,z),z,2) → $a := \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
9	b:=Derivative(h,x,2)+Derivative(h,y,2)+Derivative(h,z,2) → $b := \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

บทที่ 2

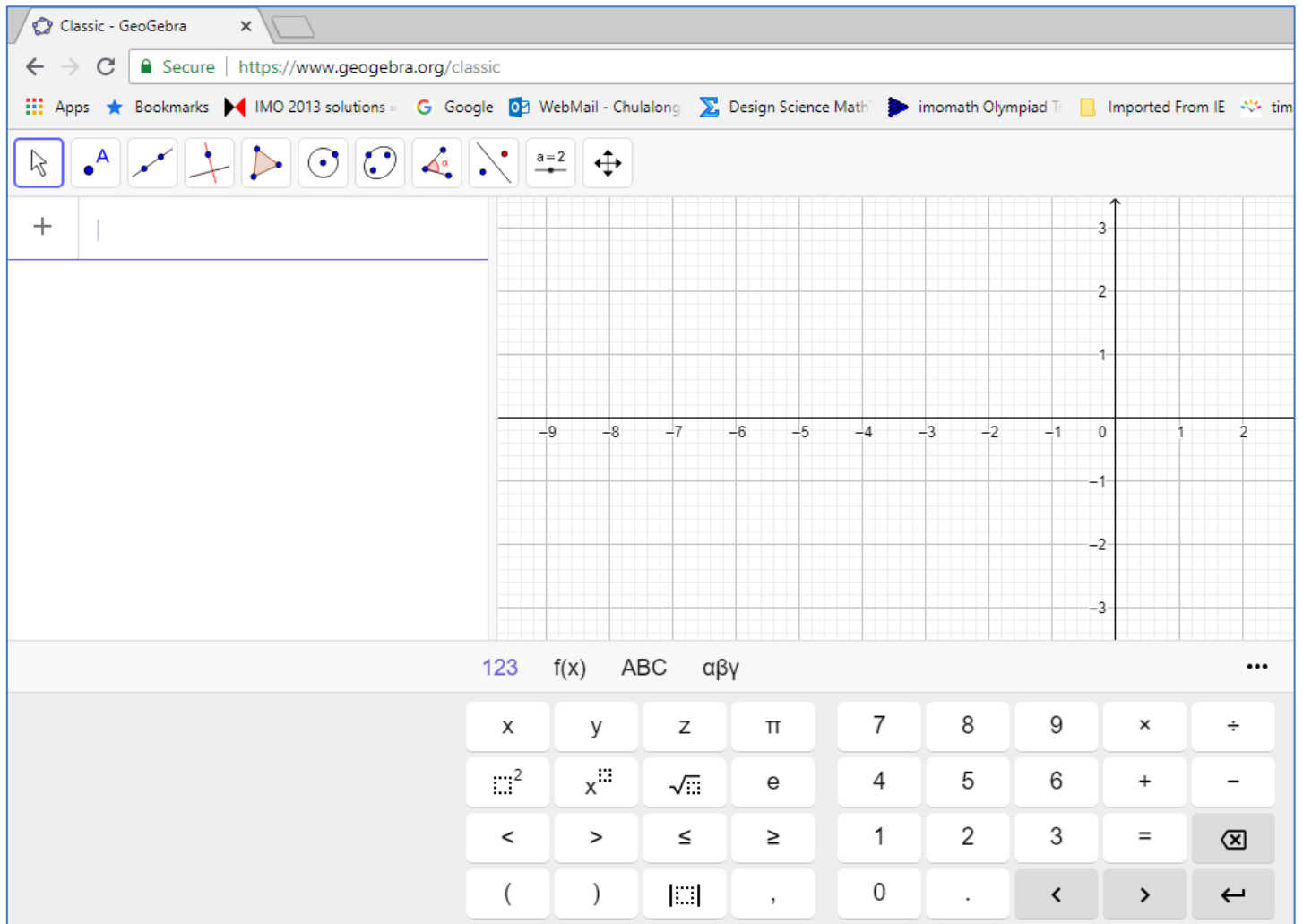
การใช้โปรแกรม GeoGebra

ในบทนี้จะเรียนรู้เกี่ยวกับการนำโปรแกรม GeoGebra เข้ามาทำงานและการคำนวณเบื้องต้นโดยใช้คำสั่งของโปรแกรม GeoGebra การใช้งานโปรแกรม GeoGebra เราสามารถใช้งานได้บนคอมพิวเตอร์ และบน tablet ทั้งระบบ iOS และ Android ใน App Store และ Play Store มี Application ที่เกี่ยวข้องกับ GeoGebra หลาย Application เช่น GeoGebra, Graphing Calculator, Geometry การใช้งานบนคอมพิวเตอร์สามารถใช้โปรแกรม GeoGebra แบบ Online ผ่าน Website <https://www.geogebra.org/classic> หรือ download โปรแกรม GeoGebra มาติดตั้งในเครื่องคอมพิวเตอร์ก็ได้ โปรแกรม GeoGebra สามารถ download ได้ที่ Website <https://www.geogebra.org/>



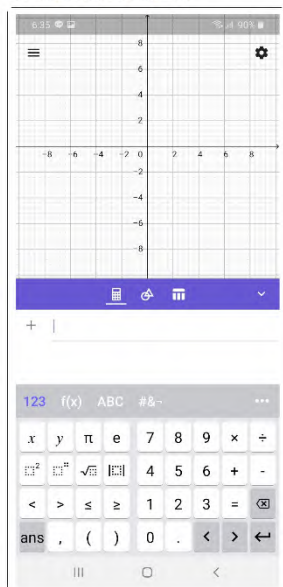
หมายเหตุ การใช้ GeoGebra แบบ Online บน PC ทำได้โดยคลิกที่ GeoGebra Classic

การใช้โปรแกรม GeoGebra แบบ Online (ไม่ต้องติดตั้งโปรแกรมในเครื่อง) ให้คลิกที่ GeoGebra Classic
เมื่อคลิกที่ GeoGebra Classic ผลบนจอภาพจะเป็นดังนี้

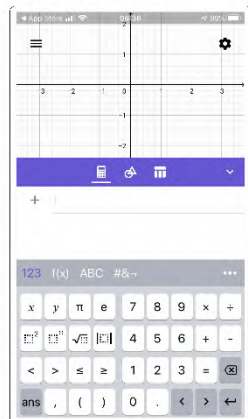


ตัวอย่างภาพหน้าจอ GeoGebra บนจอโทรศัพท์ระบบ Android และ iOS

GeoGebra (Android) samsung



GeoGebra (iOS) iphone 6s+

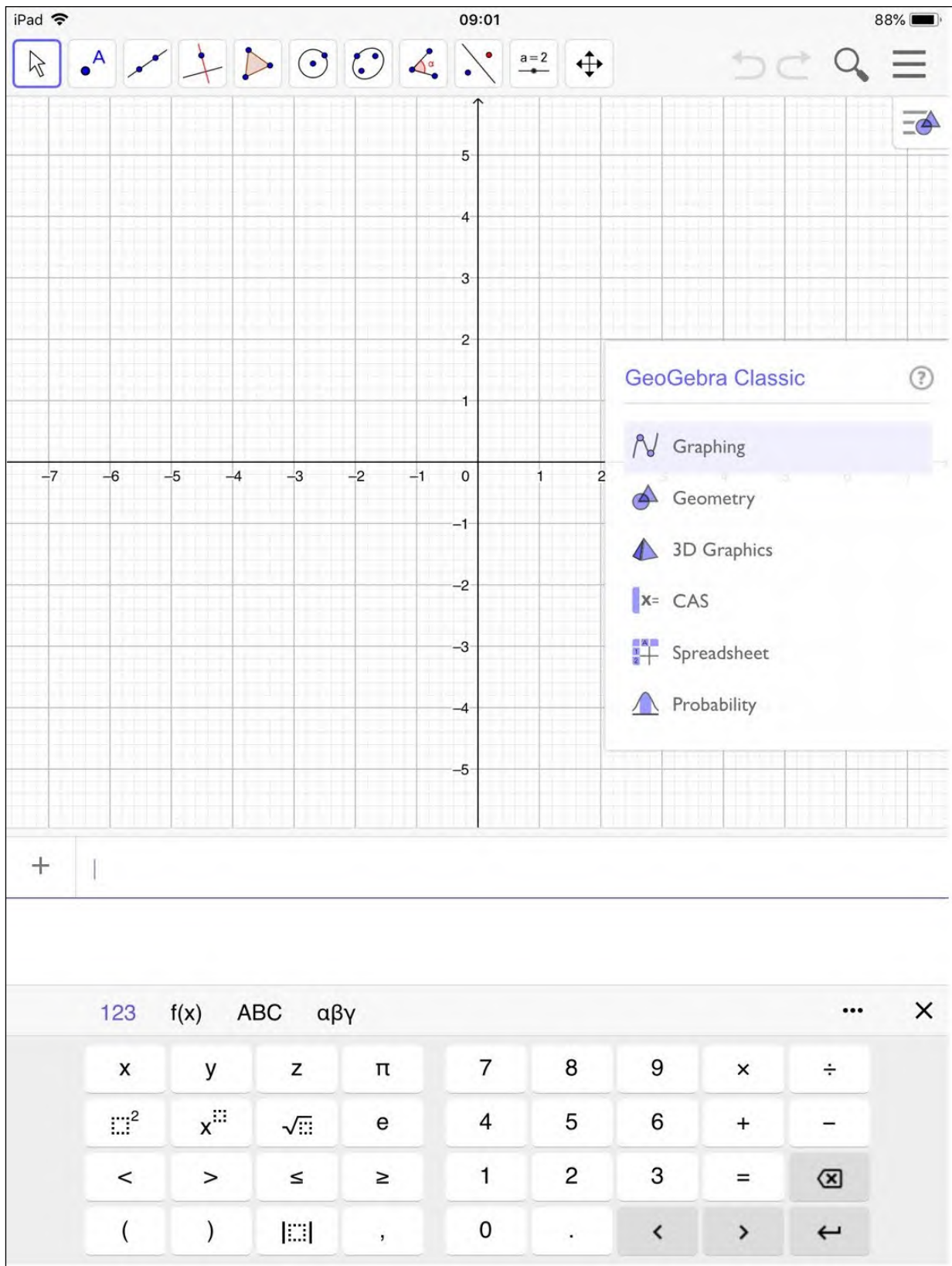
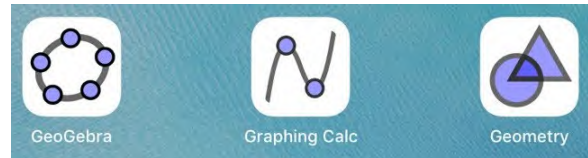


การใช้ GeoGebra บน Tablet

ให้ติดตั้ง Application GeoGebra

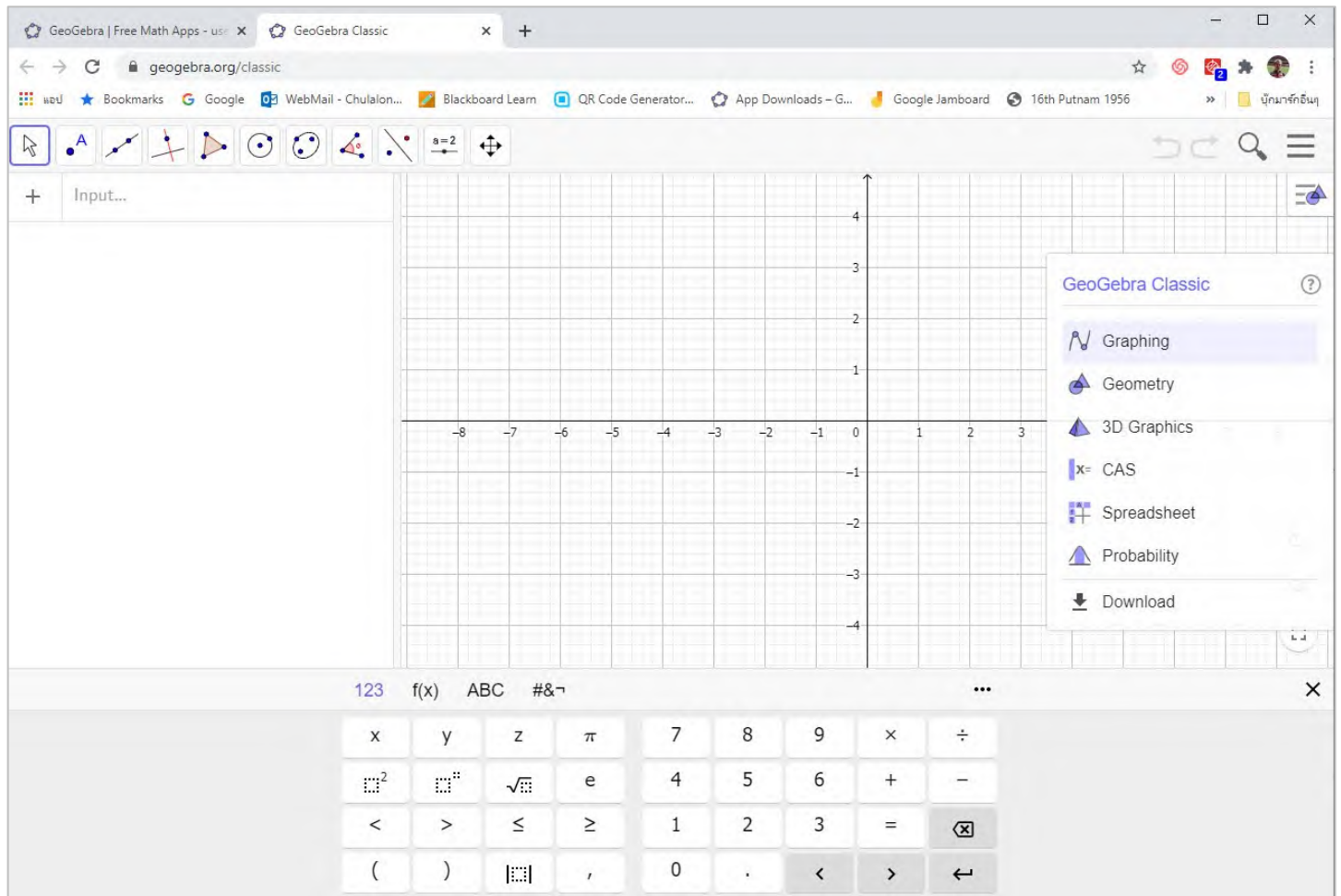
เมื่อ Run Application GeoGebra บน Tablet

จะได้ผลบนจอภาพหน้าแรกเป็นดังนี้ (ภาพหน้าจอ GeoGebra บน iPad)

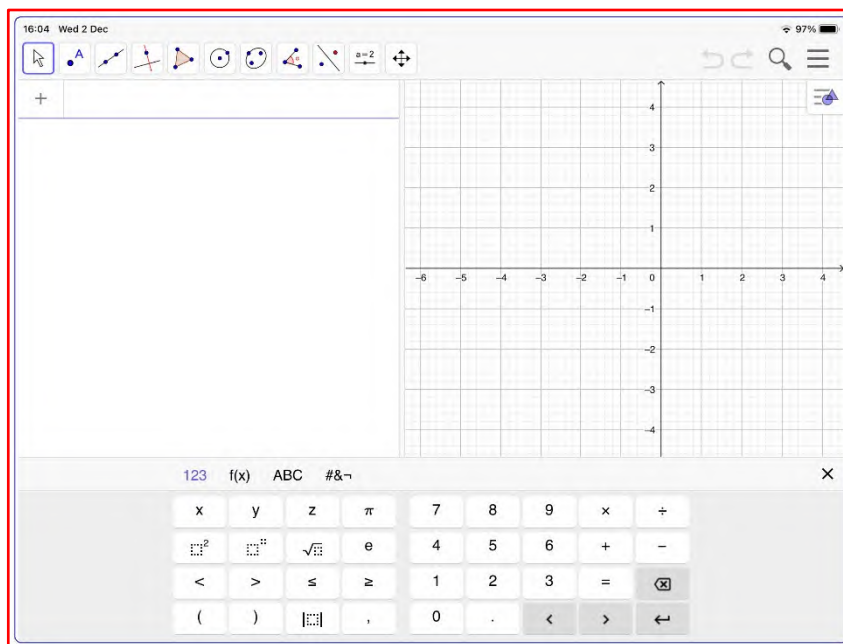


ตัวอย่างภาพของ GeoGebra Classic ที่เปิดใช้งานแบบ Online

Window CAS : Computational Algebra System และ Window Graphics



ตัวอย่างหน้าจอของ GeoGebra บน Ipad



Keyboard ที่มีใน GeoGebra Classic 6, GeoGebra Classic Online, GeoGebra Application

Keyboard ตัวเลข (123)



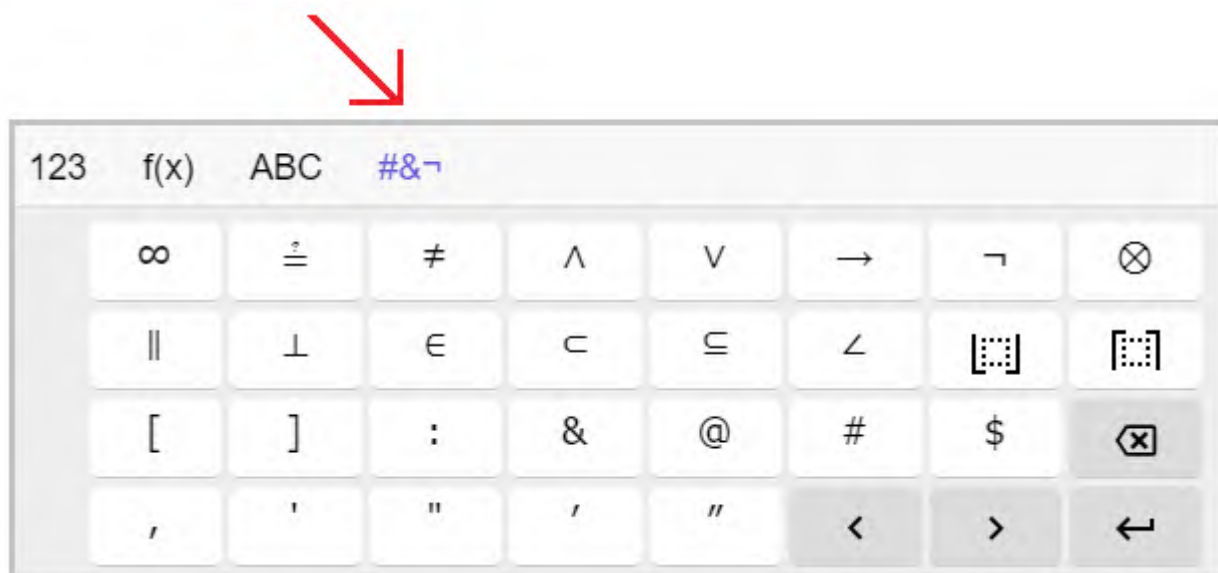
Keyboard Function (f(x))



Keyboard อักษร (ABC)



Keyboard สัญลักษณ์คณิตศาสตร์



ตัวอย่างภาพหน้าจอของ GeoGebra Classic ที่เปิดใช้งานแบบ Online

Window 3D Graphics

